APORTES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN AVANZADA SOBRE LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

CINDY YESENIA INDABURO MORENO
JOJHAN GONZALO JIMÉNEZ BELLO
CLAUDIA MAYERLY SARMIENTO MARTÍN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2016

APORTES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN AVANZADA SOBRE LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática.

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
Directora

CINDY YESENIA INDABURO MORENO
JOJHAN GONZALO JIMÉNEZ BELLO
CLAUDIA MAYERLY SARMIENTO MARTÍN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2016

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

Agradecimientos y dedicatoria

En cualquier empresa o proeza está el apoyo y la confianza de un número de gente valiosa para permitir hacer realidad el sueño, sin los cuales este no habría sido posible, cada una de estas personas que colaboraron en este sueño lo hicieron de forma desinteresada, incluso algunos no se imaginan que sus acciones se constituyeron en el apoyo más valioso que me pudieron brindar, es por ello que quiero dedicarles un espacio para hacer llegar mis sentimientos de gratitud.

En primer lugar, quiero agradecer a mis dos compañeros de travesía: Jojhin y Maye, con quienes descubrimos el sentido del esfuerzo, de la colaboración, del rigor de la jornada, pero sobre todo el de la amistad, llegar después de horas de trabajo para encontrar en sus palabras, en sus historias un aliciente para continuar con la construcción de estas páginas.

De igual manera a quien estuvo allí prendiendo el candil en nuestros momentos de penumbra, la profe Lyda, a quien de manera especial quiero agradecer por los espacios íntimos de reflexión y catarsis que tanto bien nos hicieron durante estos años, siempre con palabras llenas de sensatez y de cierta complicidad que me hicieron sentir parte del sueño de la transformación de las realidades.

De igual manera los profes de mis seminarios Leonor, Claudia, Gloria, Nubia y Hernán, de quienes recordé que el camino no termino en mi formación inicial que aún quedan muchas cosas que aprender, como ser estudiante otra vez. En especial quiero agradecer al profe Edgar, por compartir sus reflexiones críticas sobre el sentido de la FPM, las visiones de la UPN y en especial de la Licenciatura, también por darnos las instrucciones de cómo prender la aspiradora, eso sí que ha sido muy útil.

Como dejar de lado a mi hermosa familia y amigos, Madre siempre has sido mi luz, mis alas, pero también el faro que me indicó puerto seguro, a ti quiero dedicar este trabajo, pues cuan paciente y comprensiva has sido. Mi padre, hermanas y sobrinos que siempre han estado acompañando y alegrando mí camino, a Andrés quien tuvo para conmigo muchos detalles que hicieron más fácil este camino. A todos aquellos quienes pacientemente esperaron que entre tanto trabajo tuviera un espacio para compartir con ellos.

Cindy

En primer lugar y como siempre lo diría mí amada madre: Gracias a Dios y a la Santísima Virgen, definitivamente cada uno de mis logros y desaciertos son fruto de su grandísima sabiduría.

A mis padres, gracias por cada abrazo, cada bendición, por ser la luz que guía mis sueños, gracias porque aún en los momentos en que he y no he sido lo que esperan, sus palabras, sus enseñanzas y definitivamente su amor son la fuerza necesaria para enfrentar cualquier batalla y querer ser cada día mejor.

Hoy mientras escribo estos renglones, recuerdo sus miradas al despedirme para asistir a las clases de Maestría, la de mi Padre llena de orgullo y la de mi Madre llena de miedo por los riesgos del mundo, también recuerdo sus palabras llenas de bendiciones, recordándome que el hogar es el lugar del cual nuestros cuerpos se alejan, pero nuestros corazones se unen. Doña Ana, Don Rafael son mi mayor tesoro, los amo.

A Migue y su gran regalo Valen, gracias por esa extraña relación en la cual el amor aparece en los momentos menos esperados, gracias por ser la mezcla perfecta entre la locura, la amabilidad y lo asombroso. Migue siempre admirare tu creatividad y grandes conocimientos, gracias porque desde tu perfecta singularidad en mi niñez me enseñaste a quererte, amarte y admirarte. Valen el ejemplo de ternura, de amabilidad y comprensión de esta familia, recuerda que muchos de mis pasos son gracias a ti.

A mis dos compañeros de camino Cindy y Jojhan, gracias por cada risa, por permitirme compartir historias, cinco semestres fueron suficientes para convencerme ¡Son un hermoso par de Locos! (Aún tengo serias dudas si nuestro trabajo fue realmente extenso o simplemente nuestras "técnicas de estudio" no fueron tan acertadas, los quiero).

Y definitivamente este camino llamado Maestría tuvo la mejor guía, uno de los seres humanos más bonitos que he conocido, una excelente maestra y mujer, profe Lyda mi eterno agradecimiento y admiración

Maye

Una frase célebre afirma que "Entre más grande es la prueba más glorioso es el triunfo" y esta investigación es el resultados de muchos esfuerzos, momentos de tensión, de ira, de felicidad, de un largo camino que junto a grandes personas he recorrido con el objetivo de aportar un granito de arena a nuestra amada Educación Matemática.

Gracias a Dios por permitirme cerrar este ciclo y darme la sabiduría para no desfallecer pese a los momentos de angustia, dolor, pereza y desmotivación, Dios aprendí que la fe en ti mueve montañas y nos refresca con un nuevo aire día a día para ser mejores, simplemente gracias.

A mi familia, mis padres y hermanos, gracias porque siempre están a mi lado apoyándome y que con su amor sincero me hacen sentir el hombre más afortunado de este planeta, les dedico este paso en mi carrera profesional.

Al resto de mi familia, gracias porque sus risas, palabras de ánimo y buena vibra me llevaron a dar por terminado este documento. Hoy con un dolor en el alma, de manera especial esta dedicatoria la hago en honor a mis tres seres queridos que hoy me cuidan desde el cielo, mi abuela Nelly, mi Tío Javier y mi Tío Manuel, las lágrimas que caen mientras escribo no apagan el amor que aún siento por ustedes.

A mi querida maestra, amiga, consejera y gran ejemplo, la profe Lyda Mora, de nuevo gracias, ya son tres los espacios de investigación que hemos compartido y de los cuales tengo muchos aprendizajes. Siempre mil y mil bendiciones pues eres un gran ejemplo de mujer y madre.

Sin duda alguna como no agradecer a mis compañeras de lucha, Maye y Cindy, quienes con sus regaños, sus palabras de ánimo y "su gran ayuda" me permitieron ponerle el entusiasmo a esta investigación y terminarla con mucho esfuerzo. No olviden que son grandes personas, amigas y profesionales.

A mi amiga incondicional Yula, solo tengo por decir que por cuestiones de la vida nos encontramos de nuevo en este programa y que sin duda seguimos conservando esa bonita amistad que nos hace grandes seres humanos, te envío un abrazo fuerte…

A mis compañeros y Magister Angie, JhonFre, Jenny mil y mil gracias por tantos momentos compartidos en este camino de jornadas largas de estudio, baile, risas, llantos y buenos espacios de estudio. Mis mejores deseos.

Y por supuesto a Ti, que llegaste hace muy poco y has logrado transformar mi vida, este es un… sí… quiero recorrer este y muchos más caminos a tu lado.

A la UPN y mis profes, pues sin sus grandes enseñanzas no seriamos lo que somos…gracias por permitirnos cuestionarnos el aula de clase y procurar que seamos agentes de cambio para nuestra sociedad.

Jojhin

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Aportes de la Historia de las Matemáticas al Conocimiento Didáctico del Contenido del Profesor de Matemáticas en formación avanzada sobre las Ecuaciones Trigonométricas***, presentado por los estudiantes:

Cindy Yesenia Indaburo Moreno, Cód. 2014185008, CC. 1010195012
Jojhan Gonzálo Jiménez Bello, Cód. 2014185009, CC. 1012356039
Claudia Mayerly Sarmiento Martín, 2014185021. CC. 1070952105

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 49 puntos.

Observaciones: Los jurados recomiendan otorgar distinción meritoria.

En constancia se firma a los 31 días del mes de agosto de 2016.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora: *LYDA CONSTANZA MORA*

Jurados:

Profesor: *GISELA MONTIEL ESPINOSA (México)*

Profesor: *LEONOR CAMARGO URIBE (UPN)*

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Aportes de la Historia de las Matemáticas al Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las Ecuaciones Trigonométricas
Autor(es)	INDABURO MORENO, Cindy Yesenia; JIMÉNEZ BELLO, Jojhan Gonzalo; SARMIENTO MARTIN, Claudia Mayerly
Director	Lyda Constanza Mora Mendieta
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 209 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO, ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA, HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

2. Descripción
Trabajo de grado realizado en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, centrado en el estudio del Conocimiento del Profesor de Matemáticas (CPM), en términos de las transformaciones que este puede tener a través del estudio de la Historia de las Matemáticas (HM), en particular el estudio de la Historia de la Trigonometría y las Ecuaciones Trigonométricas (ET). Para analizar esas transformaciones se apropia el modelo del conocimiento del profesor de matemáticas presentado por Pinto (2010), del cual emergen tres unidades de análisis en relación con un sistema de dimensiones e indicadores para el CDC.

3. Fuentes
Para realizar este estudio se consultaron alrededor de 75 fuentes en diferentes idiomas que abarcan un (1) Handbook, veintiocho (28) libros (incluyen textos completos y capítulos de libro), veintinueve (29) artículos de revista, cuatro (4) documentos generados de eventos

académicos, siete (7) tesis de nivel de postgrado y doctorado, y otros documentos; Las fuentes más importantes para el desarrollo de este documento fueron:

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1°. *Scripta Math*, 20, 24 - 29. Recuperado de http://www.jphogendijk.nl/arabsci/Kashi-Aaboe.pdf

Chauvenet, William. (2013). *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*. London: Forgotten Books. (Original work published 1855)

Dabiri, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teacher´s knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy* (Tesis de Doctorado). University of Iowa, Estados Unidos

Paradís, J., & Malet, A. (1984). *Els orígens i l'ellsenyament de I'algebra simbólica* (*1478-1545)* (Vol. 1). España: Publicacions edicions universitat de Barcelona.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación* (Tesis de Doctorado). Universidad de Salamanca: España.

Wu, H. (2002). What is So Difficult About the Preparation of Mathematics Teachers? Recuperado de http://www.math.berkeley.edu/~wu/.

4. Contenidos

El documento que configura este trabajo se divide en seis capítulos. **El primero** corresponde a los *Preliminares*, entre ellos la justificación, que responde a preguntas como el ¿por qué? y el ¿para qué? del trabajo de investigación; además, se enuncian los objetivos que se pretenden alcanzar al finalizar el trabajo.

En **el segundo capítulo**, *Antecedentes de Investigación*, se muestran algunos referentes relacionados con investigaciones orientadas al estudio del Conocimiento del Profesor de Matemáticas (CPM), estas con tres intenciones: i) El estudio del CPM, ii) la relación HM-EM y iii) la relación HM-Trigonometría y ET.

En **el tercer capítulo**, *Marco de Referencia*, se presentan tres apartados: el primero contiene una revisión histórica que llevó a la consolidación de algunos momentos de la HM en los cuales se identificaron usos, métodos y contextos de solución de las ET; En el segundo se precisan los modelos del CPM de Shulman y Grossman (1986), Ball, et al (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Pinto (2010). Finalmente se presenta un apartado cuyo objeto es describir la evolución de la Trigonometría y en particular de las ET en la normativa colombiana.

El **capítulo cuatro,** *Metodología*, se describen los momentos de la investigación, la forma de recolección y tratamiento de los datos, el tipo de investigación, la herramienta analítica, e información sobre los participantes y los distintos roles que estos ejercen.

En **el capítulo cinco** se presenta el *análisis* de los datos obtenidos para cada uno de los indicadores de las unidades de análisis.

Finalmente, el **último capítulo** hace referencia a las *conclusiones* de la investigación. Estas se presentan en términos de: i) los objetivos de la investigación, ii) del estudio realizado, iii) de la metodología propia de la investigación y iv) cuestiones abiertas, estas relacionadas con distintas reflexiones generadas en el desarrollo de la investigación.

5. Metodología

Este trabajo se inscribió dentro del enfoque cualitativo hermenéutico – interpretativo, ya que se pretende la comprensión, interpretación y comparación de signos o fenómenos. Estos son analizados a la luz de referentes teóricos previos o que se construyen de forma paralela a la investigación. Centra su estudio en los saberes de un grupo de individuos; sin embargo, los resultados no pretenden ser generalizables, procurando así la comprensión dentro del contexto en el que se realiza el estudio. Así, el estudio se realizó en siete fases a saber: *fase 1,* creación de unidades de análisis primarias; *fase 2,* diseño y aplicación de cuestionario; *fase 3,* revisión preliminar de las respuestas al cuestionario; *fase 4,* diseño y ejecución de intervenciones; *fase 5,* refinamiento de unidades de análisis y codificación; *fase 6,* selección de la información y constitución de los datos; y *fase 7,* análisis de los datos.

6. Conclusiones

- Los hitos seleccionados de la HM en relación con el tema, al ser contrastados con los saberes de los maestros en formación avanzada, permitieron determinar cuáles son los aportes al CDC que el estudio de la HM hace al CPM. Es decir, el estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET aportó elementos que contribuyen al conocimiento del maestro en formación avanzada en relación con: métodos de solución de las ET, actividades matemáticas, concepciones de Trigonometría y aspectos matemáticos de las ET, que conllevaron a reflexiones sobre su práctica profesional.
- Los resultados encontrados ponen una alerta sobre: i) la poca atención investigativa que se le ha dado al tema de la educación en Trigonometría y las ET en el campo de la EM; ii) la no conciencia del profesor de matemáticas sobre las potencialidades de la HM en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares; iii) la forma en que son abordados en la escuela los diferentes objetos matemáticos, entre ellos: ecuación, función, variable, incógnita, razón y proporción, entre otros; iv) las intenciones de la inclusión de ciertos objetos matemáticas en los documentos curriculares y normativos que atañen a la educación escolar colombiana; y v) la necesidad de que en los programas de formación de profesores de matemáticas se incluyan cursos de estudio matemático y didáctico del tema; por ejemplo, cursos de HM y su aporte al aula, métodos numéricos, entre otros. Lo anterior, sustenta la idea de Dabiri (2003) cuando menciona que: *“Therefore, understanding preservice secondary mathematics teachers’ understanding of trigonometry would enable colleges of education and mathematics departments to better educate the future cadre of secondary school mathematics teachers to be effective teachers of mathematics.”* (p. 14)

Elaborado por:	Cindy Yesenia Indaburo Moreno Jojhan Gonzalo Jiménez Bello Claudia Mayerly Sarmiento Martin
Revisado por:	Lyda Constanza Mora Mendieta

Fecha de elaboración del Resumen:	**23**	**07**	**2016**

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1

1. PRELIMINARES 5

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 5

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN 7

1.3 JUSTIFICACIÓN 8

1.4 OBJETIVOS 10

1.4.1 GENERAL DE INVESTIGACIÓN 10

1.4.2 GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL 10

1.4.3 ESPECÍFICOS 10

2. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN 11

2.1 ALGUNOS ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS REFERIDOS AL CPM 11

2.1.1 ELABORACIÓN O REFINAMIENTO DE UN MODELO SOBRE EL CPM 12

2.1.2 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN O DURANTE SU PRÁCTICA PROFESIONAL 15

2.2 ALGUNOS ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS DE LA RELACIÓN HM- EM 22

2.3 ALGUNOS ANTECEDENTES REFERIDOS A LA TRIGONOMETRÍA Y LAS ET 26

3. MARCO REFERENCIAL 37

3.1 LAS ET EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS 37

3.1.1 EL APORTE DE CLAUDIO PTOLOMEO: CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE CUERDAS 38

3.1.2 EL PROBLEMA DE LA EXACTITUD EN LA CULTURA ÁRABE 47

3.1.3 OMAR JAYYAM Y LA SOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE ECUACIONES CÚBICAS 53

3.1.4 VIÈTE SOLUCIONA LA ECUACIÓN CÚBICA A TRAVÉS DE ET 56

3.1.5 HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA 59

3.2 MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (CPM) 78
3.2.1 EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO [CDC] 79
3.3 ET EN EL CURRÍCULO ESCOLAR DE MATEMÁTICAS 83
3.3.1 UNA REVISIÓN NORMATIVA DE LAS ET EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS 83
3.3.2 REVISIÓN DE ALGUNAS FUENTES DE CONSULTA CON LAS QUE CUENTA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS ACERCA DEL TRATAMIENTO QUE SE DA A LAS ET 88
4. METODOLOGÍA.. 94
4.1 PERSPECTIVA INVESTIGATIVA... 94
4.2 ESCENARIO ESPECÍFICO 96
4.3 FASES DE INVESTIGACIÓN.. 98
4.3.1 FASE 1. CREACIÓN DE UNIDADES PRIMARIAS DE ANÁLISIS 98
4.3.2 FASE 2. DISEÑO Y APLICACIÓN DE CUESTIONARIO................................ 101
4.3.3 FASE 3. REVISIÓN PRELIMINAR DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO 104
4.3.4 FASE 4. DISEÑO Y EJECUCIÓN DE INTERVENCIONES.............................. 104
4.3.5 FASE 5. REFINAMIENTO DE LAS UNIDADES DE ANÁLISIS Y ELABORACIÓN DE CÓDIGOS 106
4.3.6 FASE 6. SELECCIÓN DE LA INFORMACIÓN Y CONSTITUCIÓN DE LOS DATOS.. 110
4.3.7 FASE 7. ANÁLISIS DE DATOS.. 114
4.4 HERRAMIENTA ANALÍTICA 114
5. ANÁLISIS DE DATOS 117
5.1 UNIDAD: CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [COMATENS]... 118
5.1.1 SUB-UNIDAD ConAcMatG 118
5.1.2 SUB-UNIDAD: ConTopEsp 140
5.1.3 SUB-UNIDAD: ConCuMatDM 165

5.2 UNIDAD: CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS [COESTREPINST] 174
5.2.1 SUB-UNIDAD: ConRepInst *175*
5.2.2 SUB-UNIDAD: ConMtrCu *181*
5.2.3 SUB-UNIDAD: ConCuMaTDD *182*
5.3 UNIDAD: CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO [COAPZECONMAT] 187
5.3.1 SUB-UNIDAD: ConProcCogEMat *187*
5.3.2 SUB-UNIDAD: ConEstInst *190*
6. CONCLUSIONES 193
6.1 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS OBJETIVOS PROPUESTOS 193
6.2 CONCLUSIONES PROPIAS DEL ESTUDIO REALIZADO 195
6.3 CONCLUSIONES DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA 197
6.4 CUESTIONES ABIERTAS 201
7. BIBLIOGRAFÍA 203

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo de búsqueda en la base de datos Jstor, “educación + Trigonometría” 26
Figura 2. Ejemplo de búsqueda en la base de datos Dialnet, “educación + Trigonometría” 27
Figura 3. Principios básicos para la construcción Social de la Función Trigonométrica 33
Figura 4. Apartado de la tabla de cuerdas de Ptolomeo 40
Figura 5. Construcción geométrica para la crd(36º) 41
Figura 6. Comprobación de construcción de Ptolomeo para la crd(36º) y el valor del lado de un decágono regular. 41
Figura 7. Comprobación de construcción de Ptolomeo para la crd(72º) y el valor del lado de un pentágono regular. 43
Figura 8. Construcción geométrica para la crd(72º). 43
Figura 9. Construcción geométrica para la crd(90º) 44
Figura 10. Datos para la mostración de la relación entre ET y la expresión de Ptolomeo 45
Figura 11. Construcción geométrica del opúsculo de al-Khayyām 54
Figura 12. Construcciones auxiliares del opúsculo de al-Khayyām 55
Figura 13. Proposición XVI del texto de Viète 57
Figura 14. Soluciones generales de algunas ecuaciones trigonométricas 63
Figura 15. Apartado de la tabla de logaritmos para N = 1510 64
Figura 16. Apartado de la tabla de logaritmos para 11º 67
Figura 17. Apartado de la tabla de logaritmos para 65º 68
Figura 18. Aparte de la Resolución 277 de 1975, unidad 7 del curso V 86
Figura 19. Aparte de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) grado once (11º) 87
Figura 20. Aparte de la Intervención estructurada 1. 105
Figura 21. Aparte de la tarea emergente 1. Hitos de la Historia de la Trigonometría. 105
Figura 22. Breve descripción de los objetivos de los instrumentos de investigación 109
Figura 23. Ejemplo de Unidad de Análisis vs. Instrumentos 110
Figura 24. Ejemplo de codificación 111
Figura 25. Ejemplo de sub-códigos para el código ActTri. 112
Figura 26. Ejemplo de codificación de un cuestionario 113
Figura 27. Ejemplo de una red semántica para el indicador CtxTriET. 113

Figura 28. Unidades y sub-unidades de análisis 118
Figura 29. Esquema de indicadores de ConActMatG 119
Figura 30. Red semántica PrevioHM – CtxTriET 120
Figura 31. Preguntas 4 y 5 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada 121
Figura 32. Red semántica PosteriorHM – CtxTriET 123
Figura 33. Frecuencia porcentual y gráfica de CtxTriET 125
Figura 34. Red semántica PrevioHM- ActTri 126
Figura 35. Red semántica PosteriorHM – ActTri 127
Figura 36. Frecuencia porcentual y gráfica de ActTri 129
Figura 37 Red semántica PosteriorHM – EvMetET 130
Figura 38. PosteriorHM Red semántica CamCpTri 132
Figura 39. Frecuencia porcentual y gráfica de CamCpTri 132
Figura 40. Red semántica PosteriorHM – InfCultCreF 135
Figura 41. Red semántica PosteriorHM – RiguApx 137
Figura 42. Esquema de indicadores de ConTopEsp 140
Figura 43. Red semántica PrevioHM – AtrET 142
Figura 44. Red semántica PosteriorHM – AtrET 147
Figura 45. Frecuencia porcentual y gráfica de AtrET 149
Figura 46. Red semántica PrevioHM – ProtET 151
Figura 47. Red semántica PrevioHM – RelConcp 153
Figura 48. Red semántica PosteriorHM – RelConcp 154
Figura 49. Frecuencia porcentual y gráfica de RelConcp 156
Figura 50. Red semántica PrevioHM – MetSolET 158
Figura 51. Pregunta número 3 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada 158
Figura 52. Red semántica PosteriorHM – MetSolET 160
Figura 53. Frecuencia porcentual y gráfica de MetSolET 161
Figura 54. Red semántica PosteriorHM – RepET 162
Figura 55. Esquema de indicadores de ConCuMatDM 165
Figura 56. Red semántica PosteriorHM – JustApzETEvMat 166
Figura 57. Red semántica PrevioHM- PrqETRelCu 168

Figura 58. Preguntas 7 y 8 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada 169
Figura 59. PosteriorHM – Red semántica PrqETRelCu 171
Figura 60. Frecuencia porcentual y gráfica de PrqETRelCu 172
Figura 61. Esquema de indicadores de ConRepInst 175
Figura 62. Red semántica PrevioHM – SecMetgET.. 176
Figura 63. Preguntas 9 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada 177
Figura 64. Red semántica PosteriorHM – SecMetgET.. 179
Figura 65. Frecuencia porcentual y gráfica de SecMetgET... 180
Figura 66. Esquema de indicadores de ConMtrCu 181
Figura 67. Esquema de indicadores de ConCuMatDD.. 182
Figura 68. Preguntas 6 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada 183
Figura 69. Red semántica PrevioHM – JustInsEnsET... 183
Figura 70. Red semántica PosteriorHM – JustInsEnsET... 185
Figura 71. Esquema de indicadores de ConProcCogEMat.. 188
Figura 72. Red semántica PosteriorHM – NcsApzETCaractCogE 189
Figura 73. Esquema de indicadores de ConEstInst.. 190
Figura 74. Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) 3
Figura 75. Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) 3

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ejemplos de la equivalencia entre relación resultante de Ptolomeo y $sen\theta$ 47

Tabla 2. Resumen de hitos de la historia de las ET 76

Tabla 3. Dimensiones e Indicadores de los componentes del CDC (Pinto, 2010) 79

Tabla 4 Unidades de análisis primarias, sub-unidades e indicadores relacionados con la Trigonometría y las ET 99

Tabla 5 Relación entre preguntas del cuestionario, hitos históricos de las ET y evidencias de indicadores 102

Tabla 6 Unidades de análisis, sub-unidades e indicadores finales 106

Tabla 7 Herramienta Analítica.. 115

Tabla 8. Descripción de sub-códigos asociados a contextos de la Trigonometría y las ET [CtxTriET] 119

Tabla 9. Descripción de sub-códigos referidos a actividades asociadas a la Trigonometría [ActTri]... 125

Tabla 10. Descripción de sub-códigos asociados a cambios en las concepciones de la Trigonometría [CamCpTri].. 131

Tabla 11. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConAcMatG... 138

Tabla 12. Descripción de sub-códigos asociados a atributos de las ET [AtrET]................... 141

Tabla 13. Descripción de sub-códigos asociados a las relaciones entre las ET y otros conceptos Matemáticos [RelConcp] 152

Tabla 14. Descripción de sub-códigos asociados a métodos de solución de las ET [MetSolET] 157

Tabla 15. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConTopEsp 163

Tabla 16. Descripción de sub-códigos asociados a los prerrequisitos para el trabajo con las ET [PrqETRelCu] 167

Tabla 17. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConCuMatDM 173

Tabla 18. Descripción de sub-códigos asociados a la posible secuencia metodología para enseñar ET [SecMetgET].. 175

Tabla 19. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConRepInst 180

Tabla 20. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConCuMatDD.. 186

Tabla 21. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConProCogEMat 189
Tabla 22. Síntesis del análisis de datos... 191

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1. Fuentes documentales referidas a la relación HM - EM y asuntos reportados en estas ....- 1 -

Anexo 2. Breve reseña de los modelos del conocimiento del profesor 1

Anexo 3. Revisión preliminar del abordaje de las ET en fuentes de consulta........................... 6

Anexo 4. Programa del curso Historia y Epistemología de las Matemáticas ....- 1 -

Anexo 5. Cuestionario versión inicial..- 6 -

Anexo 6. Cuestionario versión final ....- 12 -

Anexo 7. Intervención 1. Hitos de la Trigonometría ....- 18 -

Anexo 8. Intervención 2. Historia de las ET...- 23 -

Anexo 9. Tareas propuestas a los maestros en formación avanzada ....- 29 -

Anexo 10. Unidades de análisis vs instrumentos...- 31 -

Anexo 11. Nomenclatura para codificación 39

Anexo 12. Cálculo de sin(3°) con métodos analíticos y algebraicos....................................... 41

INTRODUCCIÓN

Hacia finales de la década de los 90, la formación de profesores de Matemáticas se posicionó como tema de interés, reconocida como una línea de investigación vinculada directamente con las prácticas sociales de la Educación Matemática [EM] referidas al nodo de la *educación de profesores* (Valero, 2012); o como lo afirman Cardeñoso, Flores & Azcárate (2001) en la EM existe la línea denominada *"Formación y Desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas"*, a propósito de la importancia del profesor para la EM.

En el campo de la EM, actualmente existe una mayor conciencia del papel que juega el CPM en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo cual, ha conllevado a que algunos investigadores del campo se interesen por ahondar en este asunto, haciendo evidente la relevancia que tiene la EPM; así lo resalta Valero (2012) cuando afirma que:

> (…) algunos estudios sobre el desarrollo profesional de profesores de Matemáticas y sobre su aprendizaje han sostenido y mostrado la importancia de ampliar la comprensión de lo que está en juego cuando los profesores en ejercicio hacen su trabajo y aprenden. (p. 314).

Dicho en otras palabras, los conocimientos del profesor de Matemáticas, producto de su formación continua, experiencia personal y profesional, se instauran como un aspecto determinante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas.

Sin embargo, existe una postura en la cual se concibe la Educación del profesor de Matemáticas [EPM] como un campo de investigación con existencia propia (ámbitos de acción específicos, líneas y objetos de investigación particulares), diferente de la EM, pero relacionado con ella, esto es, dependiente aún de la actividad de su comunidad primaria de investigación: la EM.

Al respecto, en Colombia, el grupo de investigación *Research on Matematics Teacher Education* [RE-MATE] de la Universidad Pedagógica Nacional, en cabeza de los profesores Edgar Guacaneme y Lyda Mora, entienden la EPM como un campo de investigación distinto a la EM y se han interesado por desarrollar estudios que aporten a este campo. Uno de sus escenarios de acción investigativa, es el programa de Posgrado de Maestría en Docencia de la Matemática de esta misma Universidad, que para la cohorte 2014 – I ofertó la línea de trabajo: la EPM, en la cual se inscribe este trabajo de investigación titulado*: Aportes de la HM al CDC del profesor de Matemáticas en formación avanzada sobre ET.*

En este trabajo se cuestiona principalmente cómo la Historia de las Matemáticas [HM] aporta al Conocimiento Didáctico del Contenido [CDC] que posee el profesor de Matemáticas en formación avanzada sobre las Ecuaciones Trigonométricas [ET]. Se pretende identificar los componentes del CDC que se evidencian a partir del conocimiento histórico de las ET en profesores de Matemáticas en formación avanzada. En últimas, el propósito de este trabajo es analizar el CDC del grupo de maestros en formación avanzada y con esto, reflexionar sobre la calidad y pertinencia de los contenidos que se desarrollan en los programas de formación docente y sobre la práctica profesional de este grupo de maestros.

El documento que configura esta investigación se divide en siete capítulos, el primero corresponde a los *Preliminares*. Entre ellos está la justificación, que responde a preguntas sobre el ¿por qué? y el ¿para qué? del trabajo de investigación. Además, se enuncian los objetivos que se pretenden alcanzar y se hace una breve descripción de las evidencias que conllevaron al planteamiento del problema.

En el segundo capítulo, *Antecedentes de Investigación*, se presentan algunos referentes relacionados con el CPM, clasificados así: i) estudios del CPM, ii) relación HM – EM y iii) relación HM – Trigonometría y ET. El primer foco de interés incluye estudios relacionados con los distintos modelos del CPM y reportes de investigación sobre este tema. En el segundo, se presentan antecedentes referidos a trabajos de grado e investigaciones en las cuales se han abordado asuntos relacionados con la HM y la EM, en particular sobre la HM en relación con la cultura y las matemáticas y la HM en la formación de profesores. En el tercer foco se reportaron estudios referidos al CPM en el campo de la Trigonometría y en especial con las ET. Es importante mencionar que el registro documental sobre este asunto en algunas bases de datos y fuentes bibliográficas, es casi nulo, pues se ha puesto poca atención al tema en el campo de la Educación Matemática. Pese a ello, se retomaron algunos trabajos que brindan algunos elementos a la investigación que se desarrolla en este documento. Estos se clasificaron en investigaciones relacionadas con el conocimiento del profesor de Matemáticas en el campo de la Trigonometría (Montiel, 2005; Montiel y Jácome 2014; Dabiri 2003) y estudios sobre ET desde la perspectiva matemática (Araya y Parraguez, 2014).

En el tercer capítulo, *Marco de Referencia*, se presentan tres apartados. El primero contiene una revisión histórica que llevó a la consolidación de algunos momentos de la HM, en los cuales se identificaron usos, métodos y contextos de solución de las ET; allí se presentan trabajos centrados en las obras de: Ptolomeo, Al-Kashi y Ulugh- Beg, Omar Jayyam, François Viète y los aportes de William Chauvenett (1875) y Manuel Torres Torija (1894); los dos últimos desde una perspectiva para la enseñanza del concepto. Este capítulo fue fundamental para el desarrollo de las intervenciones sobre la Historia de la Trigonometría y de las ET, construidas para los profesores de Matemáticas en formación avanzada. En el segundo apartado, se precisan los modelos del CPM de Shulman y Grossman (1986), Ball, et al (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Pinto (2010). Finalmente, se presenta una descripción de la evolución de la Trigonometría y en particular de las ET en la educación colombiana desde dos puntos de vista, la normativa curricular en matemáticas y el tratamiento de las ET en fuentes de consulta de profesores de matemáticas.

El capítulo cuatro, *Metodología*, se centra en describir la perspectiva investigativa, los momentos de investigación, la forma de recolección y tratamiento de los datos, la herramienta analítica, información sobre los participantes y los distintos roles que estos ejercen. En general, se detallan y sustentan teóricamente las distintas decisiones tomadas en el desarrollo de la investigación. En este capítulo se ubica la propuesta de unidad de análisis para el CDC que se genera a partir del sistema de Dimensiones e Indicadores de Pinto (2010) y los hallazgos históricos sobre Trigonometría y las ET.

En el capítulo cinco se presenta el *Análisis de los datos* obtenidos para cada uno de los indicadores de las unidades de análisis. El análisis es acompañado de: i) las diferentes redes generadas por el software Atlas.Ti, ii) la herramienta analítica diligenciada para cada uno de los sub-unidadess, y iii) un conjunto de evidencias que sustentan los hallazgos encontrados en varias de las afirmaciones orales o escritas de los maestros en formación avanzada.

En el capítulo seis, se presentan las *conclusiones* de la investigación en términos de: i) los objetivos de la investigación, ii) del estudio realizado, iii) la metodología propia de la investigación y iv) cuestiones abiertas, estas relacionadas con distintas reflexiones generadas en el desarrollo de la investigación.

1. PRELIMINARES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Promover la acción reflexiva de los profesores sobre su práctica pedagógica se reconoce como un componente decisivo en su carácter profesional, pues cuando el profesor adquiere conciencia de sus:

> (…) creencias, acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y también a verificar si alguna de ellas está frenando o dificultando la enseñanza (…) conduce a los cambios en su forma de enseñar y consecuentemente la mejora de su práctica" (Ñancupil, et al. 2013, p.39).

Esto implica que las acciones de reflexión se posicionen como un elemento potenciador de transformaciones en el quehacer del profesor y por tanto enriquezcan sus saberes. Así, un grupo de tres profesores de secundaria, estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, autores de este documento, inquietos el asunto de la enseñanza de las ET, sometieron a análisis reflexivo su conocimiento sobre el tema y encontraron que es necesario buscar recursos o estrategias que les aporten elementos para mejorar sus prácticas de enseñanza.

Al respecto, un primer acercamiento a este asunto se consolidó con la consulta de algunos documentos normativos curriculares nacionales e internacionales en tres instancias. La primera, corresponde a una revisión de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBC] y los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (2000), en los dos primeros no se halló alusión directa a ET, mientras que en el tercero se halla la expresión ET simples, sin hacer mayor aclaración al respecto.

Al no contar con información explícita sobre el tema en los documentos revisados anteriormente, se procedió a la segunda instancia. Esta correspondió a la revisión de decretos y normas que organizan el currículo escolar colombiano para identificar en qué momento y por qué se incluyen las ET en la escuela. En esta consulta, se encontró que el término ET aparece por primera vez en los programas de Matemáticas adoptados por la resolución 277 de 1975[1] como un contenido de enseñanza para el curso de *Geometría Analítica y Trigonometría*, con una particularidad que llama la atención: se mencionan ET *sencillas*; no obstante, en ningún otro documento previo se hace mención al tema, esta resolución no tuvo trascendencia al igual que las corrientes de la matemática moderna, y posteriormente aparecieron documentos publicados por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] colombiano.

Como tercera instancia, se revisó de manera minuciosa el tratamiento de las ET en libros de texto escolares del grado décimo[2] de la Educación Media en Colombia. Se encontró que las ET son el último contenido de Trigonometría (nombre que se le da al curso de Matemáticas en grado décimo) y su estudio es netamente algebraico[3] enlazado a algunas consideraciones sobre la periodicidad de las funciones trigonométricas; es decir el tratamiento que se le da a la solución de ET no es diferente al de ecuaciones algebraicas. Esto, generó en el grupo de investigadores la necesidad de indagar sobre alguna fuente que permitiera enriquecer el CPM sobre este objeto. Así, aludiendo a la formación profesional de los autores de este documento y las diferentes reflexiones hechas en algunos seminarios de la Maestría, se indagó sobre trabajos o estudios de investigación en EM respecto a este tema particular de las Matemáticas; sin embargo, no se halló algo al respecto.

Todo lo descrito, condujo a un conjunto de cuestionamientos entre los que se pueden mencionar: ¿Son las ET un eslabón perdido en el currículo escolar de Matemáticas colombiano? ¿Por qué se habla en la resolución 277 de 1975 de la enseñanza de las ET sencillas? ¿De qué depende esta caracterización? ¿Es pertinente el aporte investigativo a este ámbito? y finalmente ¿Qué tipo de fuentes de consulta pueden enriquecer el CPM sobre este ámbito? Esto, en conjunto con reflexiones sobre la importancia de la HM en el CPM, suscitadas en el seminario de Innovación e Investigación ofertado en el primer semestre de 2014 en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, la revisión documental sobre los

[1] De los alcances y objetivos de esta resolución se hablará en el tercer capítulo de este documento.
[2] En Colombia, la Educación Básica va desde primero de primaria hasta noveno grado (aproximadamente desde los 6 años hasta los 15 años) y luego se da la Educación Media que incluye los grados décimo y undécimo (las edades regulares son desde los 15 años hasta los 18).
[3] Esta idea se amplía en el tercer capítulo de este documento.

modelos de CPM y el análisis de los saberes previos de este grupo de profesores llevó a cuestionarse sobre *el aporte que puede hacer la HM, en particular, de las ET al CPM*.

En relación con el panorama descrito y al indagar un poco más sobre aportes de la comunidad investigativa sobre el tema, la situación es menos prometedora. En una primera indagación realizada por los autores de este documento a través de diferentes bases de datos virtuales y físicas[4] no se identificó investigaciones al respecto de la relación Educación y ET. Más aún al hacer la búsqueda bajo parámetros de mayor especificidad, por ejemplo, Historia de las ET, Tipos de soluciones de una ET o propuestas metodológicas para el tratamiento de ET en el aula de clase no se halló información, lo que indica que estudiar este asunto es pertinente, aunque con pocos antecedentes directos, que dieron lugar a otros interrogantes adicionales a los ya expuestos: ¿Por qué aparecen en los planes curriculares las ET? ¿Qué saben los profesores de Matemáticas sobre las ET? ¿Cuál es su potencial en el aula escolar? Pareciera ser que el panorama que se evidencia en los libros de texto, el estado del campo investigativo al respecto del tema y la formación de docentes de Matemáticas, comparten falta de interés en el tema de las ET o de los fines de estas en el currículo.

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Lo expuesto en el apartado anterior, generó en los autores de este documento una reflexión en términos de ¿Cómo aportar elementos que permitan a los profesores de Matemáticas, mejorar sus conocimientos y prácticas sobre las ET? Una posible respuesta a este cuestionamiento se halló en dos lugares: en el primero, el trabajo expuesto por Guacaneme (2000) y la línea de investigación del grupo RE-MATE en relación con *la importancia de la Historia de las Matemáticas en la formación de maestros de Matemáticas*; y en segundo lugar, un acercamiento a los diferentes *modelos del conocimiento del profesor de Matemáticas*, Shullman (1987), Hill, Ball y Shilling (2008) y en particular el sistema de Dimensiones e Indicadores del Conocimiento Didáctico del Contenido propuesto por Pinto (2010).

[4] Motor de búsqueda Google y bases de datos como Dialnet, Jstore y ResearchGate.

El reconocimiento de los diferentes modelos sobre el CPM según la experiencia con el grupo RE-MATE y lo mencionado anteriormente permitió establecer un sistema compuesto por tres (3) elementos: ET, HM y CPM, en otras palabras, existe la posibilidad de que la HM aporte elementos al CPM acerca de las ET. Con esto surge el planteamiento de la pregunta de investigación que orienta este trabajo y que sintetiza los cuestionamientos anteriores:

¿Cuáles son los componentes del CPM a los que aporta la historia de las ET?

1.3 JUSTIFICACIÓN

En el campo de investigación de la EPM se pretende dar respuesta a varios interrogantes que surgen de la relación HM – Formación de Profesores de Matemáticas [FPM]. Más precisamente existe la inquietud, si dicha relación puede llegar a consolidarse como un aporte al conocimiento del profesor de Matemáticas. Para orientar esto, en el marco de esta investigación se dio la necesidad de particularizar un objeto que permitiera un mejor abordaje, para este caso las ET, esto debido a los siguientes aspectos:

El primero de ellos, es la experiencia de los investigadores en relación con este contenido presente en sus prácticas profesionales, en el currículo de Matemáticas y los libros de texto. Como segundo aspecto se encuentra que, desde la percepción de los autores de este trabajo, en la Educación Media se ha reducido al estudio de las ET a un tratamiento algebraico. Además curricularmente solo se mencionan de forma explícita en la resolución 277 de 1975 y en los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA][5] de grado once, acompañadas del adjetivo “sencillas” y “simples” respectivamente, lo cual remite a cuestionar sobre i) el significado de dicho término, ii) ¿ecuaciones de la forma $\sin x = 0.5$ o $\sin 1° = x$ corresponden a dicha caracterización? iii) ¿si estas últimas corresponden a sencillas o simples por qué no son trabajadas en la escuela ni abordadas en libros escolares? iv) ¿Cuál sería el abordaje correcto de estas en el aula de clase? v) ¿Qué fuentes de consulta aportarían al conocimiento del profesor sobre el tema? y acaso ¿todo esto no debería ser parte del conocimiento del profesor de Matemáticas?

[5] En el tercer capítulo de este documento se amplía esta afirmación.

Frente al panorama anterior, un escenario propicio que podría ayudar a dar respuesta a algunos de los cuestionamientos es la HM; esto, en tanto autores como Zanakis & Arcavi (2000), Jankvist (2009), Fauvel & van Maanen (1997), Furinghetti & Pehkonen (2002) coinciden en que la HM aporta realmente a la constitución del CPM y a su práctica docente, además Guacaneme (2011) afirman que la HM proporciona artefactos tales como visiones de la actividad matemática, de los objetos matemáticos y competencias profesionales, en particular, esta investigación se centra en que la HM aporta elementos sobre las ET que deben ser de dominio del profesor de Matemáticas.

La relación HM-ET, descrita en el párrafo anterior, ha estado acompañada explícitamente del término *Conocimiento del Profesor*. Al respecto de este, una revisión documental permitió identificar que la investigación realizada por Shulman (1986; 1987) se convirtió en el punto de partida de investigaciones y modelos particulares sobre el CPM como los elaborados por Ball, Hill, et al. (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Pinto (2010), entre otros. En estos se destaca la aparición de subdominios del conocimiento, categorías de proficiencia y dimensiones e indicadores respectivamente. Cada uno con sus características particulares permitió comprender la constitución del CPM y sus elementos.

El reconocimiento de los diferentes modelos del CPM, llevó a la necesidad de particularizar este aspecto dentro de la relación HM-ET. Así, la especificidad de la propuesta de Pinto (2010) sobre los Componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido [CDC] dio luces a los intereses de esta investigación.

Las consideraciones planteadas anteriormente, la revisión de antecedentes, el tratamiento de las ET en la normativa curricular, libros de texto y recursos web como fuente primaria de consulta de los profesores de Matemáticas, la caracterización de los saberes sobre ET de los investigadores y el reconocimiento de los diferentes modelos del CPM, dieron origen a la pregunta de investigación descrita en el apartado 1.2.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Identificar los componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido de los maestros de Matemáticas en formación avanzada a los que aporta el conocimiento histórico de las Ecuaciones Trigonométricas.

1.4.2 GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Aportar elementos al desarrollo y fortalecimiento del rol docente e investigativo del profesor de Matemáticas.

1.4.3 ESPECÍFICOS

1. Apropiar un modelo de CPM que permita analizar los componentes del CDC a los que aporta el conocimiento histórico de las ET.
2. Clasificar los saberes sobre las ET de un grupo de maestros de Matemáticas en formación avanzada de acuerdo con el modelo de CPM seleccionado.
3. Identificar hitos en la HM relacionados con las ET que posibiliten hacer un contraste con los saberes que posee el maestro en formación avanzada sobre el tema.
4. Determinar el papel que juega la HM en la constitución del conocimiento del maestro de Matemáticas en formación avanzada.
5. Proponer un conjunto de reflexiones acerca de lo que debe conocer el profesor de Matemáticas de secundaria sobre las ET a nivel didáctico, histórico, matemático y curricular.

2. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se realiza una descripción de algunas investigaciones previas relacionadas con los intereses de este trabajo. Con dicho fin, se describe algunos antecedentes investigativos referidos al *i)* CPM, *ii)* la relación EM–HM y *iii)* a la Trigonometría y las ET.

2.1 ALGUNOS ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS REFERIDOS AL CPM

Atendiendo a que la investigación reportada en este documento se centra en el conocimiento de un grupo de maestros en formación avanzada acerca de un tema específico propio de la enseñanza media en Colombia, las ET, se realizó una revisión de diferentes trabajos investigativos que giran en torno al CPM. Lo anterior, con el fin de tener un panorama investigativo en esta línea. Para esto, se hizo necesario identificar las relaciones entre la EM y EPM, para ubicar el CPM.

Luego de una revisión preliminar de literatura especializada en el área se encontraron dos posturas al respecto: el desarrollo profesional del profesor de Matemáticas (donde se incluye el CPM) como uno de los intereses de la EM (Cardeñoso, Azcárate y Flores, 2001) y la EPM como un campo de investigación, que si bien está conectado con la EM, su objeto de estudio difiere del de la EM propiamente dicha (Guacaneme y Mora, 2012).

Guacaneme y Mora (2012) plantean que, atendiendo a que la EM centra sus objetos de estudio en el sistema didáctico cuya base es el triángulo saber matemático, estudiante y profesor, la EPM trasciende esta mirada. El sistema didáctico que proponen estos autores para la EPM está conformado por la triada: formador de profesores, conocimiento del profesor de Matemáticas y estudiante (futuro profesor o profesor en ejercicio).

Al respecto de lo anterior, el grupo RE-MATE propone que la EPM se centre en el estudio de i) *los sistemas didácticos estudiados por la EM*, ii) *el conocimiento del profesor de Matemáticas*,

iii) *los sistemas didácticos de formación de profesores y* iv) *el conocimiento del formador de profesores de Matemáticas*[6].

En concordancia con el propósito descrito, se indagó sobre bibliografía que reportará avances o intereses de la comunidad académica en la EPM, en cualquiera de las dos posturas presentadas antes, y allí ubicar estudios específicos sobre el CPM. Al respecto, Cardeñoso (1991) presenta cuatro grupos de interés en la investigación sobre el desarrollo del profesor de Matemáticas[7], en el tercero de estos, *formación didáctica matemática de los profesores*, se incluyen investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, su estructura y evolución. Asimismo, Guacaneme y Mora (2012) referencian nueve objetos de investigación en el campo de la EPM, el cuarto hace alusión al CPM y en este se pone de manifiesto un componente denominado *Pedagogical Content Knowledge* [PCK] que es de interés para esta investigación.

A continuación, se describen algunos antecedentes asociados al CPM, los cuales, se agrupan en dos sentidos: estudios referidos a la caracterización o ampliación del(los) modelo(s) del CPM e investigaciones relativas al CPM en formación o en el ejercicio de su práctica profesional.

2.1.1 ELABORACIÓN O REFINAMIENTO DE UN MODELO SOBRE EL CPM

Algunas de las investigaciones halladas tienen como propósito el planteamiento o mejoramiento de un modelo del CPM o del Conocimiento del Profesor en general. Las más representativas son:

- *Grossman, Wilson y Shulman (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching.* Knowledge base for the beginning teacher. Interesados por el desarrollo del conocimiento profesional de maestros en formación o práctica y por la forma en que ellos transforman el saber para ser llevado al aula de clase, los autores, elaboraron un marco teórico que permitió en su momento una descripción del *conocimiento base para*

[6] Para mayor información sugerimos revisar Guacaneme & Mora (2014)
[7] Cardeñoso (1991) no hace referencia a la Formación de profesores de Matemáticas, en su lugar habla de Desarrollo profesional del profesor de Matemáticas.

la enseñanza. Para esto el equipo propuso una categorización del conocimiento del profesor. Su propuesta inscribe siete componentes: *Conocimiento de la materia, Conocimiento pedagógico general, Conocimiento curricular, Conocimiento sobre los alumnos, Conocimiento de los contextos educativos, Conocimiento de los fines y los valores educativos y Conocimiento didáctico del contenido*. Estos se convierten en el primer modelo para la formación de profesores de cualquier área, el cual a su vez es precursor de otros más específicos.

- *Ball, Hill y Bass (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?* Esta propuesta a diferencia de la presentada por Shulman et al., está centrada en el CPM. Fue elaborada por un grupo de investigadores liderados por Deborah Ball y vinculados a la Universidad de Michigan, quienes desarrollaron un Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza que surge de su interés por:

> (...) el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar, el desarrollo de medidas que hacen posible el análisis de relaciones entre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza y la Calidad de su Enseñanza, y el rendimiento de los estudiantes (Rojas 2010, p. 9).

A partir de lo anterior, y mediante el análisis de los datos recolectados a través de la observación de la práctica profesional, pruebas y entrevistas a diferentes maestros de Matemáticas, el grupo de investigadores clasifican el Conocimiento Matemático para la Enseñanza en seis subdominios: *Conocimiento del contenido* y C*onocimiento pedagógico del contenido*, el primero incluye el *Conocimiento Común del Contenido [CCK], el Conocimiento Especializado del Contenido [SCK], y Conocimiento en el Horizonte Matemático [HCK];* el segundo, *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes [KCS], Conocimiento del Contenido y la Enseñanza [KCT] y Conocimiento del Currículo*.

- *Pinto (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología* *y Educación.* En el año 2010, Jesús Enrique Pinto dio a conocer su tesis doctoral, que buscó:

> (…) describir las concepciones que tienen los profesores sobre la Estadística, su enseñanza y aprendizaje y, más concretamente, sobre la representación gráfica, así como el conocimiento que tienen del tópico, de las estrategias y representaciones instruccionales y del conocimiento del estudiante sobre la representación gráfica en Estadística. (Pinto, 2010. p. 148).

Para alcanzar dicho fin, el autor contrasta los datos recolectados en entrevistas y observaciones de la práctica profesional de dos maestros universitarios de diferentes carreras, con un conjunto de dimensiones e indicadores del CDC elaborado por él que surge a partir de una recopilación y análisis de diferentes modelos del Conocimiento del profesor de Matemáticas. La propuesta de Pinto establece tres componentes: *conocimiento del contenido a enseñar, conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales* y *Conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante del tópico específico.* Las dos primeras contienen 6 dimensiones mientras que la tercera 4. Esta propuesta se caracteriza por su especificidad en cada dimensión pues a diferencia de las anteriores, presenta un conjunto de indicadores para cada dimensión.

- *Carrillo, Flores, Climent, Contreras, Aguilar, Escudero y Montes (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España)* y *Montes, Contreras y Carrillo (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK.* La propuesta elaborada por los autores, surge a partir de la reflexión sobre el carácter especializado del conocimiento del profesor y de los resultados hallados al implementar el modelo MKT en diferentes contextos. A partir de esto, los investigadores plantean un modelo del Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas[8] [MTSK] el cual, *"pretende avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento específico que el profesor posee o podría poseer para la enseñanza de*

[8] El modelo se compone de dos (2) dominios, *conocimiento matemático* (MK) y *conocimiento didáctico matemático* (PCK); estos a su vez se dividen en 3 subdominios: *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la estructura matemática* (KSM), *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM) para el primero y *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), *conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) y *Conocimiento de los estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (*KMLS) para el segundo.

la matemática" (Aguilar, 2013, p. 1). En dicho modelo el conocimiento especializado afecta a todos los subdominios, no exclusivamente a uno de ellos, como es el caso del modelo de Ball, et al.

En relación a las ideas trabajadas en este apartado, es necesario aclarar que en el tercer capítulo de este documento se reportarán con mayor detalle algunos de los modelos descritos anteriormente y otros que fueron de interés para la investigación. Este primer acercamiento se realizó con el fin de identificar el interés de la comunidad por investigaciones referidas al conocimiento del profesor de Matemáticas.

2.1.2 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN O DURANTE SU PRÁCTICA PROFESIONAL

Dado que esta investigación pretende realizar un estudio del CPM en relación con las ET, se realizó la búsqueda de documentos que, aunque no abordaron el mismo objeto matemático, dieron luces del trabajo realizado por diferentes equipos con intereses similares al nuestro. Para ello se acudió a, i) la plataforma de recursos Dialnet, en la cual, al hacer la búsqueda de documentos bajo la frase "conocimiento del profesor de Matemáticas", se hallaron cuatrocientos cincuenta y dos (452) documentos y ii) la búsqueda en la web bajo la frase "conocimiento del profesor de Matemáticas" + "investigaciones". De estas dos indagaciones se tomaron en total 11 documentos con acceso a texto completo reportados durante el periodo de 2010 al 2016, de estos se identificaron los elementos que permiten caracterizar sus objetos de estudio y el tratamiento de los mismos. A continuación, se reportan dichos documentos del más reciente al más antiguo:

- *Rodríguez, Picado, Espinoza, Rojas y Flores (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso.* Interesados por caracterizar el Conocimiento Común del Contenido (CCC) que manifiesta un profesor de Matemáticas cuando enseña funciones, el grupo de autores realizó grabaciones de audio y video a un maestro de un colegio académico diurno de educación secundaria de Costa Rica, mientras dirigía su clase sobre conceptos básicos de funciones a estudiantes de 16-17 años. La información recolectada, en contraste con una adaptación realizada por los autores al conjunto de Categorías para el CCC elaboradas por Rojas-Flores y Ramos (2013), les permitió: i) Describir el proceso de enseñanza del maestro al abordar las funciones, ii) identificar a partir de unidades de análisis los campos del CCC que manifiesta el profesor al enseñar temas básicos de funciones y iii) Determinar qué elementos del CCC son característicos de un profesor de Matemáticas al abordar en su aula de clase conceptos básicos de funciones.

- *Gutiérrez, Gómez y Rico, (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio.* Es una investigación cualitativa cuyo objetivo principal fue la caracterización del conocimiento matemático de 1093 futuros maestros de primaria en España a partir de las respuestas entregadas por estos en un cuestionario propuesto en el marco del estudio TEDS-M[9] (2008).

  Los autores de esta investigación buscaron identificar los conocimientos que poseen los maestros para resolver correctamente dichas preguntas. Las preguntas fueron clasificadas según el *bloque conceptual* al que pertenecían seleccionando aquellas relacionadas con los números y sus operaciones; a estas les fue asignada posteriormente un componente del *bloque cognitivo*: razonamiento, aplicación y conocimiento, y finalmente fueron categorizadas según *nivel curricular del contenido matemático.* Las respuestas acertadas fueron asociadas a la presencia de ciertos conocimientos y las incorrectas a la ausencia o dificultad de otros. Los resultados obtenidos por los investigadores, además de evidenciar deficiencias en el conocimiento de los maestros sobre Matemáticas avanzadas, buscaron ser de utilidad para los programas de formación de Maestros de Primaria de España. Esta investigación a diferencia de las expuestas en este apartado, no hace uso de algún modelo del conocimiento del profesor de Matemáticas.

[9] Teacher Education and Development Study in Mathematics, Estudio Internacional comparativo que abordó la formación inicial de profesores de Matemáticas y los resultados que se obtienen en su formación en 18 países.

- *Dinazar, Ávila, Flores, Climent, Contreras y Montes (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de cuerdas.* Los autores analizaron las afirmaciones hechas por *Omar*, un maestro colombiano de Matemáticas de educación secundaria que hace parte de un curso virtual de formación de profesores, al cuestionarlo sobre la posibilidad de encontrar el número de cuerdas que pueden trazarse conociendo un número *n* de puntos sobre una circunferencia. Las conclusiones del documento se enfocan en describir el conocimiento matemático especializado que pone de manifiesto el maestro al solucionar la situación propuesta, y en indicar cómo el modelo MKTS y sus correspondientes subdominios permiten analizar en profundidad el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

- *Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características del aprendizaje del álgebra en bachillerato.* Mediante una investigación de corte interpretativo, en la que se usaron métodos cualitativos, los autores realizan un estudio de caso con dos maestras de bachillerato. El objetivo principal fue la categorización del conocimiento del aprendizaje de las Matemáticas[10] [KFLM] luego de la enseñanza del Álgebra. Para esto, los autores realizaron una revisión documental de diferentes modelos del conocimiento del profesor de Matemáticas, que en contraste con la información recolectada mediante cuestionarios aplicados, grabaciones de clase y entrevistas hechas a las maestras permitió la elaboración de una tabla a dos columnas en la cual se describió un conjunto de categorías e indicadores para el KFLM.

- *Vásquez, (2015). Evaluación de los conocimientos didáctico- matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.* La tesis doctoral tuvo como principal interrogante: *¿Qué conocimiento didáctico–matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de Educación Primaria en activo?* (Vásquez, 2015, p. 255). Para esto, la autora aplico un cuestionario

[10] Este conocimiento hace parte del CDC y se define como el "conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de aprendizaje; en lugar de poner en el centro el conocimiento sobre el estudiante se pone el proceso de aprendizaje normado por el contenido matemático" (p. 175).

el cual se fundamentó en: i) un estudio histórico-epistemológico sobre la probabilidad, ii) recolección y análisis de investigaciones con intereses similares al suyo, iii) un estudio sobre orientaciones curriculares nacionales e internacionales sobre el tema en cuestión, iv) el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de Godino (2009). En particular, en el cuestionario se indagó sobre el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido para la enseñanza de la probabilidad de noventa y tres (93) profesores de primaria en ejercicio. Los resultados obtenidos, además de mostrar un nivel bajo en todos los tipos de conocimiento analizados, sirve de orientación para los programas de formación y actualización de maestros de primaria.

- *Montes, Contreras, Liñán, Muñoz, Climent y Carrillo (2015). Conocimiento de la Aritmética de Futuros maestros. Debilidades y fortalezas.* Interesados por identificar fortalezas y debilidades del Conocimiento Matemático Especializado que posee un grupo de Estudiantes para Maestros (EPM) sobre fracciones, decimales y porcentajes, los autores realizaron una revisión bibliográfica sobre los modelos del conocimiento del profesor de Matemáticas[11], artículos e investigaciones sobre los tres temas matemáticos en cuestión. Luego, implementaron a setecientos treinta y siete (737) EPM un cuestionario compuesto por diecisiete (17) preguntas,

> El análisis de la información obtenida se realizó inicialmente con un estudio de frecuencias al que siguió una interpretación, relativa a cinco categorías del conocimiento del tema fracciones, decimales y porcentajes: fenómenos y aplicaciones, significados y definiciones (incluyendo imágenes de los conceptos), propiedades y su fundamentación, representaciones y procedimientos. (Carrillo, 2015, p. 43)

El documento finaliza con una reflexión en relación con los saberes matemáticos que deberían ser dominio de EPM que inician la formación universitaria, pues los resultados muestran un nivel deficiente en este aspecto. Además, el grupo de investigadores aconsejó que los resultados de dicha investigación sean usados para la planeación de los programas de Formación de EPM.

[11] La investigación centra su interés en el modelo MKTS y en el subdominio KOT. En apartados anteriores ya se hizo referencia a este modelo.

- *Torres (2015). El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: La enseñanza de la proporcionalidad.* Mediante una investigación cualitativa e interesada por: *"investigar los conocimientos de Matemáticas que el profesor moviliza en la práctica docente en lo que concierne a la temática especifica de la proporcionalidad en sexto curso de Primaria y en el primer curso de Secundaria"* (Torres, 2015, p. 17), la autora hizo un estudio de caso con dos maestros, uno de primaria y otro de secundaria. Para lograr el objetivo, realizó grabaciones durante dos años a las sesiones de clase de cada maestro, y haciendo uso del modelo *Knowledge Quartet*[12] [KQ], diseño un instrumento compuesto por 39 indicadores con los cuales clasifico los episodios de referidos al conocimiento del contenido matemático de los dos maestros sobre la proporcionalidad. Este estudio permitió: i) la elaboración de un instrumento para el análisis de la actividad docente ii) un análisis en relación con los objetivos del profesor al enseñar proporcionalidad y iii) un estudio de caso sobre el aprendizaje de la proporcionalidad de una alumna.

- *Contreras, Liñan y Montes (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de Tercer ciclo de educación primaria.* Con el interés de caracterizar el Conocimiento Matemático Especializado de una maestra de tercero de Primaria al abordar en su clase los conceptos no explícitos de recta, semirrecta y segmento, y en particular el concepto de infinito, los investigadores elaboraron un instrumento de análisis basado en el modelo MTSK, el cual permitió categorizar un conjunto de datos resultado de la información recolectada, mediante la observación a tres sesiones de clase de la maestra y una entrevista semiestructurada. Los resultados de la investigación se centran en tres elementos: i) la tipología del conocimiento especializado de la maestra en relación al concepto de infinito, ii) el conjunto de errores conceptuales, de conexiones y de procedimientos matemáticos que posee el libro de texto y sobre los cuales la maestra no

[12] Modelo desarrollado por Rowland T. y otros, corresponde a una teoría que se compone de cuatro dimensiones Fundamentación, Transformación, Conexión y Contingencia es empleada para describir el conocimiento matemático del contenido del maestro durante la enseñanza de las Matemáticas en el aula. El marco conceptual que desarrolla este autor le permite analizar episodios de clase sobre todo en términos del Subject Matter Knowledge [SMK] y el *Pedagogical Content Knowledge* [PCK].

reflexiona y iii) los aspectos que permiten pensar en la necesidad de conocer a profundidad la matemática escolar, *"(…) no solo en términos de conocer "más", sino de conocer "mejor*"" (Montes, 2014, p. 341).

- *Pino-Fan, Godino, Font (2011). Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.* Luego de una revisión bibliográfica sobre: i) trabajos investigativos en el campo de la Didáctica sobre la noción de Derivada, ii) modelos del conocimiento del profesor de Matemáticas, en particular el modelo conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino, y iii) reconstrucción del significado epistémico global de la derivada, los autores, interesados por el conocimiento didáctico matemático que debe poseer el profesor de Matemáticas en relación con la enseñanza y aprendizaje de la derivada implementaron en 53 estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas un cuestionario centrado en 3 tipos de tareas, referentes a: *1) Conocimiento común del Contenido, 2)Conocimiento ampliado del contenido y 3)Conocimiento especializado del contenido.* Los resultados de la investigación aluden a las dificultades en relación con el conocimiento especializado y amplio de la derivada y una evidente desconexión entre las distintas representaciones de la derivada.

- *Mochón y Morales (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y como fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria.* Interesados por "diagnosticar" el *Conocimiento matemático para la enseñanza*[13] y el *Conocimiento pedagógico*[14] de un grupo de profesores de primaria y por proponer métodos que propicien su desarrollo, los autores realizaron i) la grabación de las clases de dichos profesores antes y después de que estos participaran en talleres, entrevistas, cuestionarios y tareas elaboradas por el equipo investigador, y ii) el registro en matrices de información de las observaciones y datos registrados. A partir de esto se reflexionó y describió el nivel de mejoramiento de cada profesor en relación al

[13]Este conocimiento es abordado desde tres dimensiones: conocimiento matemático especializado, conocimiento para la instrucción y Conocimiento de los estudiantes.
[14] Los autores reportan haber hecho uso de los en los tres niveles de Cooper para la descripción de este tipo de conocimiento.

conocimiento matemático para la enseñanza y el Conocimiento pedagógico antes y después de las actividades desarrolladas.

- *García-Oropeza (2009). Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas.* En esta tesis doctoral, la autora interesada en el profesor de Matemáticas que enseña cálculo a estudiantes de ciencias económicas en nivel universitario y la enseñanza basada en problemas [EBP] como estrategia didáctica en Matemáticas, se cuestionó por ¿Cuál es el conocimiento didáctico del contenido [CDC] de los profesores de Matemáticas para las carreras de ciencias económicas? Con este fin, centrándose el objeto matemático derivada y aludiendo a diferente literatura sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas, en particular el modelo de An, et al. (2004), la autora elaboró un conjunto de instrumentos que le permitió indagar, interpretar y reflexionar sobre: i) el *conocimiento del contenido matemático y económico* siendo este el mayor aporte de la investigación, ii) el *conocimiento sobre el aprendizaje*, iii) el *conocimiento sobre la enseñanza* y iv) el *conocimiento del currículo*, de este tipo de profesores.

  La investigación presenta dos tipos de conclusiones *metodológicas y didácticas.* En la primera se reflexionó sobre a la pertinencia de los diferentes métodos e instrumentos empleados, la segunda se centra en el CDC de los profesores participantes, el poco aprovechamiento de los problemas con contexto en el aula y el reconocimiento pero no tratamiento de las dificultades de los estudiantes respecto a los diferentes temas tratados en el curso.

Las investigaciones reportadas permitieron: i) visualizar el panorama investigativo en el campo, ii) reconocer el interés de los distintos investigadores por diagnosticar, analizar o categorizar el CPM en formación o en ejercicio, iii) identificar distintos *métodos* (fases o momentos para la recolección de información), *técnicas* (entrevistas semiestructuradas, observaciones de la práctica profesional, análisis documental), *instrumentos* (notas de campo, cuestionarios, pruebas escritas, grabaciones de audio y video) y *metodologías* (en su mayoría en un enfoque cualitativo de paradigma interpretativo) empleadas para la recolección y análisis de la información y iv) reconocer como una fase común en las distintas investigaciones la elaboración de uno o más instrumentos para la recolección de información que se fundamentan en la categorización planteada en un Modelo del Conocimiento del profesor de Matemáticas específico. Todo lo anterior contribuyó a generar ideas sobre las distintas decisiones tomadas para la realización de la investigación que se reporta en este documento.

2.2 ALGUNOS ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS DE LA RELACIÓN HM- EM

En este apartado se realiza una aproximación al estado del arte de la relación HM-EM, considerando algunas reconstrucciones hechas en: i) un documento desarrollado a propósito de un trabajo de grado de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, inscrito al grupo RE-MATE, ii) algunos artículos publicados e iii) informes de grupos de investigación.

En el primer caso, se recurre al documento realizado por Guacaneme y Gómez (2013) donde se describe un panorama de la actividad académica en el último quinquenio comprendido hasta la elaboración del documento, referida particularmente a eventos, libros y artículos que abordan tal relación. En el segundo caso, se retoman los contenidos presentados por *History and Pedagogy of Mathematics* [HPM] en especial al equipo TSG 25, quienes prepararon un *survey*, a propósito del ICME 13, cuyo objetivo fue establecer un panorama actual sobre el rol de la HM en la EM, tomando el periodo posterior al año 2000; en este, se plantearon cuestiones teóricas e investigaciones empíricas. Finalmente, se reportan los asuntos que se incluyeron en *History in Mathematics Education*: el estudio ICMI, editado por J. Fauvel y J. van-Maanen (Kluwer, 2000). Todo lo anterior para procurar la construcción de una síntesis en la cual se evidencien los principales focos de investigación en relación al tema de este apartado.

La consideración de la relación HM-EM ha tenido mayor acogida en las últimas décadas en las investigaciones internacionales. Ha sido tema de discusión en eventos de EM y se le han atribuido espacios en artículos y publicaciones de distintas revistas, tanto de EM como de Matemáticas. Se reconocen al menos siete (7) elementos claves en la relación HM-EM: i). HM en la enseñanza de las Matemáticas, ii) HM en su relación con la ciencia, la tecnología y el arte, iii). HM en su relación con la Cultura y las Matemáticas, iv) Cuestiones históricas, filosóficas y epistemológicas en la EM, v) Matemáticas en las culturas americanas, vi) Historia de la EM y vii) HM en su relación con la formación de profesores. Para ejemplificar estas líneas se muestran a continuación los elementos encontrados en los documentos revisados. No obstante, el énfasis de este apartado está en la revisión con mayor grado de profundidad de los antecedentes investigativos que se destacan de los elementos iii) y vii), en los cuales la relación HM-EM se encuentra determinada por cuestiones que están asociadas al interés investigativo de este trabajo.

En la ***Anexo 1*** se muestra de forma sintética y esquemática los asuntos reportados por las tres (3) fuentes citadas antes para cada uno de los elementos indicados [i) a vii)].

La revisión anterior, permitió identificar un panorama en la relación HM–EM, y los asuntos que han sido objeto de investigación en esta relación, mostrando que existe una tendencia actual en investigaciones interesadas, con mayor frecuencia, en tratar asuntos referidos al uso o la incorporación de la HM en la enseñanza, es decir en el grupo i), ya sea que la HM sea presentada como una alusión para motivar, una integración con el objeto de aprender Matemáticas o como una determinación para organizar el currículo. Los intereses referidos a los otros 6 asuntos no presentan las mismas frecuencias en lo reportado por las fuentes, aunque sí se han desarrollado investigaciones en torno a estos elementos. Por ejemplo, existe el interés por investigar cuestiones filosóficas, históricas y epistemológicas y sus efectos o relaciones sobre la EM.

La investigación ha orientado asuntos interesantes y relevantes en cada uno de los siete (7) grupos; sin embargo, se tomarán en cuenta aquellos que se refieren al CDC o a la FPM, como ya se mencionó, para esto es necesario ahondar en algunas de estas investigaciones que por medio de la clasificación hecha en la tabla anterior pertenecen a los enfoques: iii) HM con la Cultura y las Matemáticas y vii) HM en su relación con la formación de profesores. Con el propósito de identificar los focos de investigación particulares, que sirven como antecedentes para este trabajo.

A continuación, se relacionan los títulos de cinco (5) investigaciones y una breve descripción de los objetivos en cada una de ellas. Estas investigaciones pertenecen a los elementos organizados en la tabla, es decir son investigaciones que se reportan bien sea en el documento de Guacaneme y Gómez (2013), en el informe HPM o en el estudio ICMI.

- *Clark, (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers.* Con el fin de alcanzar una caracterización de lo que los futuros profesores de Matemáticas conocen sobre las Matemáticas escolares, los investigadores analizaron durante cuatro semestres un componente histórico en la formación de dichos profesores. En particular se trabajó la solución de ecuaciones cuadráticas, a partir del estudio de los métodos de Al-Khwarizmi. A partir de los resultados se discutieron importantes consideraciones para los programas de formación de profesores en relación con el conocimiento matemático y pedagógico y la capacidad de los futuros profesores para participar en una perspectiva histórica que les permitiera mejorar sus comprensiones sobre los objetos matemáticos.

- *Arboleda, Guacaneme y Torres, (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas.* El artículo trata en particular asuntos en torno a la relación HM–EPM (Educación del Profesor de Matemáticas) en el contexto colombiano. En el documento se argumenta que el conocimiento de la HM debe ser predominante en la formación de profesores, lo cual conlleva a sugerir una comunidad de práctica que desde la EM y la didáctica de la HM tenga como objeto asumir la investigación de dicha relación de forma dialéctica junto con su enseñanza.

- *Smestad, (2011). Teachers' conceptions of history of mathematics.* Mediante un estudio fenomenológico el autor se interesó en reconocer cuáles son las concepciones de cuatro docentes de Noruega, acerca de la HM y sus usos, teniendo en cuenta que este aspecto es un asunto relevante en el currículo de dicho país desde 1997. La investigación muestra las diferencias existentes entre las consideraciones sobre la HM que reportan los profesores y los objetivos de la inclusión de la HM en el currículo. Así mismo muestra diferentes opiniones de cómo incluir dicho componente en distintos cursos y en distintos grados, coinvirtiéndose en una investigación que aporta luces de cómo incluir el elemento histórico en el currículo y cómo involucrar a los profesores en este sentido.

- *Jankvist, et al. (2012). Mathematical knowledge for teaching in relation to history in mathematics education.* En el trabajo se describen dos experiencias de inclusión de la HM en la enseñanza. La primera de ellas referida a los números negativos; y la segunda los sistemas de numeración. Los autores propusieron dos posturas en relación al uso de la HM en la FPM, como herramienta y como fin, mostrando las implicaciones de la HM en el CPM, para analizar este aspecto tomaron como referente el modelo del MKT.

- *Goodwin, et al. (2014). Exploring the relationship between teachers' images of mathematics and their mathematics history knowledge.* Esta investigación tiene un componente cuantitativo ya que mide los desempeños de profesores de Matemáticas a quienes se aplicó una encuesta en relación con el conocimiento que poseen sobre la HM. Los resultados los relacionan con las creencias y concepciones de los profesores acerca de las Matemáticas concluyendo que quienes tuvieron mejores desempeños en el cuestionario tienden a creer que investigar es un componente importante en relación con conocer los hechos de las Matemáticas, así como la percepción de que las Matemáticas se encuentran en constante evolución y que estas permiten evidenciar multiculturalidad, mientras que aquellos quienes obtuvieron menores desempeños, asumen que las Matemáticas son una estructura inconexa de hechos normas y habilidades.

Con la revisión de estas investigaciones se asume que existen dos perspectivas en relación HM-EM particularmente para la FPM, estas son: i) Acciones y experimentos de enseñanza para PM en los cuales se ha utilizado la HM y ii) Análisis de creencias y concepciones de PM sobre las Matemáticas haciendo uso de la HM.

En relación con el primer foco, la HM se muestra como una herramienta en la enseñanza de objetos específicos de las Matemáticas, permitiendo escenarios estructurados en los salones de clase, es decir con un fin orientador. En el segundo foco se pone de manifiesto que el papel de la historia es importante en tanto afecta las concepciones de los profesores de Matemáticas.

2.3 ALGUNOS ANTECEDENTES REFERIDOS A LA TRIGONOMETRÍA Y LAS ET

La educación en Trigonometría es uno de los asuntos de investigación de la Educación Matemática al que poco se le ha prestado atención. La revisión de la literatura y algunas bases de datos (p. e., EBSCO, Dialnet, entre otras) bajo criterios como "educación + Trigonometría" o "Trigonometría" (p. e., *Figura 1* y *Figura 2*) muestran que no existe un conceso en las líneas de investigación referidas a este asunto y que los estudios publicados y en curso han centrado su interés en diversos focos de trabajo como: i) el diseño de materiales didácticos para la enseñanza de temas específicos de Trigonometría, con especial énfasis en el uso de las TIC, ii) estrategias de enseñanza y procesos de aprendizaje de la Trigonometría, iii) avances de tipo matemático relacionados con la Trigonometría (p. e., aplicaciones de identidades trigonométricas en otras ciencias, solución de problemas trigonométricos, análisis de propiedades de algunos objetos de la Trigonometría, etc.), y iv) comprensión del proceso de evaluación en el campo de la Trigonometría.

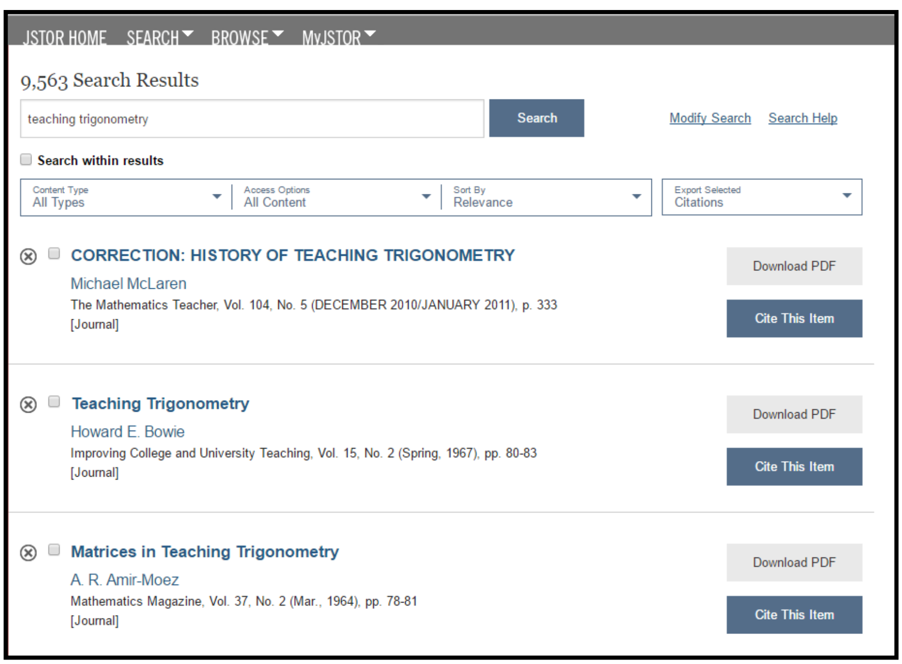


Figura 1. Ejemplo de búsqueda en la base de datos Jstor, "educación + Trigonometría"

Fuente propia.

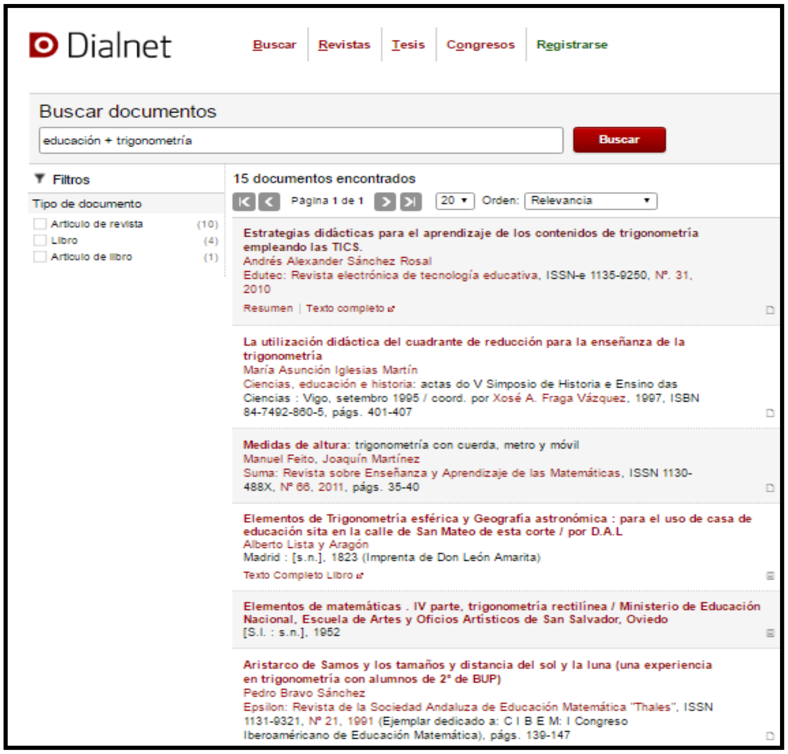


Figura 2. Ejemplo de búsqueda en la base de datos Dialnet, "educación + Trigonometría"

Fuente propia.

Al respecto, Dabiri (2003)[15] en su tesis doctoral manifiesta que la investigación en el campo de la Trigonometría se ha centrado en los impactos de los métodos de enseñanza, el rendimiento de los estudiantes en pruebas trigonométricas y el desarrollo de habilidades en este campo, relativas en la mayor parte de los casos a temas como la medición de regiones angulares en radianes, las razones, funciones e identidades trigonométricas, el círculo unitario y algunas situaciones problema específicas.

No obstante, el caso es más crítico si se piensa en el conocimiento del profesor de Matemáticas en esta área o en un contenido particular de la Trigonometría, como por ejemplo las ET, que son

[15] Research on trigonometry at the college and high school levels has focused on the relative impacts of methods of teaching trigonometry: right triangle (geometric in focus), unit-circle or wrapping function, transformational, and vector approaches to teaching trigonometry on students' achievement on trigonometric tests. The studies have all found that the different pedagogical approaches to teaching trigonometry do not produce significant differences in students' performance on tests that address trigonometry concepts and skills (Burch, 1981; Evanovich, 1974; Palmer, 1980; Huber, 1977). (p. 13 – 14).

dos de los objetos de esta investigación. Para el primer caso, el número de estudios es casi nulo. Así se evidencia, por ejemplo, en una revisión a la base de datos ERIC, en la que no aparecen reportes, conferencias, artículos de revistas, comunicaciones que aludan de forma específica al conocimiento matemático de la Trigonometría y del contenido pedagógico de los maestros de Matemáticas (Dabiri, 2003, p. 15). Incluso en el informe de preparación matemática de los maestros de Matemáticas de todos los niveles de la *Conference Board of the Mathematical Sciences* (CBMS) del 2001, apenas se cubría el tema de Trigonometría de forma breve. Lo anterior, además de constituir una razón que hace pertinente esta investigación llevó a realizar una búsqueda exhaustiva en relación con el tema y retomar algunos trabajos que brinden elementos para esta investigación, como los siguientes:

- *Dabiri, (2003). Preservice secondary school mathematics teacher´s knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* Partiendo de la premisa de que el conocimiento del profesor de Matemáticas es un elemento primordial para una enseñanza eficaz, el autor de esta tesis doctoral, realiza un estudio con el fin de evaluar el conocimiento del contenido y didáctico del contenido de los futuros profesores de Matemáticas de secundaria en el área de Trigonometría, con el fin de prever un panorama de su práctica. Los datos se recolectaron en dos fases, en la primera, se aplicó una prueba que medía el conocimiento de Trigonometría; se realizaron cuatro actividades, dos de clasificación de tarjetas y dos mapas conceptuales, a través de las cuales se evidenció el conocimiento didáctico del contenido con respecto a la Trigonometría de 14 futuros profesores de Matemáticas de secundaria que habían completado al menos dos cursos de métodos en la enseñanza de Matemáticas y un curso de práctica. Cinco estudios de casos sirvieron de base para la segunda fase del estudio, bajo el criterio de futuros profesores con alta y baja puntuación en el conocimiento del contenido.

  Cada participante del estudio de caso fue entrevistado dos veces con el fin de profundizar en los conocimientos trigonométricos y caracterizar su enseñanza en la práctica. Las respuestas a las entrevistas semiestructurdas fueron transcritas y analizadas usando métodos cualitativos de constante comparación y análisis de contenido.

> Las tarjetas de clasificación de las actividades y los mapas conceptuales, también fueron analizados utilizando métodos cualitativos. La prueba de conocimientos mediante puntuaciones cuantitativas. Los resultados indican que estos profesores de Matemáticas en formación no poseen una comprensión clara de asuntos como: medida de arco de ángulos, funciones trigonométricas inversas, funciones inversas, periodicidad y co-funciones. Además, la tarea de secuenciación reveló que estos profesores en el momento de planeación de las clases, muy rara vez tienen en cuenta las habilidades previas necesarias para la enseñanza. Cabe resaltar que, muchas de las puntuaciones en la prueba de conocimientos de Trigonometría estaban por debajo del nivel correcto, es decir, del 50%.
>
> Finalmente, el autor afirma que[16]: *"Los resultados encontrados se corresponden con los de investigaciones previas, en las que se concluye que el conocimiento de los futuros profesores en las diferentes áreas de la matemática escolar es débil y por debajo de lo que normalmente se espera".* (Dabiri, 2003, p. V).

En relación con el objetivo de la investigación a realizar, además de lo anterior, son dos los aportes que brinda este estudio: i) en los antecedentes de la tesis doctoral de Dabiri (2003) se especifica la relevancia que poseen algunos elementos vitales en el conocimiento del profesor de Matemáticas en formación como: los aspectos históricos de Trigonometría y la pedagogía de la Trigonometría en la escuela secundaria, la solución de ecuaciones trigonométricas de un carácter sencillo y el uso de uso de logaritmos; y ii) la pregunta 15 del cuestionario aplicado evaluó la capacidad de los participantes del estudio para resolver ET; su análisis concluye que son pocos los maestros que logran resolver las ET presentadas y entre las respuestas acertadas se evidencia la aplicación de siguientes conceptos trigonométricos: comportamiento de las seis funciones trigonométricas básicas en los cuadrantes, la periodicidad de las seis funciones

[16] These findings agree with prior research findings that preservice teachers' knowledge of many areas of school mathematics is weak and considerably below what is usually expected. The preservice teachers' concept maps of trigonometric ideas generally focused on either right triangles or notions of function. The sequencing task revealed that these preservice teachers seldom considered prerequisite skills in planning lessons. (Dabiri, 2003, p. V)

trigonométricas, ángulos co-terminales y el dominio positivos de las seis funciones trigonométricas.

- *Jácome y Montiel, (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor.* Los autores de este artículo reportan un análisis de una experiencia realizada con un grupo de 42 profesores del nivel medio superior en México que hacen parte del sistema de Telebachillerato y quienes trabajaron alrededor de un problema de cálculo de distancias inaccesibles. Estos profesores cuentan con un perfil en el área de Matemáticas y se hallaban en el contexto de un programa de actualización docente.

  Con el fin de identificar de ángulo y la distancia en los profesores y entender por qué se presenta este hecho, la experiencia se nutrió del análisis de dos fuentes de datos, la primera, los 42 reportes de solución a la situación-problema intencionalmente diseñada para hacer emerger el uso de la proporcionalidad o de la razón trigonométrica tangente (RTT). Cabe mencionar que, para resolver el problema, los profesores se organizaron en pequeños equipos de 3 o 4 integrantes y posteriormente entregaron un reporte individual.

  La segunda fuente de datos la constituyó el Programa de Estudios y algunos libros de texto, avalados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México, en donde se aborda el tema de las razones trigonométricas y que estaban vigentes en el periodo en que se llevó a cabo la experiencia docente. Para el análisis de esta fuente se realizó una revisión de la organización didáctica que proponen y el tipo de actividades que pide al estudiante, así como el contexto en el que las pide y el objetivo de hacerlas. En otras palabras, se buscó responder a preguntas como el qué hace y por qué hace, para entender los significados inmersos en las actividades didácticas a desarrollar.

  Así, teniendo en cuenta el marco conceptual que articula elementos cognitivos, didácticos y de construcción social del conocimiento trigonométrico, se realizó un análisis de los datos recolectados encontrando que: i) en el discurso trigonométrico escolar la semejanza resulta ser una condición inicial para la solución de este tipo de situaciones, ii) las construcciones geométricas son estrategias innecesarias, pues en la mayor parte de los casos la actividad matemática se concentra en la operación aritmética para la obtención de un valor faltante, que sumado a la falta de atención o reconocimiento de lo que es trigonométrico en la relación ángulo-lado de un triángulo se puede definir como el fenómeno de la aritmetización trigonométrica; iii) el significado de lo trigonométrico está en las razones trigonométricas, en la técnica para calcular un valor; y iv) se asume la razón trigonométrica, como herramienta, para la solución de situaciones – problemas como las planteadas, pero esto no asegura un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre estos, razón por la cual se debe centrar la atención en la práctica que demanda modelar una realidad con los elementos trigonométricos.

Por último, los autores concluyen que

> (…) no podemos declarar que el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que **hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer**: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para obtener un valor; **porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica**. (Jácome y Montiel, 2014, p. 1214) [Negrita propia]

Lo resaltado en la conclusión, evidencia que el significado trigonométrico, por ejemplo, de las ET, es un asunto inherente al quehacer del maestro de Matemáticas y por tanto es un factor determinante en sus intencionalidades didácticas y prácticas de enseñanza relacionadas con el tema.

- *Montiel (2005). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* La autora de esta tesis de doctorado centró su atención en un fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica. Para lograr el objetivo, primero realizó una revisión documental con el fin de reseñar investigaciones relacionadas con el tema en cuestión. Así, reportó estudios de naturaleza cognitiva, didáctica y epistemológica que abordan el concepto de función en general y luego demostró que sólo las primeras investigaciones de corte socio-epistemológico son las que dan un tratamiento a la función trigonométrica. Además, se caracterizaron algunos fenómenos didácticos ligados a la construcción de la idea de función trigonométrica; entre ellos se analiza de forma crítica los programas de estudio de nivel medio superior, los libros de texto y las concepciones de los estudiantes y el respectivo tratamiento algebraico que se da a este tema.

Posterior a ello, se presentó una secuencia de momentos histórico – epistemológicos que describen el surgimiento de la función trigonométrica hasta su constitución en series. Allí, se destaca las prácticas de referencia y las prácticas sociales asociadas a la constitución de la función trigonométrica, como elementos de construcción social que aporta este trabajo, pues: *"(…) la aproximación socio-epistemológica y a través de sus resultados teóricos y evidencia empírica, busca construir el discurso matemático escolar con base en la construcción social del conocimiento matemático."* (Montiel, 2005, p. 21).

Esto último, permitió la construcción de un conjunto de reflexiones acerca de cómo hacer una construcción social de la función trigonométrica y sus aportes al discurso matemático escolar. En este sentido, la autora propone la incorporación de una práctica social en el aula; en otras palabras, la construcción de la función trigonométrica en escenarios que articulen la actividad del estudiante con prácticas de referencia específicas y realistas reguladas por tres prácticas sociales o momentos, como se presenta en la *Figura 3*.

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estacionario – Analítico
Objeto Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\,\theta$ θ ángulo (grados) $sen\,\theta$ longitud	$sen\,x$ x tiempo (radian-real) $sen\,x$ distancia	$sen\,t$ t tiempo (real) $sen\,t$ temperatura

Figura 3. Principios básicos para la construcción Social de la Función Trigonométrica

Fuente: Montiel (2005, p. 115).

Cabe resaltar, que del registro histórico resultan los momentos descritos en la propuesta, el de *anticipación,* que está asociado a la matematización de la astronomía antes del surgimiento del álgebra como lenguaje simbólico; el de *predicción* o matematización de la física o del movimiento y cambio y surge con los trabajos de Euler; y el de *formalización*, o matematización de la transferencia de calor, que surge como práctica de los siglos XVIII y XIX, que contempla la consolidación de la teoría analítica de las funciones.

Por último, algunas conclusiones reportadas en el estudio son: i) la secuencia temática Trigonometría, círculo trigonométrico y función trigonométrica domina las propuestas o innovaciones de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos, ii) la forma de abordar en la escuela la función trigonométrica corresponde a una extensión de las razones y la única explicación de la unidad de medida radica en la equivalencia entre los grados y radianes en el círculo trigonométrico, perdiéndose el vínculo con algunas prácticas de referencia como el estudio del movimiento circular propio de la física; iii) la dimensión social incorporada por el estudio afectó los componentes cognitivo, didáctico y epistemológica de la enseñanza y aprendizaje de la función trigonométrica modificando su relación sistémica para explicar los fenómenos de sus construcción en escenarios escolares; iv) no hay recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo: triángulo rectángulo a círculo trigonométrico a función trigonométrica; y iv)

> (…) el tratamiento escolar tradicional que hay en el nivel Medio Superior del concepto de Función Trigonométrica es una extensión de la Trigonometría Clásica, que encuentra en el círculo trigonométrico y explicación necesaria y suficiente para dejar claro: el dominio de la función en todos los reales, el significado de ángulo negativo, la conversión de la unidad de medida: grados-radianes, la equivalencia entre reales y radianes, la periodicidad y el acotamiento de la función. (Montiel, 2005, p. 54 – 55)

El estudio presentado, es un punto de referencia para esta investigación en tanto: i) proporciona un abordaje histórico de la Trigonometría que sirve de insumo para indagar por el surgimiento y tratamiento de las ET; argumenta con hechos la forma clásica en la que se tratan algunos conceptos trigonométricos en el aula, como la función trigonométrica, las unidades de medida de ángulos (grados y radianes), entre otros; este panorama no es ajeno a lo que sucede con las ET; y iii) justifica con la misma propuesta de la prácticas sociales de la función trigonométrica como la HM proporciona elementos al maestros para tratar las matemáticas escolares.

En relación con el segundo asunto polémico, las ET, desde la perspectiva didáctica y del CPM, no existe hallazgo alguno. Así lo afirman Araya y Parraguez (2014) cuando mencionan que

> (…) revisamos investigaciones en Matemática Educativa para detectar qué se ha hecho en relación a nuestro objeto de estudio [ET]. En la mayoría de ellas no encontramos indicios sobre estudios en ecuaciones trigonométricas propiamente tales, aunque sí existen estudios de la Trigonometría en general y de las funciones trigonométricas en particular. (p. 58).

Así, se retoman los siguientes trabajos que brindan algunos elementos en relación con uno de los objetos de esta investigación.

- *Araya y Parraguez (2014). Construcciones y mecanismos mentales asociados a las ecuaciones trigonométricas del tipo $ab = 0$.* En este reporte de investigación, los autores presentan las construcciones y mecanismos mentales asociados a la solución de ET de ángulos simples y del tipo $ab = 0$ usando la propiedad Hankeliana que dice que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. A partir de un análisis cognitivo basado en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) de Dubinsky (1996), se modeló el cómo los estudiantes de secundaria construyen y aprenden el concepto solución este tipo de ET y se buscó responder a dos preguntas: ¿Qué conexiones realizan los estudiantes en la aplicación de la propiedad hankeliana para resolver ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo $ab = 0$? y ¿Entre qué matemática o conceptos matemáticos transitan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo $ab = 0$, aplicando la propiedad hankeliana?

La metodología de estudio se realizó en tres ciclos. El primero, de análisis teórico o descomposición genética, que consistió en entender los fundamentos conceptuales sobre que es comprender el concepto de ET con la condición $ab = 0$, con el fin de determinar un camino viable en la construcción del concepto, modelando la epistemología y la cognición de éste. La segunda fase o de diseño y aplicación de instrumentos de dos tipos: un cuestionario diagnóstico de cuatro preguntas que se aplicó a la totalidad de participantes del estudio, 8 estudiantes voluntarios, asistentes al curso Funciones y Procesos Infinitos de un establecimiento de la comuna de Ovalle y que se encontraban en el cuarto año de enseñanza media. El instrumento tenía como objetivo de determinar los conocimientos previos en relación con el concepto a partir de las respuestas dadas a este instrumento. Se seleccionaron de forma aleatoria 6 estudiantes a los cuales se les aplico una entrevista semiestructurada para indagar de manera profunda algunos aspectos hallados en las respuestas al cuestionario.

En el último ciclo o de análisis y verificación de datos, se compararón las respuestas de los estudiantes con el fin de detectar qué comprendieron del concepto y qué no, este análisis buscó encontrar la explicación al porqué de las diferencias en estos estudiantes en términos de construcciones de acciones, procesos y objetos. Este análisis se realiza descomponiendo en esquemas las respuestas de los estudiantes y explicitando las relaciones de generalización, encapsulación, des-encapsulación y coordinación del objeto y procesos en cuestión.

De la experiencia se concluye que los conceptos que surgen o se deben potenciar alrededor del objeto cognitivo son: cuerpo de los números reales, propiedad hankeliana de los reales, resolución de ecuaciones del tipo ab=0, funciones trigonométricas, noción de ET del tipo $ab = 0$, raíces de las funciones trigonométricas en intervalo $[0, 2\pi]$ y conjunto solución de la ET de ángulos simples del tipo ab=0. Además, las evidencias muestran que los estudiantes necesitan transitar por las funciones trigonométricas para resolver las ET. Al no verificar antes de explicitar el conjunto solución, algunos estudiantes olvidan descartar las soluciones que no verifican la igualdad y que están incluidas en la solución general, y

> (…) un estudiante para esta concepción es capaz de generalizar las ecuaciones de la forma *ab* = 0 y la propiedad hankeliana a ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo *ab* = 0; pero al intentar coordinar los procesos funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas de ángulos simples del tipo ab=0, presenta dificultades tales como: transformación de grados a radianes, determinación de alguna solución particular de una ecuación trigonométrica y reflexión en el error cuando se verifica una solución particular. (Araya y Parraguez, 2014, p. 76)

Este trabajo muestra la necesidad de que los maestros de Matemáticas al momento de enseñar ET, tengan en cuenta elementos como el domino, la naturaleza de la solución y de la incógnita (la medida del ángulo en grados o radianes), los procesos matemáticos asociados y dar mayor importancia en términos de los autores al estudio de las funciones trigonométricas inversas, incluso cuando haya un trabajo con calculadora.

En conclusión, como se ha mostrado a lo largo de los artículos reseñados, el estudio del conocimiento del profesor sobre las ET es un asunto pertinente por el poco abordaje que se ha hecho desde la investigación en EM.

3. MARCO REFERENCIAL

La información expuesta en este capítulo se registra con el fin de aludir a dos fines: i) generar un referente documental sobre las ET en la HM y en el contexto educativo nacional y ii) ser el referente teórico para la elaboración de las unidades de análisis y las sesiones de intervención. Para ello, en el primer apartado se presenta una revisión histórica que llevó a la consolidación de algunos momentos de la HM, en los cuales se identificaron usos, métodos y contextos de solución de las ET. En el segundo apartado se precisan los modelos del CPM reportados por Shulman y Grossman (1986), Ball, et al (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Pinto (2010), entre otros. Finalmente, se presenta un apartado cuyo objeto es describir la evolución de la Trigonometría y en particular de las ET en el currículo escolar colombiano.

3.1 LAS ET EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

En este apartado, se describen algunos momentos registrados en la HM que se relacionan con las ET; para cada uno se presenta el contexto histórico – cultural, el procedimiento utilizado para su solución y sus principales usos. Estos momentos se ubican cronológicamente, presentando la(s) cultura(s) involucrada(s) o algunos personajes que aportaron al desarrollo de la Trigonometría centrado en el tema de interés, las ET. Cabe resaltar que, muchas de las fuentes documentales consultadas ponen, sin duda, en evidencia que los avances de tipo matemático referidos a la Trigonometría obedecen a diferentes necesidades sociales, económicas y culturales de los pueblos y las civilizaciones que han existido a lo largo de los años.

En este sentido, primero se retoma la obra de Ptolomeo en la cultura griega, luego se hace alusión a los trabajos de Al-Kashi y Ulugh-Beg en la cultura árabe, algunos escritos generados por matemáticos indios, los aportes del persa Omar Jayam y las obras de François Viète en el periodo de la Europa Renacentista. Además, se incluyen los trabajos realizados por el profesor estadounidense William Chauvenet y el Ingeniero y Arquitecto Mexicano Manuel Torres Torija.

A continuación se describen un conjunto de trabajos referidos a las ET e interpretados según la por los autores de esta investigación:

3.1.1 EL APORTE DE CLAUDIO PTOLOMEO: CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE CUERDAS

Sobre el año 332 a.C., Egipto recibió al griego Alejandro Magno como su nuevo gobernante, esto, luego de que venciera al rey persa Darío III quien hasta el momento dominaba esta región. Los habitantes de Egipto en su mayoría griegos, recibieron a Alejandro, como su libertador, el hombre que daba fin al sometimiento persa. Alejandro fue coronado Faraón y hacia el año 330 a.C. cerca del delta del Nilo, fundó la ciudad de Alejandría.

Alejandría, una ciudad estratégicamente ubicada, se convirtió en la cuna de la cultura griega, con la financiación de la dinastía Ptolomeos. Allí se construyó el museo de Alejandría, un lugar para el arte y la ciencia, en el cual los sabios de la época estudiaban, investigaban y trasmitían sus saberes. A personajes como Euclides, Hiparco de Nicea, Aristarco de Samos, Eratóstenes, Apolonio y Claudio Ptolomeo, que hacían parte del grupo de sabios del museo de Alejandría, se les atribuye el gran avance que tuvo para dicha época la Astronomía, Geografía, Astrología, Geometría y las Matemáticas. Parte de los estudios de estos sabios respondían a necesidades propias del pueblo griego, como la construcción de calendarios, que les permitía predecir el clima en diferentes épocas del año, los primeros mapas que facilitaban el trabajo de los navegadores, la elaboración de fórmulas y métodos matemáticos para calcular áreas; esto último en tanto que anualmente se producían inundaciones y con ello se perdían los límites de los terrenos.

Algunos de los trabajos desarrollados por este grupo de sabios, basaron sus resultados en el uso y estudio de la Trigonometría. Tal es el caso del trabajo desarrollado por *Claudio Ptolomeo* (85-165 d.C.), matemático y astrónomo griego precursor del trabajo de Hiparco de Nicea.

En el campo de la Geografía, Ptolomeo desarrolló un sistema para construir mapas y elaborar globos terráqueos inspirándose en la obra de Eratóstenes, resultados que reunió en su texto *la Geografía* que fueron de gran uso por marinos y viajeros en general. Además, a este matemático se atribuye la idea de usar meridianos, paralelos, latitudes y longitudes en la ubicación de lugares sobre la Tierra.

Por otro lado, en el campo de la Astronomía Ptolomeo escribió *El Almagesto*[17], un modelo matemático del comportamiento de los astros celestes; en este escrito se encuentra una tabla de cuerdas útil para la resolución de triángulos en cálculos astronómicos, la cual, desde una interpretación actual, se asemeja a una tabla de senos (Martín, 2010). Particularmente, el trabajo de Ptolomeo se basó en la Trigonometría, como lo expone Brotton (2014):

> (…) Ptolomeo catalogó 1.022 estrellas ordenadas en 48 constelaciones; explicó cómo hacer un globo celeste y utilizó la Trigonometría (y especialmente las cuerdas) para entender y predecir con exactitud los eclipses, la declinación solar y desde lo que desde una perspectiva geocéntrica parecía ser el movimiento irregular o retrógrado de los planetas y estrellas. (p. 16)

La tabla de cuerdas (*Figura 4*) consistía en un registro de las longitudes de cuerdas subtendidas por arcos de (½)º desde 0º hasta 180º, en una circunferencia de 360 partes cuyo diámetro estaba dividido en 120 partes (Dorse, 2006 citado por Mateus, 2013). El método empleado por Ptolomeo, que otorga luces a esta investigación sobre una forma geométrica para hallar la solución a la ET $sin(\theta) = x$, siendo x el valor desconocido y θ dado, se basó en la inscripción de polígonos regulares en un círculo, a partir de ello determinó la longitud de ciertas cuerdas reduciendo los polígonos a triángulos rectángulos y empleando algunas identidades trigonométricas establecidas en su mayoría por Euclides.

[17] Tratado teórico de astronomía, del siglo II D.C. que se encuentra dividido en trece libros. En este documento Ptolomeo utiliza un modelo geocéntrico en el cual la Tierra, es esférica y estacionaria, para Ptolomeo, el universo esférico realiza una revolución diaria en torno a la Tierra girando de Este a Oeste. Una descripción detallada de este documento en español, se puede ver en https://es.wikisource.org/wiki/Almagesto o Ptolemy's Table of Chords Trigonometry in the Second Century en http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#equivalence

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Figura 4. Apartado de la tabla de cuerdas de Ptolomeo

Fuente: Montiel (2005)

La construcción geométrica y valor para algunas de las cuerdas se muestran a continuación:

Para la cuerda de 36º o *crd*(36º), Se construye un semicírculo *ABG* con centro en *D* y diámetro *AG* (*Figura 5*) dividido en 120 partes. Luego, se traza el segmento *DB* perpendicular al diámetro por el punto *D* y se halla el punto medio *E* del segmento *DG*. Enseguida, se traza el segmento *EB*, posteriormente se ubica el punto *Z*, tal que el segmento *EZ* sea congruente al segmento *EB*.

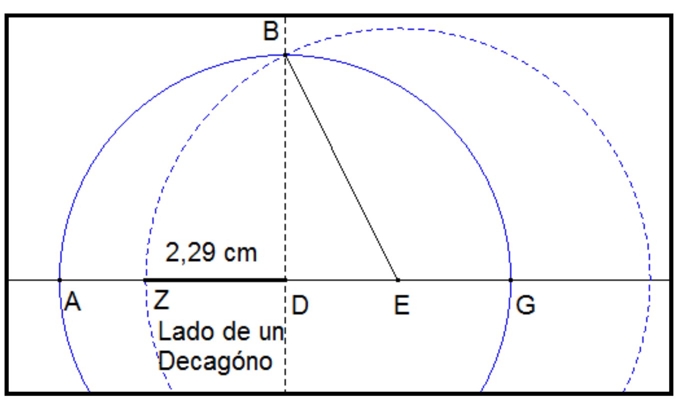


Figura 5. Construcción geométrica para la *crd*(36º)

Fuente propia.

Por último, se construye el segmento *ZD* que corresponde al lado de un decágono regular, como se puede comprobar en una construcción similar hecha en el Software *Cabri*:

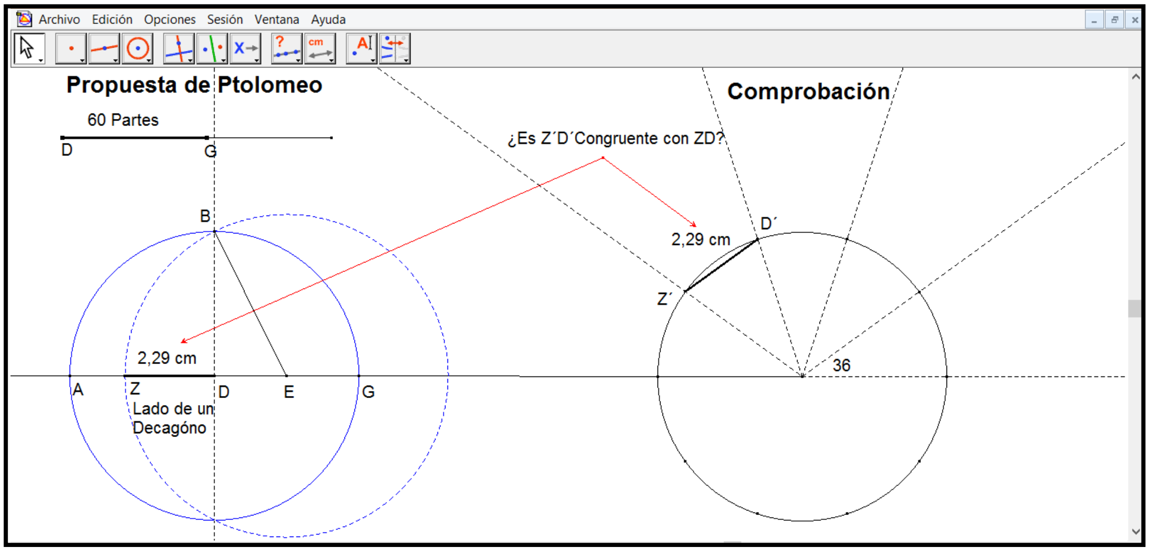


Figura 6. Comprobación de construcción de Ptolomeo para la *crd*(36º) y el valor del lado de un decágono regular.

Fuente propia.

De la construcción descrita antes, se tienen los siguientes datos:

- AG es un diámetro de la circunferencia con centro en D dividido en 120 partes
- DG y DB son radios de la circunferencia con centro D
- DG y DB miden 60 partes[18] por ser radios de la circunferencia con centro D
- E es el punto medio de DG
- BE es congruente con EZ por construcción

Ahora, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ΔDEB se obtiene que:

[18] Al trabajar con esta división del radio, Ptolomeo evita el cálculo de valores con fraccionarios, pues a la época era dispendioso este trabajo numérico (Martín, 1942). Otra razón de esta división, obedece a la influencia babilónica del sistema sexagesimal.

$DE^2 + DB^2 = BE^2$ como BE = EZ

$DE^2 + DB^2 = EZ^2$ como E es punto medio entonces DE mide 30 partes

$$(30\,partes)^2 + (60\,partes)^2 = EZ^2$$

$$4500\,partes = EZ^2$$

$$67{,}082\,partes = EZ$$

Pero, como: *ZD* = *EZ* – *DE* entonces

$$ZD = 67{,}082\,partes - 30\,partes = 37{,}08203932\,partes$$

Por tanto, la longitud de esta cuerda que corresponde a la longitud del lado de un decágono regular que subtiende un ángulo de 36° se puede expresar como: *crd*(36°) = 37,08203932, que en la notación de Ptolomeo es *crd*(36°) = 37;4,5 lo cual significa que la cuerda de 36º es equivalente a 37 unidades sexagesimales del radio + 4/60 + 55/3600.

De manera similar, el lado BZ corresponde al lado de un pentágono regular como se muestra en la siguiente figura:

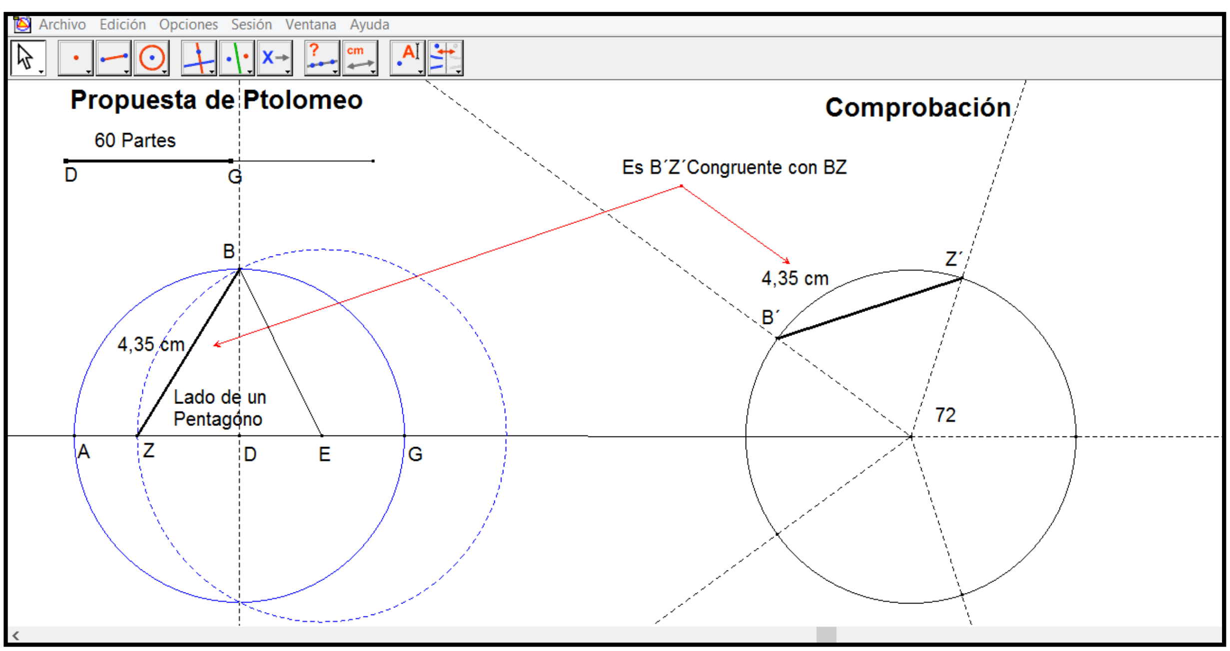


Figura 7. Comprobación de construcción de Ptolomeo para la *crd*(72º) y el valor del lado de un pentágono regular.

Fuente propia.

Este lado, se corresponde con la cuerda subtendida por el arco de ángulo 72º Así, aplicando Teorema de Pitágoras al triángulo ΔZDB (*Figura 8*) se obtiene que:

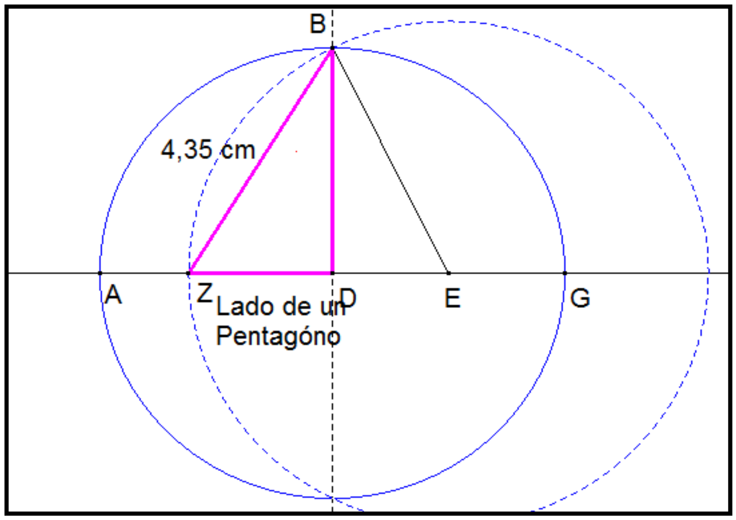


Figura 8. Construcción geométrica para la *crd*(72º).

Fuente propia.

$$BZ^{\,2} = ZD^{\,2} + DB^{\,2}$$

como $ZD = 37{,}08203932\ partes$

$$BZ^{\,2} = (37{,}08203932\ partes)^{\,2} + (60\ partes)^{\,2}$$

$$BZ^{\,2} = 4975{,}07764\ partes$$

$$BZ = 70{,}53423027\ partes$$

Entonces, la $\mathrm{crd}(72°) = BZ =$70,53423027 $partes$ o aproximadamente 70; 32, 3

El cálculo del valor de la *crd*(90°), se basó en la inscripción de un cuadrado en un círculo de radio 60 partes. Para ello, se construye el círculo con centro en *D* y diámetro *AC* (*Figura 9*) dividido en 120 partes. Luego, se inscribe el cuadrado ABCE y se trazan sus diagonales, es decir, los segmentos AC y BE, los cuales se intersecan formando ángulos de 90º.

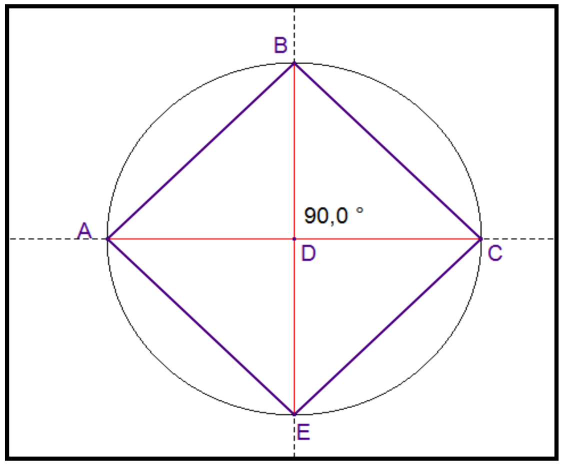


Figura 9. Construcción geométrica para la *crd*(90º)

Fuente propia.

El valor del lado BC corresponde al valor de la cuerda subtendida por el arco de ángulo de 90º. Así, aplicando Teorema de Pitágoras al triángulo ΔDBC se obtiene que,

$$BC^2 = DB^2 + DC^2$$

como DB = DC = 60 partes por ser radios de la circunferencia:

$$BC^2 = 2DB^2 = 2(60\, partes)^2$$
$$BC^2 = 7200\, partes$$
$$BC = 84{,}85281374\, partes$$

De esto se concluye que la *crd*(90°) = $84{,}85281374\, partes$ o aproximadamente 84; 51, 10. Para la *crd*(60°) el valor correspondiente es 60 $partes$, esto por ser un radio de la circunferencia.

No obstante, Ptolomeo, para continuar con los cálculos, hizo uso de uno de sus teoremas relacionados con el suplemento de cuerdas, que decía: *el cuadrado de una cuerda más el cuadrado de su suplemento equivale al cuadrado del diámetro*, con este calculó otros valores de cuerdas, por ejemplo para la *crd*(120°) cuyo suplemento es la *crd*(60º) se tiene que:

$$[crd\ (60°)]^2 + [crd\ (120°)]^2 = [120\ partes]^2$$

$$[60\ partes]^2 + crd\ (120°)^2 = [120\ partes]^2$$

$$crd\ (120°)^2 = [120\ partes]^2 - [60\ partes]^2$$

$$crd\ (120°)^2 = 10800 \text{ partes}$$

$$crd\ (120°) = 103{,}9230485 \text{ partes o } 103;\ 55,\ 22$$

Conocidas las longitudes de cuerdas de 36º, 72º, 90º, 60º sus respectivos suplementos y con teoremas[19] geométricos sobre adición, sustracción y división de cuerdas, Ptolomeo establece el valor para cuerdas de arcos que subtienden ángulos de 30°, 15°, 7.5°, 45°, 144°, entre otros. Sin embargo, para el caso de la *crd* (1°), pone en juego un nuevo elemento al proceso desarrollado, en tanto ninguno de sus teoremas le permite llegar a este cálculo, pues hallar el valor de esta cuerda le implicaba la necesidad de solucionar ecuaciones cúbicas. Así, por un método de proporción logra estimar a dos sexagesimales correctos que *crd* (1°) = 1,04722 o 1; 02, 50, advirtiendo que el procedimiento no es exacto por no ser la proporción entre cuerdas igual a la proporción entre arcos, pero admitiendo la pequeñez del error cometido (Ausejo, 1983; Martín, 2003).

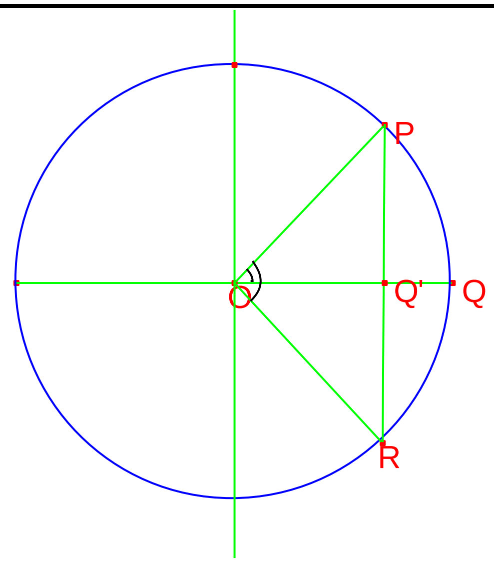
En resumen, Ptolomeo busca resolver la ecuación $crd(\alpha) = x$, donde α es un ángulo conocido entre 0º y 180º, en intervalos de (½)º y x un valor desconocido, mediante un método geométrico. Así, al analizar esta ecuación y la expresión matemática $sin(\theta)$ se encuentra una relación con lo que hoy se conoce como una ET, como se evidencia en la siguiente mostración:

CONDICIONES GEOMÉTRICAS

Figura 10. Datos para la mostración de la relación entre ET y la expresión de Ptolomeo

Fuente propia.

[19] El estudio de Ptolomeo establece Teoremas para cuerdas medias, y suma y diferencia de dos cuerdas, que se corresponden con los teoremas de suma, resta y ángulo medio en Trigonometría.



1. Círculo unitario con centro O y r dividido en 60 partes
2. Sea α el ángulo central de la cuerda PR
3. $\overrightarrow{OQ'}$ bisectriz del $\measuredangle POR$
4. $\overleftrightarrow{OQ}'$ mediatriz del $\overline{PR}$
5. PQ´= Q´R
6. $\measuredangle QOP = \frac{1}{2}\alpha$
7. $Q'P = rsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

De los datos dados, como $Q'P = rsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y $PR = Q'P + Q'R$ por la condición 5 se obtiene que $PR = 2rsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Además, $crd(\alpha) = PR$ por lo que se puede concluir que $crd(\alpha) = PR$ y $crd(\alpha) = 2rsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Como el radio de la circunferencia está dividido en 60 partes entonces la expresión dada queda $crd(\alpha) = 2(60)sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 120sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ que genera la ET:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{crd(\alpha)}{120}$$

Ahora, si se toma $\alpha = 2\theta$ y se sustituye este hecho en la expresión anterior, se obtiene la siguiente ET que implícitamente resuelve Ptolomeo en sus planteamientos:

$$sin(\theta) = \frac{crd(2\theta)}{120}$$

Al hacer uso de la tabla de cuerdas de Ptolomeo, con la relación $\frac{crd(2\theta)}{120}$ para $0° < \theta < 90°$, es posible resolver cualquier ET de la forma $sin(\theta) = x$,[20] retomando los ejemplos presentados en párrafos anteriores se puede comprobar esta ET:

[20] Es importante aclarar que esta ET, es resultado de una interpretación hecha por los investigadores, para efectos de este estudio, de las diferentes fuentes de consulta revisadas sobre el tema. Además, la ET no necesariamente se presenta de forma explícita en el planteamiento original de Ptolomeo.

Tabla 1. Ejemplos de la equivalencia entre relación resultante de Ptolomeo y $sen(\theta)$

α	crd(α)	θ = α/2	Valor en una actual tabla de senos[21]:	Valor obtenido con la relación resultante de Ptolomeo: $\frac{\boldsymbol{crd(2\theta)}}{\mathbf{120}}$
36º	37,08203932	18º	0,309016994	$\frac{crd(2*18°)}{120} = \frac{crd(36°)}{120} = \frac{37{,}08203932}{120} = 0{,}309016994$
72º	70,53423027	36º	0,587785252	$\frac{crd(72°)}{120} = \frac{70{,}53423027}{120} = 0{,}587785252$
90º	84,85281374	45º	0,707106781	$\frac{crd(90°)}{120} = \frac{84{,}85281374}{120} = 0{,}707106781$
60º	60	30º	0,5	$\frac{crd(60°)}{120} = \frac{60}{120} = 0{,}5$
120º	103,9230485	60º	0,866025403	$\frac{crd(120°)}{120} = \frac{103{,}9230485}{120} = 0{,}866025403$

3.1.2 EL PROBLEMA DE LA EXACTITUD EN LA CULTURA ÁRABE

Los árabes fueron una cultura que habitó principalmente en el Próximo Oriente y África del norte, originarios de la Península Arábiga, para quienes, según lo reportan algunas fuentes documentales (Mora, 2001; Villuendas, 1979; Usón & Ramírez, 2002; Ruíz, 2002), el interés en la astronomía los llevó a hacer diversos aportes a la Trigonometría. Algunas de las prácticas en las que los árabes usaron ese campo de las Matemáticas se relacionan con el cálculo de distancias astronómicas, la elaboración de mapas celestes como mecanismo para el diseño de rutas marítimas y la resolución de triángulos esféricos para conocer la dirección de la Meca.

No obstante, estas prácticas exigían el uso de otras herramientas Matemáticas, como por ejemplo de las tablas trigonométricas de Ptolomeo y la tabla de senos de los ángulos comprendidos entre 3° y 90° elaborada por el hindú Aryhabatiya (Malet & Paradasí, 1984). De ahí que en Arabia se conocieran dos tipos de Trigonometría; una, *la geometría de las cuerdas griegas* referidas al Almagesto y la otra basada en las *tablas del seno de los hindúes* que aparecen en el Sindhind[22];

[21] Los valores presentados se hallaron mediante una calculadora.

[22] Se reconocen dos versiones de este tratado astronómico, una la obra mejorada de al-Khwārizmī y la otra hindú, es un documento que contiene tablas con calendarios, cálculos reales sobre las posiciones del Sol, la Luna y los

esta última con mayor acogida por los árabes, ya que la mayor parte de sus avances en Trigonometría se basaron en la función seno (Mora, 2001). En esta obra se reconoce el trabajo realizado por el matemático hindú Aryhabatiya (489-499) quien proporciona la tabla de valores del seno de ángulos comprendidos entre 3°45' y 90°, variando en ¼ de cuadrante (3°45'), o lo que es equivalente a ángulos entre 3,775° y 90° con valores calculados cada 3,75°.

Al asumir el trabajo realizado por otros pueblos en su intento por mejorar la precisión en los cálculos, los árabes obtuvieron grandes avancen en el campo de la Trigonometría. Por destacar algunos trabajos se puede aludir por ejemplo a Abul Wefa (940-998) quien calculó la medida del seno de un ángulo de 30', es decir de 0,5°, con este resultado y el uso de los corolarios que ya conocía de antemano desarrollados por Ptolomeo, obtiene la tabla de senos que va de 15' en 15', en otras palabras una tabla de senos que va de cuarto de grado en cuarto de grado. Posteriormente, otro árabe quien se disputa con Abul- Wefa la invención del teorema del seno, Nasir al Din Tusi (1201-1274) desliga la Trigonometría de la Astronomía.

Sin embargo, no solo Abul Wefa asumió la tarea de dar precisión y mejorar las tablas astronómicas. Junto a él se pueden mencionar algunos otros árabes que contribuyeron en este perfeccionamiento como al Hasib, al Biruni, al Kashi y Ulugh-Beg, este último ocupaba un lugar político importante además de dedicar sus recursos a los estudios de la Astronomía (Springer, 2007).

En el libro *Els Origens I L'Ensenyanment De L'Algebra Simbólica*, en el apartado *La Trigonometría. Una Motivació per al Desenvolupament de l'Àlgebra* (Malet & Paradasí, 1984), se presentan referencias acerca del trabajo realizado por los árabes, con el cual dan solución a múltiples problemas relacionados con la Astronomía. Se exhibe por ejemplo como calcular el valor de $sen(1°)$ usando identidades trigonométricas y procesos algebraicos. Allí aparecen algunas ET y el método utilizado para su solución.

---

planetas, tablas de senos y tangentes, elementos de astronomía esférica, así como información sobre eclipses y visibilidad de la Luna.

Este método, consiste en hallar, a través de la aplicación de la identidad de diferencia de ángulos, el valor del [23]$sin(3°)$, para luego, con este resultado hallar el $sin(1°)$. Aquí se muestran dos soluciones a este problema, abordadas por al-Kashi y Ulugh-Beg. Los trabajos comparten el mismo punto de partida, resolver la ecuación $sin(3°) = 3x - 4x^3$, donde $x = sin(1°)$ usando métodos numéricos. Cabe resaltar que, los árabes no abordaron fácilmente el problema de solución a ecuaciones cubicas pues no contaban con las herramientas de solución que años más tarde proponen Cardano y Tartaglia.

Antes de exponer en detalle los métodos, incluimos una reconstrucción de la ecuación que parecía ser tan trivial para estos matemáticos. Esta se realiza teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas de Ptolomeo para suma y diferencia de ángulos. Así, como los árabes conocían $sin(3°)$, pero no $sin(1°)$, partieron de:

$$sin(3°) = sin(2° + 1°)$$

$$\sin(3°) = \sin(2°)\cos(1°) + \sin(1°)\cos(2°)$$

$$\sin(3°) = \sin(1° + 1°)\cos(1°) + \sin(1°)\cos(1° + 1°)$$

$$\sin(3°) = [\sin(1°)\cos(1°) + \sin(1°)\cos(1°)]\cos(1°) + \sin(1°)[\cos(1°)\cos(1°) - \sin(1°)\sin(1°)]$$

$$\sin(3°) = 2\sin(1°)\cos^2(1°) + \sin(1°)\cos^2(1°) - \sin^3(1°)$$

Aplicando la identidad pitagórica fundamental $\sin^2(1°) + \cos^2(1°) = 1$, también conocida por los árabes, como $\cos^2(1°) = 1 - \sin^2(1°)$, en la expresión resulta:

$$\sin(3°) = 2\sin(1°)[1 - \sin^2(1°)] + \sin(1°)[1 - \sin^2(1°)] - \sin^3 1°$$

$$\sin(3°) = 2\sin(1°) - 2\sin^3(1°) + \sin(1°) - \sin^3(1°) - \sin^3(1°)$$

Así, al sustituir $\sin(1°) = x$ y reducir los términos semejantes, se obtiene:

$$\sin(3°) = 2x - 2x^3 + x - x^3 - x^3$$

[23] En el Anexo 12 se presenta una reconstrucción del cálculo de sin3°, utilizando identidades y métodos algebraicos.

$$\sin(3°) = 3x - 4x^3$$

Razón por la cual su interés estaba en resolver esta ecuación cúbica.

3.1.2.1 Método de Ulugh-Beg

El matemático Ulugh-Beg, halló una solución aproximada a la ecuación $\sin(3°) = 3x - 4x^3$ (1), con un método que consistía en buscar aproximaciones cada vez más cercanas al valor real de *x*, procediendo de la siguiente manera:

Para una solución muy cercana a cero, el término x^3, resulta despreciable, por tanto, la primera aproximación para el valor de *x* considerada fue $x = \frac{sin3°/4}{3/4}$; *x*= sin3°/3, Este valor se encuentra mediante división, un cociente Q y un residuo R de tal manera que:

x = Q + Y (2) para la siguiente aproximación y este valor Y se calcula de manera analítica, pero utilizando cálculos algebraicos, como sigue:

De (1) obtenemos $x = \frac{sin3°}{3} + \frac{4x^3}{3}$ (3) y como sin3°/3= Q+R/3 se reemplaza este resultado y la expresión (2) en (3);

$$Q + Y = Q + \frac{R}{3} + \frac{4(Q + Y)^3}{3}$$

Al solucionar el cubo y eliminando las potencias de Y, ya que se pueden despreciar al ser valores muy cercanos a 0, se simplifica la expresión para dar una aproximación del valor de Y;
$Y = \frac{4Q^3+R}{3}$ Luego se reitera este procedimiento.

Aunque se reconoce una base de procedimientos algebraicos, es evidente el carácter analítico del método aquí propuesto lo cual es considerado un hecho importante y de destacar en los aportes que esta cultura imprime en la evolución de las Matemáticas y en particular a la trigonometría.

3.1.2.2 Método iterativo de al- Kashi

El método de al-Kashi como ya se mencionó, es un método numérico que se reconoce como método de iteración. En este usa cálculos en base 60, para generar mayor comprensión en este trabajo los cálculos serán desarrollados en base 60 y también en base 10.

Para describir el método de este matemático primero se debe aclarar que la función seno de un arco A, usado en la Astronomía Islámica y que será dentada como SinA (S mayúscula) no es más que el valor que corresponde a 1.0sinA, que corresponden a los mismos valores con decimales corridos una posición a la derecha. Es decir, SinA es la longitud media de la cuerda de un arco 2A, en una circunferencia con radio $r = 0{,}1$.

Como ya se mencionó el método parte de la identidad escrita en base 10:

$$\sin 3° = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

O lo que corresponde en sistema sexagesimal a:

$$\mathrm{Sin}\, 3° = 3\mathrm{Sin}A - 0;0{,}4\sin^3 A$$

Específico para el caso de A=1°

$$\mathrm{Sin}\, 3° = 3\mathrm{Sin}1° - 0;0{,}4\sin^3 1°$$

Como el $\mathrm{Sin}\, 3°$ se puede determinar mediante las identidades ya conocidas para diferencia de ángulos, el problema se reduce a resolver la siguiente ecuación cubica:

$$\mathrm{Sin}\, 3° = 3x - 0;0{,}4x^3$$

Despejando *x* y multiplicando la ecuación por 15,0 tenemos que:

$$x = \frac{x^3 + 15{,}0\mathrm{Sin}3°}{45{,}0}$$

Sustituyendo para el valor del sin3°=3;8,24,33,59,34,28,15. Con un error en la quinta cifra sexagesimal que corresponde a 32 en lugar de 34, tenemos que:

$$x = \frac{x^3 + 47{,}6;8{,}29{,}53{,}37{,}3{,}45}{45{,}0} \; (1)$$

Con una simple inspección podemos afirmar que x puede ser menos que 1,0, si suponemos de forma poco rigurosa, mediante división que Sin1° es aproximadamente 1;2, …, con lo cual podemos decir que tiene un aspecto como sigue: $x=a_1;\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ por el hecho de que x debe satisfacer la ecuación (1) podemos determinar las *a's* de la sucesión.

$$a_1; \ldots = \frac{a_1; \ldots^3 + 47{,}6; \ldots}{45{,}0}$$

Sin embargo, el valor del valor de a_1, considerando que $a_1; \ldots^3$ que es aproximadamente 1 y lo vamos a dividir entre 45,0, podemos despreciar en la fracción $\frac{a_1; \ldots^3}{45{,}0}$, con lo cual obtenemos:

$$a_1; \ldots = \frac{47{,}6; \ldots}{45{,}0}$$

Cuya división genera un cociente 1 y un residuo $r_1 = 2{,}6;8{,}29,\ \ldots$ Por tanto, $a_1=1$ por tanto ahora tenemos:

$$1; a_2 \ldots = \frac{1; a_2, \ldots^3 + 47{,}6; 8, \ldots}{45{,}0}$$

O al restar a_1 se tiene:

$$0; a_2 \ldots = \frac{1; a_2, \ldots^3 + 2{,}6; 8{,}29, \ldots}{45{,}0}$$

Realizando un análisis como el anterior tendríamos que $1; a_2, \ldots^3$ puede ser reemplazado por 1^3 lo cual nos permite reescribir la expresión como:

$$0; a_2, \ldots = \frac{1^3 + r_1}{45{,}0}$$

O lo que corresponde a:

$$0; a_2, \ldots = \frac{2,7; 8, \ldots}{45,0}$$

Esta división da un cociente 0;2 y un segundo residuo $r_2=37; 8, 29, \ldots$ por lo que a_2=2, al volver sobre los mismos pasos encontraremos 1;2, $a_3, \ldots$ con lo cual se llega al resultado sin1°= 1;2,49,43,11. Reiterando el procedimiento hasta la cuarta sucesión de *a's*.

3.1.3 OMAR JAYYAM Y LA SOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE ECUACIONES CÚBICAS

La época medieval, en el campo matemático se caracterizó por los aportes de los árabes y los persas quienes continuaron con el desarrollo de la matemática de los griegos. Por ejemplo, Omar Jayyam o al-Khayyām un poeta, matemático, filósofo y astrónomo persa que nació a mediados del siglo XI en Nishapur, la capital de la provincia persa de Corasan, retomó el trabajo hecho por Menecmo sobre ecuaciones cubicas y sus estudios le permitieron proporcionar un método generalizado de resolución a estas ecuaciones usando intersecciones entre cónicas, en otras palabras, formuló la primera teoría geométrica de ecuaciones (Espinosa, 2014).

Hacía el año 1074 d.C. al-Khayyām (Moreno, 2002) escribió su famoso *Tratado sobre demostraciones de problemas de álgebra*, que contiene una completa clasificación de catorce ecuaciones algebraicas de grado tres resueltas geométricamente. Se dedica a estas ecuaciones, pues este persa reconoce la existencia de otras ecuaciones de grado menor o igual que tres resueltas por otros matemáticos. En particular, en este texto se presenta un opúsculo sobre *la división de un cuarto de círculo* que corresponde a una construcción geométrica que conlleva a una ecuación cúbica y en la que al-Khayyām utiliza una ET para su solución.

El problema consiste en: "*Si para cada punto P de un círculo consideramos las proyecciones CA y CB sobre dos diámetros perpendiculares se trata de encontrar el punto para el que se cumple PC/AC = BC/BE*" (Moreno, 2002), como se muestra en la *Figura 11*.

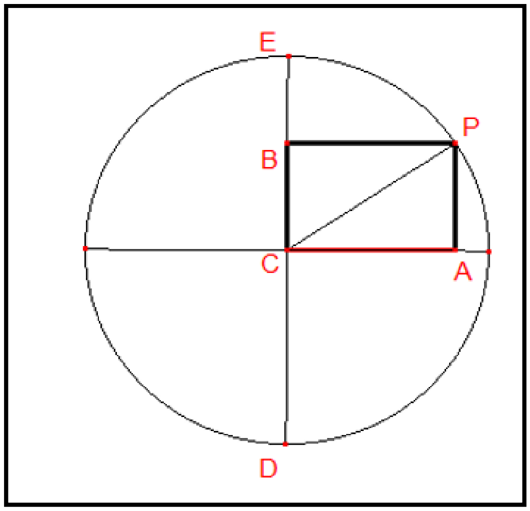


Figura 11. Construcción geométrica del opúsculo de al-Khayyām

Fuente: Moreno (2002)

En otros términos, el problema equivale a resolver la ET:

$$\frac{1}{cos\theta} = \frac{sin\theta}{1 - sin\theta}$$

Para su demostración se supone el problema resuelto y se construye una recta tangente a la circunferencia de centro C por el punto P (*Figura 12*), la cual corta al diámetro BC en el punto I.

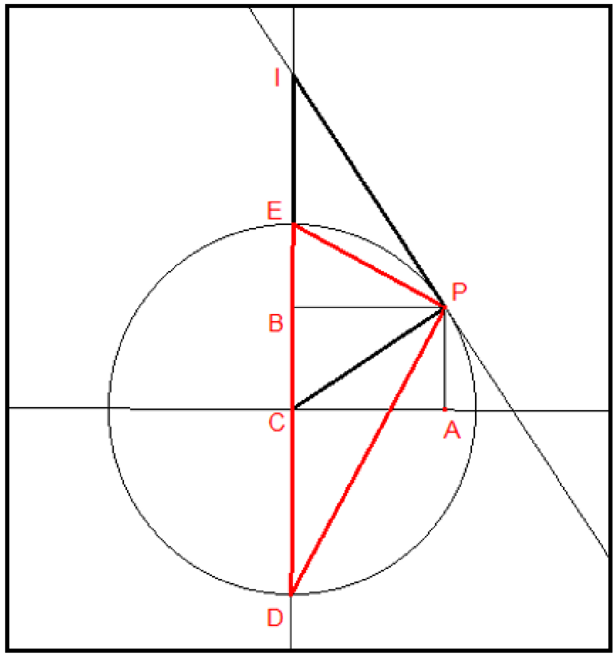


Figura 12. Construcciones auxiliares del opúsculo de al-Khayyām

Fuente: Moreno (2002)

Aplicando los teoremas y hechos de los *Elementos de Euclides*, relativos a la media geométrica, para el ΔCPI y ΔEPD se concluye respectivamente que:

$$PB^2 = BC \cdot BI \text{ y } PB^2 = BD \cdot BE$$

Por propiedades de la igualdad queda que:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BE}$$

Por propiedades de las razones se obtiene que:

$$\frac{BD - BC}{BC} = \frac{BI - BE}{BE}$$

$$\frac{PC}{BC} = \frac{EI}{BE}$$

Ahora, como $\frac{PC}{BC} = \frac{AC}{BE}$ implica que AC = EI y en consecuencia:

$$PC + AC = CE + EI = CI$$

Lo anterior, significa que P es conocido cuando lo es BI. Por tanto, el ejercicio se trata de construir un triángulo rectángulo del que se conoce la longitud de un cateto y que esta longitud más la altura es igual al valor de la hipotenusa. Así, si se asume que el cateto conocido, PC, mide la unidad por ser radio de la circunferencia y la longitud del cateto PI es x se llega a la ecuación cúbica:

$$x^3 + 2x = 2x^2 + 2$$

Ecuación que en términos de al-Khayyām *al cubo de la cosa más cosa igual cuadrado de la cosa más número*, la cual se resuelve cortando una circunferencia con una hipérbola equilátera como se muestra en su tratado.

3.1.4 VIÈTE SOLUCIONA LA ECUACIÓN CÚBICA A TRAVÉS DE ET

Durante los siglos XV y XVI Europa atravesó por algunos cambios en ideas políticas económicas y sociales. El saber es mucho más rápido accesible gracias a la invención de la imprenta. Esto llevó a que los estudiosos aceptaran que el saber científico antiguo, aunque importante se quedaba corto para su realidad e intereses, muchas de las ciencias atraviesan grandes cambios.

De este tipo de cambios no son ajenas las Matemáticas. Estas en particular encontraron dos enfoques: la matemática práctica (enfocada en la utilidad) la cual perdió fuerza y la matemática formal dominada por un lenguaje cada vez más sincopado. Paralelo a este cambio la Trigonometría se convirtió en una ciencia independiente, se alejó de situaciones propias de Astronomía, Geografía entre otras y se consolidó como una disciplina matemática.

Uno de los grandes matemáticos representante de la matemática Renacentista fue el matemático francés François Viète (1540-1603) quien según Boyer (1986) observó gran conexión entre la

Trigonometría y la resolución de ecuaciones cúbicas. En 1591 publicó la obra *In artem Analiticem isagoge*, donde hace uso de símbolos para representar cantidades conocidas e incógnitas. El autor no solo dejó en claro las ventajas de este tipo de representaciones, sino que expone su propio método de resolución de ecuaciones, el cual describe a través de tres procesos: zetética, poristica y exegética. Según Massa (2001):

> Viète resolvía las ecuaciones creando un lazo con la geometría a través de la teoría de proporciones de Euclides; identificaba ecuación con proporción y conectaba el álgebra con la geometría mediante construcciones de las soluciones de las ecuaciones. (p. 707)

En *Supplementum Geometriae*, uno de los capítulos de *In artem Analiticem isagoge*, se presenta la *proposición XVI,* en la cual Viète expone un desarrollo geométrico que le permite llegar a la ecuación $x^3 = 3a^2x + a^2b$. Todo a partir de la siguiente construcción:

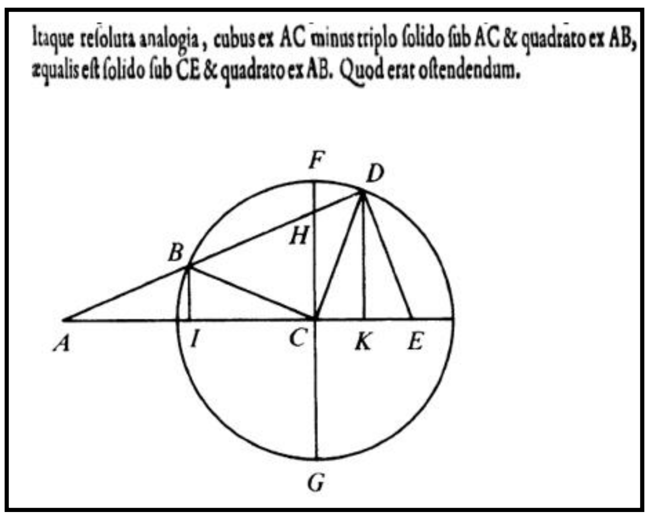


Figura 13. Proposición XVI del texto de Viète

Fuente: Viéte (1970)

El texto mostrado afirma que: *así resulta la analogía, el cubo de AC menos tres veces el cuadrado de AC por AB es igual al cuadrado CE por AB.* Lo anterior, corresponde a una ecuación cúbica irreducible. Viète haciendo uso de razones trigonométricas, establece un método que le permite hallar las tres soluciones de dicha ecuación. Lo cual para este trabajo resulta de interés.

El procedimiento consiste en hallar las soluciones de la ecuación $x^3 = 3a^2x + a^2b$ a través de la sustitución $x = kcos\theta$. A continuación, se describe detalladamente el algoritmo establecido por el francés:

El interés se centra en hallar las soluciones de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ (1), donde $p = -3a^2$ y $q = -a^2b$, con ello Viète verifica que el determinante de Cardano es negativo, es decir: $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, esto garantiza que la ecuación tiene tres soluciones reales[24] .

Viète inicia sustituyendo $x = kcos\theta$ en $x^3 + px + q = 0$, de lo cual obtiene:

$$k^3cos^3\theta + pkcos\theta + q = 0 \text{ (2)}$$

Al multiplicar la ecuación (2) por $\frac{4}{k^3}$ se obtiene:

$$4cos^3\theta + \frac{4p}{k^2}cos\theta + \frac{4q}{k^3} = 0 \text{ (3)}$$

Al comparar la ecuación anterior con la identidad trigonométrica $4cos^3\theta - 3cos\theta - cos3\theta = 0$.

Se concluye que:

$$k = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \text{ y } \cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3} \text{ (4)}$$

Viète halla un valor k y θ tal que la igualdad sea cierta. Suponemos que para la época Viète consultaba dicho valor en tablas trigonométricas que él calculó y compiló en el *Canon Mathematicus*. Luego, a partir de dicho valor se deducen dos ángulos más que igualmente

---

[24]El discriminante de Cardano para una ecuación cúbica está dado por la expresión

$$\sqrt[3]{-\frac{q^2}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

De este se concluye:

- Si $0 > \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, la ecuación posee tres raíces reales.
- Si $0 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, la ecuación posee tres raíces reales, donde al menos 2 son iguales.
- Si $0 < \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, la ecuación posee una solución real y dos complejas.

cumplan la condición. Con esto se establecen los tres valores diferentes $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$. Así, las soluciones de la ecuación serán: $x_1 =\ kcos\theta_1, x_2 = kcos\theta_2$ y $x_3 = kcos\theta_3$

3.1.5 HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA

En la búsqueda de los momentos históricos que contribuyeron en el desarrollo de las ET, como se ha mostrado hasta ahora aparece el aporte que realizaron culturas o grandes matemáticos al crecimiento de la ciencia misma. Pero no solo se ha de revisar este tipo de Historia ya que subyacen momentos importantes para las ET en otros tipos de historia, lo que llamaremos la Historia de las Matemáticas para la enseñanza.

En este apartado se describen dos momentos de la Historia de las Matemáticas para la enseñanza. El primero expone los métodos desarrollados por William Chauvenet, Profesor de Matemáticas y otras ciencias en la academia naval de Estados Unidos y la Universidad de Washington en el siglo XIX, Mientras que en México el Ingeniero y Arquitecto Manuel Torres Torija a finales del mismo siglo, quien es miembro de la Sociedad de Ingenieros y Arquitectos de México, profesor de Matemáticas y Dibujo de la Escuela Nacional preparatoria, plantea métodos analíticos para resolver Ecuaciones Trigonométricas este los compilo en un libro dedicado a la enseñanza universitaria.

3.1.5.1 La obra de Chauvenet: tablas de logaritmo, aparición del término y soluciones generales de ET

Como se puede evidenciar en los apartados anteriores, muchas de las fuentes documentales históricas, sin duda, ponen en evidencia cómo los avances de tipo matemático referidos a la Trigonometría obedecen a diferentes necesidades políticas, sociales, económicas y culturales de los pueblos y las civilizaciones que han existido a lo largo de los años. La palabra Trigonometría entendida comúnmente como el estudio de los trígonos o triángulos, desde su aparición en 1595 en el libro *Trigonometría: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* escrito por B. Pitiscus e inclusive en trabajos más antiguos como los escritos de Hiparco de Bitinia en el año 140 AC sobre las cuerdas de una circunferencia, se ha relacionado directamente con el campo de la astronomía intentando modelar y brindar explicaciones a diversos fenómenos celestes y meteorológicos.

Sin ser una excepción, las *ET* como parte de la Trigonometría tampoco han sido ajenas a esta relación. Aunque se desconoce la fecha exacta de su origen, el termino ecuación trigonométrica es visto por primera vez en 1855 como título de uno de los capítulos del libro *A treatise on plane and spherical trigonometry* (Merlet, 2004) escrito por el profesor de Matemáticas, astronomía y navegación de la Academia Naval de los Estados Unidos y de la Universidad de Washington, William Chauvenet (1820 – 1870), quien afirma que solucionar problemas en los cuales las cantidades desconocidas son ángulos, no se puede reducir solo al plano algebraico (Chauvenet, 1875), es decir, a simples transformaciones y sustituciones, sino que a menudo estas soluciones dependen de las funciones asociadas a esos ángulos – tal vez refiriéndose a la idea de periodicidad –

En el capítulo 10 del libro *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry* (1875), el autor, selecciona algunas ecuaciones trigonométricas simples, de entre las que considera se relacionan con mayor frecuencia al campo de la astronomía e intenta luego describir su método de solución.

Propone por ejemplo encontrar *z* en la siguiente ecuación:

$$\sin(\propto +z) = m \sin z \ (1)$$

En la que α y *m* están dados.

En general se tiene que el seno de la suma de dos ángulos cumple que:

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad (2)$$

Aplicando la relación (2) para el caso de α y z y multiplicando a ambos lados de la igualdad por 1, escrito a la derecha como $\frac{\sin(x)\sin(y)}{\sin(x)\sin(y)}$ queda que

$$\sin(\propto +z) = [sin(\alpha)\ sin(z)](\cot(z) + \cot(\alpha)) \ (3)$$

Sustituyendo (3) en la igualdad (1) se tiene:

$$[sin(\alpha)\ sin(z)](\cot(z) + \ \cot(\alpha)) = m \sin z \text{ (4)}$$

Y si $\sin(z) \neq 0$ se puede cancelar ambos términos de la igualdad (4)

$$sin \propto (\cot(z) + \ \cot(\alpha)) = m \text{ (5)}$$

De donde se obtiene que la solución general de la ecuación (1) para z es

$$\cot(z) = \frac{m}{sin\alpha} - \cot(\alpha) \text{ (6)}$$

Entonces la ecuación (1) tendrá un número indefinido de soluciones, esto es, para todos los ángulos $z + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ pues tienen el mismo valor para cotangente.

De acuerdo con esto, se determina por ejemplo el conjunto solución para w en la siguiente ecuación

$$\sin(30° + w) = 3 \sin w$$

Como α = 30° y m = 3 aplicando la fórmula para la solución general de este tipo de ecuaciones se obtiene:

$$\cot(w) = \frac{3}{sin30} - \cot(30) = 6 - \sqrt{3}$$

Este procedimiento aplica para todos los casos en los que el ángulo está determinado por una sola función trigonométrica. Ahora si el problema se convierte en encontrar los valores para dos funciones de cierto ángulo, entonces la solución es enteramente determinada bajo 360, ya que no puede haber dos ángulos diferentes de menos de 360 que tienen el mismo seno y el coseno

$$\frac{\sin(\alpha+z) + sinz}{\sin(\alpha+z) - sinz} = \frac{m+1}{m-1} \text{ (7)}$$

Se tiene la siguiente relación entre el cociente de la suma y resta de dos ángulos:

$$\frac{\sin x + siny}{\sin x - siny} = \frac{tan\frac{1}{2}(x+y)}{tan\frac{1}{2}(x-y)} \text{ (8)}$$

Aplicando la anterior relación (8) para $x = \alpha + z$ y $y = z$ se obtiene

$$\frac{\sin(\alpha+z) + sinz}{\sin(\alpha+z) - sinz} = \frac{tan\left(z+\frac{1}{2}\alpha\right)}{tan\frac{1}{2}\alpha} \text{ (9)}$$

Sustituyendo (9) en (7) queda:

$$tan\left(z+\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{m+1}{m-1}tan\frac{1}{2}\alpha \text{ (10)}$$

Y con esto se puede determinar $z + \frac{1}{2}\alpha$, donde z se encuentra restando $\frac{1}{2}\alpha$. No obstante, los cálculos en esta ecuación se facilitan en la mayoría de los casos introduciendo un ángulo auxiliar, de tal manera que si se supone que $tan\theta = m$, pues mientras el ángulo varía de 0° a 90° la tangente varía de 0 a infinito, de manera que siempre es posible encontrar el valor del ángulo θ si se conoce el valor de su tangente. Partiendo de este hecho,

$$\frac{m+1}{m-1}=\frac{tan\theta+1}{tan\theta-1}=\cot(\theta-45°) \text{ (11)}$$

Y con (11) la solución de la ecuación (10) se convierte en:

$$tan\left(z+\frac{1}{2}\alpha\right)=\cot(\theta-45°)\,tan\frac{1}{2}\alpha \text{ (12)}$$

El anterior proceso también se puede aplicar para determinar la solución logarítmica de (1) en donde si $tan\theta = m$ entonces $tan\left(z+\frac{1}{2}\alpha\right)=\cot(\theta-45°)\,tan\frac{1}{2}\alpha$ (13)

Los métodos anteriores permiten deducir las expresiones generales para la solución de las ecuaciones que se muestran a continuación:

EQUATIONS.	SOLUTIONS.
1. $\sin(\alpha \pm z)\sin z = m$	$\cos(\alpha \pm 2z) = \cos\alpha \mp 2m$
2. $\cos(\alpha \pm z)\cos z = m$	$\cos(\alpha \pm 2z) = 2m - \cos\alpha$
3. $\sin(\alpha \pm z)\cos z = m$	$\sin(\alpha \pm 2z) = 2m - \sin\alpha$
4. $\cos(\alpha \pm z)\sin z = m$	$\sin(\alpha \pm 2z) = \sin\alpha \pm 2m$
5. $\sin(\alpha \pm z) = m\sin z$	$\tan\phi = m$, $\tan(z \pm \frac{1}{2}\alpha) = \cot(\phi \mp 45°)\tan\frac{1}{2}\alpha$
6. $\cos(\alpha \pm z) = m\cos z$	$\tan\phi = m$, $\tan(\frac{1}{2}\alpha \pm z) = \tan(45° - \phi)\cot\frac{1}{2}\alpha$
7. $\sin(\alpha \pm z) = m\cos z$	$\tan\phi = m$, $\tan(45° - \frac{1}{2}\alpha \mp z) = \tan(45° - \phi)\tan(45° + \frac{1}{2}\alpha)$
8. $\cos(\alpha \pm z) = m\sin z$	$\tan\phi = m$, $\tan(45° - \frac{1}{2}\alpha \mp z) = \tan(45° \mp \phi)\tan(\frac{1}{2}\alpha - 45°)$
9. $\tan(\alpha \pm z)\tan z = m$	$\tan\phi = m$, $\cos(\alpha \pm 2z) = \tan(45° \mp \phi)\cos\alpha$
10. $\tan(\alpha \pm z) = m\tan z$	$\tan\phi = m$, $\sin(2z \pm \alpha) = \cot(\phi \mp 45°)\sin\alpha$

Figura 14. Soluciones generales de algunas ecuaciones trigonométricas

Fuente: Chauvenet (1875, p. 88)

Cabe resaltar que:

- Las soluciones de las ecuaciones que implican cosenos se pueden obtener a partir las relativas a senos, mediante el intercambio de *z* por 90 ± *z*, o α por 90 ± α.

- En las soluciones numéricas los signos de los ángulos y sus funciones deben ser observados cuidadosamente; los signos de las funciones deben ir precedidos de sus logaritmos.

- El ángulo auxiliar θ puede ser menor a 90° en todos los casos, pero positivo o negativo de acuerdo al signo de su tangente.

Por ejemplo, encontrar z en la ecuación $\tan(\alpha + z)\, tanz = m$ si α = 65° y *m* = 1,5196154. La solución general de este tipo de ecuación es:

$$\tan(45° - \theta)cos\alpha = \cos(\alpha + 2z) \quad (14)$$

Por otra parte, suponiendo $tan\theta = m$, aplicando logaritmo a ambos lados de la igualdad y reemplazando el valor de *m*, queda:

$$\log tan\theta = \log m = \log 1{,}5196154 \quad (15)$$

Por propiedades de los logaritmos se tiene que

$$\log 1{,}51196154 = \log\left(\frac{15196154}{10000000}\right) = \log 15196154 - \log 10000000 \quad (16)$$

Quedando así el expresado el logaritmo como:

$$\log 1{,}5196154 = \log 15196154 - \ 7{,}00000 \quad (17)$$

Ahora se calcula el logaritmo de 15196154 con ayuda de las tablas de logaritmos halladas en el libro de Bremiker (1852). Primero, se observa que el número dado esta entre 15196 y 15197, por lo que se ubican las cifras de sus respectivos logaritmos en la tabla como se muestra a continuación:

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP.
1500	17 6091	6120	6149	6178	6207	6236	6265	6294	6323	6352	
01	6381	6410	6439	6467	6496	6525	6554	6583	6612	6641	
02	6670	6699	6728	6757	6786	6814	6843	6872	6901	6930	
03	6959	6988	7017	7046	7075	7103	7132	7161	7190	7219	
04	7248	7277	7306	7334	7363	7392	7421	7450	7479	7508	
05	17 7536	7565	7594	7623	7652	7681	7710	7738	7767	7796	
06	7825	7854	7883	7911	7940	7969	7998	8027	8056	8084	
07	8113	8142	8171	8200	8229	8257	8286	8315	8344	8373	
08	8401	8430	8459	8488	8517	8545	8574	8603	8632	8660	
09	8689	8718	8747	8776	8804	8833	8862	8891	8919	8948	
1510	17 8977	9006	9034	9063	9092	9121	9149	9178	9207	9236	
11	9264	9293	9322	9351	9379	9408	9437	9466	9494	9523	29
12	9552	9581	9609	9638	9667	9695	9724	9753	9782	9810	1 2.9
13	9839	9868	9896	9925	9954	9982	$\bar{0}011$	$\bar{0}040$	$\bar{0}069$	$\bar{0}097$	2 5.8
14	18 0126	0155	0183	0212	0241	0269	0298	0327	0355	0384	3 8.7
15	18 0413	0441	0470	0499	0527	[illegible]	0585	0613	0642	0671	4 11.6
16	0699	0728	0756	0785	0814	[illegible]	0871	0900	0928	0957	5 14.5
17	0986	1014	1043	1071	1100	1129	[illegible]	1186	1215	1243	6 17.4
18	1272	1300	1329	1358	1386	1415	[illegible]	1472	1501	1529	7 20.3
19	1558	1586	1615	1644	1672	1701	1729	1758	1786	1815	8 23.2
											9 26.1

Figura 15. Apartado de la tabla de logaritmos para N = 1510

Fuente propia.

Las cifras respectivas son 181729 y 181758. La diferencia entre estas cantidades es 29 y se observa en la parte derecha de la tabla se encuentra este valor, el cual, permitirá el cálculo proporcional de las cifras que faltan del valor original del logaritmo, es decir, para 1, 5 y 4.

Para 0,1 el valor que le corresponde según la tabla del 29 es 2,9, para 0,05 es de 1,45 y para 0,004 es 0,116. Sumando estos valores queda:

	0,1	2,9
	0,05	1,45
	0,004	0,116
Sumando	0,154	4,466

Como esta parte es proporcional a la mantisa, entonces sumamos 4 a 181729 obteniendo el resultado exacto de la mantisa del logaritmo o 181733. Sin embargo, el proceso no ha terminado. Para determinar la *característica* del logaritmo restamos 1 a la cantidad de cifras que tenga el número, al cual se le está calculando el logaritmo, en este caso, como el número original tiene 8 cifras, su característica será 7 y por tanto el valor real del logaritmo es:

$$\log 15196154 = 7,181733$$

Sustituyendo este resultado en la igualdad (17), se obtiene

$$\log 1{,}5196154 = 7{,}181733 - 7{,}00000$$
$$\log 1{,}5196154 = 0{,}181733$$

Con esto, la igualdad (15) queda reescrita como:

$$\log tan\theta = 0{,}181733$$

Utilizando las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas también contenidas en la obra de Bremiker (1852), se puede determinar el valor del ángulo θ

$$\theta = 56°39'9''$$

Volviendo a la ecuación (14) al aplicar logaritmo a ambos lados de la igualdad, esta se transforma en:

$$\log \tan(45° - \theta) cos\alpha = \log \cos(\alpha + 2z) \text{ (18)}$$

Se sustituyen los valores conocidos y encontrados hasta el momento en la parte izquierda de la igualdad:

$$\log[\tan(45° - \theta)\, cos\alpha] = \log[\tan(45° - 56°39´9")cos65°]\ (19)$$

Reduciendo queda

$$\log[\tan(45° - \theta)\, cos\alpha] = \log[\tan(-11°39´9")cos65°]\ (20)$$

Con ayuda de las tablas de Bremiker (1852), se puede determinar el valor del $\log\tan(-11°39´9")$ y $\log cos65°$. Para el primer caso, se ubica el ángulo, pero rápidamente se puede notar que los valores de la tabla en los minutos van de 10 en 10 por lo que se sobreentiende que 9” está entre 0” y 10” y la diferencia en sus logaritmos da como resultado 106. Ubicando en la sub-tabla de la derecha la cifra 9 se obtiene el valor que hay que sumar al logaritmo de la tangente que corresponde al ángulo de 11°39´0” para obtener el logaritmo que se quería:

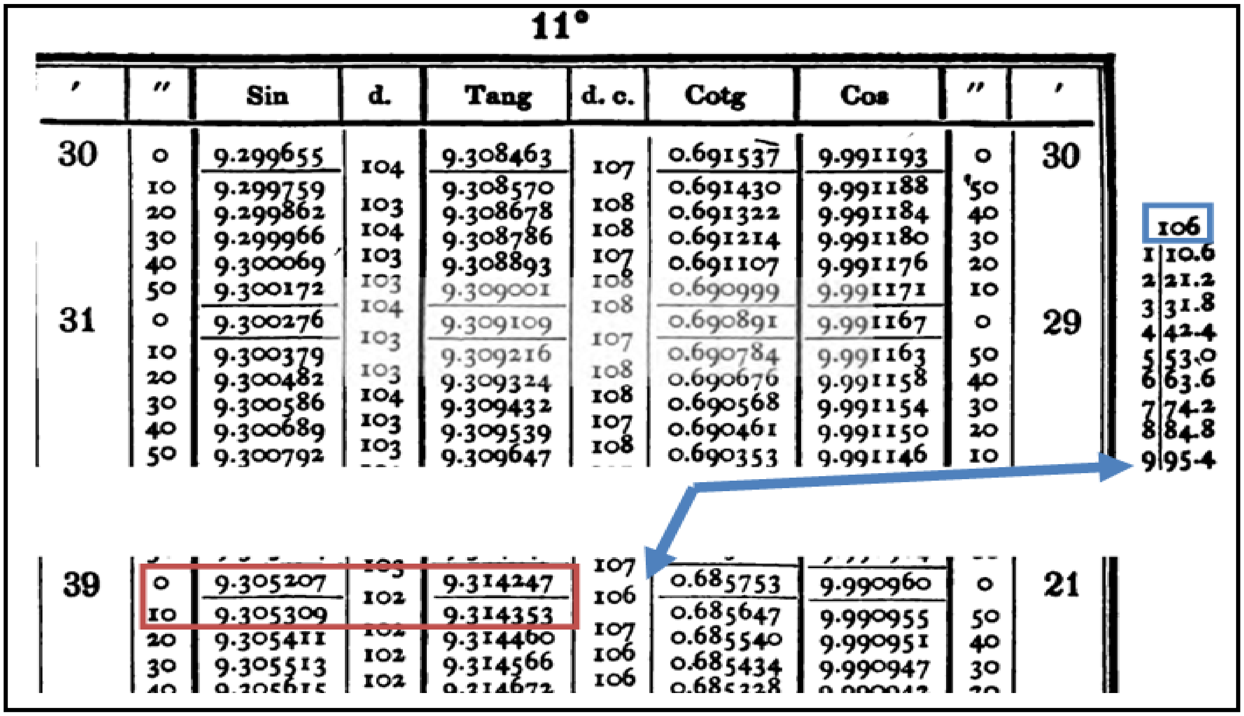
$$\log\tan(11°39´0") = 9{,}314247$$

Ahora,

$$\log\tan(11°39´9") = 9{,}314247 + 0,0000954 = 9{,}3143424$$

Pero como el ángulo original es negativo el valor del logaritmo también es negativo:

$$\log\tan(-11°39´9") = -\ 9{,}3143424\ (21)$$



11°

′	″	Sin	d.	Tang	d. c.	Cotg	Cos	″	′
30	0	9.299655	104	9.308463	107	0.691537	9.991193	0	30
	10	9.299759	103	9.308570	108	0.691430	9.991188	50	
	20	9.299862	104	9.308678	108	0.691322	9.991184	40	
	30	9.299966	103	9.308786	107	0.691214	9.991180	30	
	40	9.300069	103	9.308893	108	0.691107	9.991176	20	
	50	9.300172	104	9.309001	108	0.690999	9.991171	10	
31	0	9.300276	103	9.309109	107	0.690891	9.991167	0	29
	10	9.300379	103	9.309216	108	0.690784	9.991163	50	
	20	9.300482	104	9.309324	108	0.690676	9.991158	40	
	30	9.300586	103	9.309432	107	0.690568	9.991154	30	
	40	9.300689	103	9.309539	108	0.690461	9.991150	20	
	50	9.300792		9.309647		0.690353	9.991146	10	
39	0	9.305207	102	9.314247	106	0.685753	9.990960	0	21
	10	9.305309		9.314353	107	0.685647	9.990955	50	
	20	9.305411	102	9.314460	106	0.685540	9.990951	40	
	30	9.305513	102	9.314566	106	0.685434	9.990947	30	

	106
1	10.6
2	21.2
3	31.8
4	42.4
5	53.0
6	63.6
7	74.2
8	84.8
9	95.4

Figura 16. Apartado de la tabla de logaritmos para 11º

Fuente propia.

Para el caso de log $cos 65°$, se procede de la misma forma que en el caso anterior a diferencia que en este caso, como el ángulo tiene 0´y 0" el valor del logaritmo del coseno se ubica con más facilidad en las tablas:

′	″	Cos	d.	Cotg	d. c.	Tang	Sin	d.	″	′	
	10	9.625180	45	9.667737	55	0.332263	9.957442	10	50		9 | 41.4
	20	9.625225	45	9.667792	55	0.332208	9.957433	9	40		
	30	9.625270	45	9.667847	55	0.332153	9.957423	10	30		
	40	9.625316	46	9.667903	56	0.332097	9.957413	10	20		
	50	9.625361	45	9.667958	55	0.332042	9.957403	10	10		
58	0	9.625406	45	9.668013	55	0.331987	9.957393	10	0	2	45
	10	9.625451	45	9.668068	55	0.331932	9.957384	9	50		1 | 4.5
	20	9.625496	45	9.668123	55	0.331877	9.957374	10	40		2 | 9.0
	30	9.625542	46	9.668178	55	0.331822	9.957364	10	30		3 | 13.5
	40	9.625587	45	9.668233	55	0.331767	9.957354	10	20		4 | 18.0
	50	9.625632	45	9.668288	55	0.331712	9.957344	10	10		5 | 22.5
59	0	9.625677	45	9.668343	55	0.331657	9.957335	9	0	1	6 | 27.0
	10	9.625722	45	9.668398	55	0.331602	9.957325	10	50		7 | 31.5
	20	9.625768	46	9.668453	55	0.331547	9.957315	10	40		8 | 36.0
	30	9.625813	45	9.668508	55	0.331492	9.957305	10	30		9 | 40.5
	40	9.625858	45	9.668563	55	0.331437	9.957295	10	20		
	50	9.625903	45	9.668618	55	0.331382	9.957286	9	10		
60	0	9.625948	45	9.668673	55	0.331327	9.957276	10	0	0	

65°

Figura 17. Apartado de la tabla de logaritmos para 65º

Fuente propia.

$$\log cos 65° = +9{,}625948 \ (22)$$

Aplicando propiedades de las operaciones entre logaritmos se obtiene que:

$$\log \tan(-11°39'9") = \log cos 65° = -8{,}9402909$$

De donde se puede concluir que $\alpha + 2z$ puede tomar valores como 95º, 265º, 455º o 625º y como $\alpha = 65º$ entonces $2z$ es 30º, 200º, 390º o 560º y por tanto z es 15º, 100º, 195º o 280º, concluyendo la solución de la ET.

3.1.5.2 El texto de Torija: métodos de solución a ecuaciones trascendentes

En 1894 el Ingeniero y Arquitecto Manuel Torres Torija (1872-1921) miembro de la Sociedad de Ingenieros y Arquitectos de México, profesor de Matemáticas y Dibujo de la Escuela Nacional preparatoria, publica el texto académico *Nociones de Álgebra superior y elementos fundamentales de Cálculo Diferencial e Integral.* El objetivo de este libro fue satisfacer los programas profesionales de Matemáticas superiores y con esto fortalecer las demandas de los currículos y las carreras universitarias y con esto contribuir a la enseñanza de la época. El texto está dividido en tres partes: en la primera de ellas, aclara algunos conceptos generales que permiten entender el libro, esta parte fue identificada como algebra intermedia. La segunda parte está referida al algebra superior y comprende la teoría de las ecuaciones. Por último, la tercera parte es denominada por el autor como adiciones suplementarias: el cálculo de las diferencias, la interpolación, las ecuaciones trascendentes, etc.

Torres en el capítulo 16 de su libro hace referencia a la resolución numérica y algebraica de ecuaciones. La primera de ellas es empleada en la solución de ecuaciones de cualquier grado, mientras que la resolución algebraica usada en ecuaciones cuyo máximo grado máximo era cuatro. En dicho capítulo, el autor centra su trabajo en dos procedimientos usados en la resolución algebraica de ecuaciones: procedimientos algebraicos y métodos trigonométricos. Este último procedimiento es de nuestro interés en tanto se identifica el uso de la Trigonometría como medio para la resolución de ecuaciones.

3.1.5.2.1 Solución de ecuaciones de segundo grado mediante métodos trigonométricos.

Según Torres (1894), el método general para la resolución algebraica de las ecuaciones consiste en:

> (…) traer la resolución de la propuesta a la de otra de menor grado llamada reducida o resolvente de la propuesta con ayuda de transformaciones, artificios o sustituciones adecuadas. Conocidas las raíces de la reducida, la función que las liga con las de la propuesta, da a conocer las raíces de esta última" (p. 540).

Para dar una interpretación a lo anterior, a continuación, se describe el método trigonométrico para la solución de ecuaciones de segundo grado.

Sea la ecuación de segundo grado $x^2 + px + q = 0$, esta ecuación puede tener solo una de las siguientes formas de solución: i) Raíces reales desiguales y de signos iguales, ii) Raíces reales desiguales y de signos diferentes, iii) Raíces reales iguales y de signos iguales, iv) Raíces imaginarias. Torres (1894) propone, según el tipo de solución, emplear un método trigonométrico específico. Para esto se realiza un análisis de la discriminante de la ecuación de tal forma que establece las condiciones para p y q que lleven a cada uno de los tipos de solución.

Se tiene que para la ecuación $x^2 + px + q = 0$, el discriminante de la ecuación es:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right) (1)$$

Este último resultado permite inferir que

I. La ecuación cuadrática tendrá raíces reales, desiguales y de signos iguales si $q > 0$ y $\frac{p^2}{4} - q > 0$

II. La ecuación cuadrática tendrá raíces reales desiguales de signos diferentes si $q < 0$ y $\frac{p^2}{4} - q > 0$

III. La ecuación tendrá raíces reales iguales de signos iguales si $q > 0$ y $\frac{p^2}{4} - q = 0$

IV. La ecuación tendrá raíces imaginarias si $q > 0$ y $\frac{p^2}{4} - q < 0$

3.1.5.2.2 Método trigonométrico para una ecuación de grado dos con raíces reales, desiguales y de signos iguales.

Sea la ecuación $x^2 + px + q = 0$, tal que: $q > 0$ y $1 > \frac{4q}{p^2}$. Se asumirá para efectos del método que:

$$sen^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$$

$$sen\varphi = \sqrt{\frac{4q}{p^2}}$$

$$sen\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (1):

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - sen^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{cos^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}(1 \pm cos\varphi).$$

Así las dos raíces de la ecuación de segundo, estarán dadas por:

$$x_1 = -\frac{p}{2}(1 - cos\varphi) = -psen^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$x_2 = -\frac{p}{2}(1 + cos\varphi) = -pcos^2\frac{\varphi}{2}.$$

3.1.5.2.3 Método trigonométrico para una ecuación de segundo grado con raíces reales, desiguales y de signos diferentes.

Sea la ecuación $x^2 + px + q = 0$, en la cual se cumple: $q < 0$ y $-\frac{4q}{p^2} > 0$ ademas:

$$tan^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$$

Sustituyendo en (1):

$$x_1 = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 + tan^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{cos\varphi - 1}{cos\varphi}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{1 - cos\varphi}{cos\varphi}\right) = \frac{psen^2\frac{\varphi}{2}}{cos\varphi}.$$

$$x_2 = -\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 + tan^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{cos\varphi + 1}{cos\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{1 - cos\varphi}{cos\varphi}\right) = -\frac{pcos^2\frac{\varphi}{2}}{cos\varphi}$$

3.1.5.2.4 Método trigonométrico para una ecuación de segundo grado con raíces reales iguales de signos iguales.

Sea la ecuación $x^2 + px + q = 0$, en la cual se cumple que $q > 0$ y $\frac{p^2}{4} - q$ =0, razón por la cual el radical de (1) se anula y las raíces de la ecuación cuadrática serán: $x_1 = -\frac{p}{2} y \ x_{2=}\frac{p}{2}$.

3.1.5.2.5 Método trigonométrico para una ecuación de segundo grado con raíces imaginarias.

Sea la ecuación $x^2 + px + q = 0$, en la cual se cumple $q > 0$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$ y $1 > \frac{4q}{p^2}$. Por efectos del método se supondrá que:

$$sec^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$$

Por lo tanto, utilizando (1), se tendrá que

$$x_1 = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - sec^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(1 - tany\sqrt{-1}\right)$$

$$x_2 = -\frac{p}{2}\left(1 + tany\sqrt{-1}\right)$$

3.1.5.2.6 Solución de ecuaciones de tercer grado mediante métodos trigonométricos.

El empleo de la Trigonometría como medio para la solución de ecuaciones de tercer grado, ha estado estrechamente relacionado con el caso de la ecuación irreducible. Los métodos empleados para dar solución a este tipo de ecuaciones, requieren de sustituciones en las cuales se emplean razones trigonométricas y un análisis sobre el discriminante de Cardano (un análisis sobre el tipo de raíz cuadrática determinada por dicho discriminante). A continuación, se describe el método de resolución de ecuaciones de tercer grado, expuesto en Torres (1874):

Sea la ecuación $x^3 + px + q = 0$, en está el discriminante de Cardano está dado por la expresión:

$$\sqrt[3]{-\frac{Q^2}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

A partir de este último se establecerán cuatro posibles casos que conlleven a la solución de la ecuación de tercer grado.

Caso I. $\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}<0$

Sustituyendo[25]: $a=-\frac{-Q}{2}\ -b=\ \frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}$

Se obtiene:

$$\sqrt[3]{-\frac{Q^2}{2}\pm\sqrt{\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}}}=\ \sqrt[3]{a\pm-b\sqrt{-1}}=\left(a\pm-b\sqrt{-1}\right)^{1/3}$$

Al analizar la forma trigonométrica de la anterior cantidad imaginaria, asumiendo que p y φ son el modulo, *y* argumento y que $cos\varphi=\frac{a}{p}$, $sen\varphi=\frac{-b}{p}$ se tiene:

$$\left(pcos\varphi\pm psen\varphi\sqrt{-1}\right)^{1/3}$$

$$p^{1/3}\left(cos\varphi\pm sen\varphi\sqrt{-1}\right)^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}\pm sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)$$

Ya que $\varphi<180^0$ y no produce ningún cambio en su valor tomando cualquiera de los dos signos. Al hacer uso de las tres soluciones de una ecuación cúbica se obtiene:

$$\boldsymbol{x}=\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}+sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)+\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}-sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)=$$

$$\boxed{x=2\sqrt[3]{p}\,cos\frac{\varphi}{3}}$$

$$\boldsymbol{x_2}=\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}+sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)+\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}-sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)=$$

$$\sqrt[3]{p}\left(\frac{-1}{2}cos\frac{\varphi}{3}-\frac{1}{2}sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)+$$

[25] El discriminante de Cardano para una ecuación cúbica está dado por la expresión $\sqrt[3]{-\frac{q^2}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

$$\sqrt[3]{p}\left(\frac{-1}{2}cos\frac{\varphi}{3}+\frac{1}{2}sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)=$$

$$-2\sqrt[3]{p}\left(\frac{1}{2}cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\frac{\varphi}{3}\right)=$$

$$\boxed{x_2=-2\sqrt[3]{p}\cos\left(60-\frac{\varphi}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{x_3}=\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{3}\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}+sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)+\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{3}\sqrt[3]{p}\left(cos\frac{\varphi}{3}-sen\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)=$$

$$-2\sqrt[3]{p}\left(\frac{1}{2}cos\frac{\varphi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\frac{\varphi}{3}\right)=-2\sqrt[3]{p}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\varphi}{3}\right)=$$

$$\boxed{x_3=2\sqrt[3]{p}\cos\left(120-\frac{\varphi}{3}\right)}$$

Ahora bien, inicialmente se utilizó la sustitución $a=-\frac{-Q}{2}\ -b=\ \frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}$, lo que en términos trigonométricos equivale a:

$$-\frac{-Q}{2}=pcos\varphi\ \ \frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}=-p^2sen^2\varphi$$

Al elevar al cuadrado la primera cantidad y de este resultado restar la segunda cantidad se obtiene:

$$\frac{Q^2}{4}-\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}=p^2(cos^2\varphi+sen^2\varphi)=p^2$$

Además, el modulo p del ángulo:

$$p=\sqrt{-\frac{P^3}{27}}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación $x, x_2\ \ y\ x_3$ serán:

$$x=2\sqrt{-\frac{P}{3}}\ cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = -2\sqrt{-\frac{P}{3}}cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}cos\left(120 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

El único valor aún desconocido en estas tres raíces es φ, sin embargo, este argumento se halla mediante la fórmula:

$$cos\varphi = -\frac{\frac{Q}{2}}{\sqrt{-\frac{P}{27}}} = \frac{Q}{2\sqrt{-\frac{P}{27}}}$$

Si dicha expresión conduce a un valor φ negativo, se buscará el ángulo suplementario φ' cuyo coseno es igual y de signo contrario a φ. Para hallar el valor φ o φ', es necesario utilizar tablas trigonométricas.

En conclusión, los hechos históricos descritos en este apartado, marcaron hitos importantes en el desarrollo de la idea de ET y se pueden resumir en la siguiente tabla que destaca aspectos relevantes para la investigación (p. e., actividades asociadas, contextos, entre otros):

Tabla 2. Resumen de hitos de la historia de las ET

Hito	Personaje	Fin o uso	ET que se soluciona	Método de solución	
				Tipo de procedimiento	**Breve descripción del procedimiento**
La ET como herramienta de solución a problemas matemáticos relacionados con asuntos culturales	Ptolomeo	Construcción de tablas de cuerdas usadas en los cálculos astronómicos y la elaboración de mapas.	$sin(\theta) = x$ con $x = \frac{crd(2\theta)}{120}$	Geométrico (construcción y argumentación geométrica)	Se realizan construcciones de polígonos regulares, con el fin de encontrar longitudes de cuerda subtendidas por algunos arcos. También, se aplican los teoremas y resultados relativos a operaciones entre cuerdas propuestos por Ptolomeo
La ET es un mecanismo para resolver los problemas de la exactitud	al-Kashi	Cálculo de distancias astronómicas, la elaboración de mapas celestes como mecanismo para el diseño de rutas marítimas y la resolución de triángulos esféricos para conocer la dirección de la Meca. Además, la cultura árabe estaba muy interesada en mejorar la precisión de las tablas trigonométricas propuestas por los griegos por lo que usaron las ET para tal fin.	$sin(1°) = x$	Numérico - Analítico	El método iterativo consiste en resolver la expresión $\text{Sin } 3° = 3x - 0; 0{,}4x^3$ escrita en base 60, para el cual se establece una sucesión de cocientes en la que se desprecian cantidades pequeñas de los residuos.
	Ulugh-Beg		$sin(3°) = 3x - 4x^3$, donde $x = sin(1°)$	Numérico – analítico	Utiliza un método reiterativo, en el que encuentra divisiones entre polinomios con cociente Q y residuo R, de lo que resulta expresiones como $Q + Y = Q + \frac{R}{3} + \frac{4(Q+Y)^3}{3}$ y se desprecia las potencias

					de Y por ser cantidades pequeñas (cercanas a cero).
La ET es una estrategia usada para solucionar ecuaciones algebraicas	Omar Jayyam	Se usan las ET para resolver ecuaciones algebraicas (usos de tipo matemático)	$\frac{1}{cos\theta}=\frac{sin\theta}{1-sin\theta}$	Geométrico – analítico	Las construcciones geométricas de triángulos rectángulos semejantes permiten el uso de propiedades entre las razones (equivalencias e identidades trigonométricas)
	Viète		$4cos^3\theta-3cos\theta-cos3\theta=0$	Analítico	Utiliza la sustitución $x=kcos\theta$ para encontrar la solución a la ecuación $x^3=3a^2x+a^2b$ a partir del análisis del discriminante aplicando propiedades algebraicas.
La ET como objeto matemático de enseñanza	Chauvenet	Se formalizan algunas estrategias de solución y usos de las ET con el fin de ser enseñadas a los estudiantes de los escenarios de educación superior, pues están tienen bastantes aplicaciones en otras ciencias como la navegación, astronomía, arquitectura, entre otras, además hace parte de los contenidos matemáticos, curriculares de la época.	1. $\sin(\alpha\pm z)\sin z=m$ 2. $\cos(\alpha\pm z)\cos z=m$ 3. $\sin(\alpha\pm z)\cos z=m$ 4. $\cos(\alpha\pm z)\sin z=m$ 5. $\sin(\alpha\pm z)=m\sin z$ 6. $\cos(\alpha\pm z)=m\cos z$ 7. $\sin(\alpha\pm z)=m\cos z$ 8. $\cos(\alpha\pm z)=m\sin z$ 9. $\tan(\alpha\pm z)\tan z=m$ 10. $\tan(\alpha\pm z)=m\tan z$	Numérico – analítico	Generaliza la solución de las 10 ET, usando identidades y equivalencias trigonométricas expuestas en apartados anteriores del texto, luego establece un parámetro $tan\theta=m$, utiliza tablas y propiedades de los logaritmos para encontrar la solución.
	Torres Torija		Varias	Analítico	Aplica sustituciones trigonométricas y propiedades de solución a ecuaciones algebraicas, en especial las que propone Cardano

3.2 MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (CPM)

Considerar que el conocimiento del Profesor de Matemáticas en relación a un objeto matemático debe estar constituido por dos elementos, uno de ellos disciplinar y el otro didáctico, y que el adecuado dominio de ambos le permite consolidar un saber que se corresponde con las amplias experiencias de su profesión, afrontándolas con pertinencia, eficacia o cualquier sinónimo de profesionalismo, fue una de las visiones iniciales sobre la estructura del CPM. Sin embargo, el interés por analizar este ha ampliado estas dos visiones a otros elementos más complejos, lo que compromete a los formadores de profesores y los centros de formación de profesores con la tarea de buscar todo tipo de fuentes que enriquezcan esos dominios, junto con los elementos disciplinar y didáctico. Esferas tales como la Epistemología, la Filosofía y la Historia son escenarios que deben ser, y han sido considerados, en la formación de profesores de Matemáticas para tal fin.

Con lo anterior y a propósito de esta investigación, el escenario particular que se quiere analizar es la HM. Por tanto, se pretende identificar cómo o de qué formas influye está en el conocimiento del profesor, ya sea que lo amplíe, refute, complemente o soporte, lo cual plantea de inmediato tres tareas: i) determinar los elementos de la HM que son útiles para tal fin, ii) identificar cómo dichos aspectos contribuyen en la FPM y iii) determinar cuál es el conocimiento del profesor que se ve enriquecido por estos asuntos. Lo anterior hace necesario asumir una postura acerca de lo que se reconoce como el CPM.

En este apartado se precisa sobre la tercera tarea, clarificar qué se reconoce en esta investigación como el CPM. Para ello en el ***Anexo 2*** se presenta una breve descripción de algunos modelos del conocimiento del profesor que se han generado en investigación, como los son el propuesto por Shulman (1987), una propuesta general sobre los dominios del profesor para cualquier área y otros específicos del profesor de Matemáticas como los desarrollados por Ball (2005) y Godino (2007), mientras que a continuación se presenta el modelo de Pinto (2010) el cual será referido para efectos de este trabajo.

Una vez terminada la descripción de los modelos se presenta las consideraciones acerca de su pertinencia en relación a los fines prácticos de esta investigación, es decir aquellos que se ajusten a las características particulares que la conforman, para finalmente establecer la postura que se asume en este trabajo.

3.2.1 EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO [CDC]

En el marco del trabajo Doctoral *"Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación"* Pinto (2010), plantea una reformulación teórica del CDC, el cual, como lo define el autor es una perspectiva teórica que surge a partir del modelo de Shulman, que a la luz del conocimiento de un contenido específico favorece el estudio del CPM.

La propuesta está conformada por tres (3) elementos o componentes fundamentales que se mantienen invariables en las distintas reformulaciones del CDC. Estas son: i) *el conocimiento del contenido a enseñar,* el cual se reconoce como la integración de cuatro (4) aspectos: a) el rol e importancia del tópico en Matemáticas y en el currículo matemático, b) investigación y marco teórico sobre el aprendizaje, c) conocimiento y comprensión de conceptos matemáticos en general y, en particular, del tópico específico, e d) investigación y marco teórico sobre el conocimiento de la materia y el rol del profesor en la enseñanza. En segundo lugar ii) e*l conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales* referido al conocimiento sobre cómo enseñar ese contenido de forma efectiva; es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, sobre la organización, la secuencia para presentarlo y finalmente iii) *el conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido a enseñar,* el cual se centra en el conocimiento particularizado de los estudiantes, cuáles son sus errores frecuentes, sus habilidades y destrezas, entre otros. Adicional a esto, la propuesta de Pinto integra y describe un conjunto de categorías para cada uno de estos elementos. Esta integración es a lo que se denomina el sistema de dimensiones e indicadores del CDC como se puede evidenciar en la siguiente tabla:

Tabla 3. Dimensiones e Indicadores de los componentes del CDC (Pinto, 2010)

Categoría: Conocimiento del Contenido Matemático a Enseñar (p. 23)	
Dimensiones	***Indicadores* / breve descripción**
Conocimientos sobre la actividad matemática general	– *conocimiento de la historia de la disciplina*, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, *la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos.* – *conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas* en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico. – *comprensión de aquellos conceptos, principios, hechos y teorías* principales de la disciplina en cuestión, así como las posibles interrelaciones que pueden establecerse entre los mismos. – *conocimiento del conjunto de procedimientos que sirven de base para que el conocimiento de los mismos progrese y avance*, principales perspectivas o escuelas en el campo, cómo el campo se ha desarrollado a través del tiempo y quiénes han contribuido a ese desarrollo. – *conocimiento de la disciplina para enseñar a otras personas*, desde una perspectiva sociocultural, de las diferentes materias que componen el currículo escolar. – *conocimientos de la ética y valores morales y estéticos del contenido a enseñar, acerca de la cultura matemática y sociedad.*
Conocimientos por tópico específico matemático	– *características esenciales* (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos prototipos, distinción entre ejemplos concretos y no-ejemplos, actualización del cambio en el concepto). – *diferentes representaciones* (comprender los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre éstos), – *formas alternativas de aproximación* (familiarización con las principales alternativas de aproximación del concepto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, en otras disciplinas y en la vida diaria, así como el estudio de las posibles adecuaciones de estas aproximaciones a ciertas situaciones). – *la fuerza del concepto* (nuevas oportunidades que originan nuevos conceptos, características únicas y propiedades relevantes del concepto, relación con otros conceptos, sub-tópicos o subcomponentes, visto desde una manera multidireccional e integral). – *repertorio básico* (conocer y tener fácil acceso a familias de ejemplos específicos, ejemplos potentes que ilustran principios importantes, propiedades, teoremas, etc., aspectos prácticos en la escuela que se incluyen en el currículo). – *conocimiento y comprensión del concepto*, (conocimiento conceptual y procedimental del concepto, y las relaciones de éstos). – *conocimiento acerca de las Matemáticas* (conocimiento acerca de la naturaleza de las Matemáticas, formas del significado y procesos).
Conocimientos sobre el currículo matemático	– *conocimiento de los propósitos de la instrucción matemática en general*, para referirse principalmente a tres aspectos: la importancia de las Matemáticas en la escuela, el significado de aprenderla y el valor de cada uno de los contenidos dentro del ámbito escolar. – *conocimiento de las justificaciones para aprender un tópico dado*, que consiste en conocer y utilizar una variedad de formas específicas para la materia, para justificar los tópicos específicos y con ello motivar a los estudiantes para aprender. – *conocimiento de las ideas importantes para enseñar un tópico dado*, que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos tópicos, como son los procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros. – *conocimiento de los prerrequisitos de conocimiento para un tópico dado*, en los diferentes momentos del ciclo didáctico y estudio del tópico (ej. tópico dentro del

	mismo currículo, tópico y herramientas conceptuales y procedimentales previas, experiencia en el manejo del tópico o concepto y experiencia en procesos de pensamiento similares). – *conocimiento de los problemas típicos de la "escuela matemática*", que muestre una familiaridad con problemas típicamente encontrados en la instrucción matemática.
Categoría: Conocimiento de las Estrategias y Representaciones Instruccionales de las Matemáticas (p. 30)	
Dimensiones	***Indicadores* / breve descripción**
Conocimientos sobre las representaciones instruccionales	– *comprender el contenido específico que subyace en las representaciones*, las relaciones con otras representaciones o conceptos de la misma disciplina y con otros campos de conocimiento, conocer el origen y fundamento de las representaciones, así como las relaciones que subyacen y los procedimientos de verificación y su relación con el conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno. – *criterios para desarrollar, evaluar, seleccionar y usar apropiadas representaciones* instruccionales; que implica el conocimiento de los estándares de calidad que evalúan las adecuaciones de las representaciones de la materia en cuestión. – *amplio repertorio de representaciones* de la materia que enseñan; que incluye, el estudio de la relación entre las representaciones y recursos instruccionales específicos para la disciplina; así como de analogías, ilustraciones, modelos, metáforas, ejemplos, explicaciones, demostraciones, dibujos, preguntas, actividades, discusiones, exposiciones verbales, diagramas, simulaciones, dramatizaciones y análisis de contenido, así como representaciones verbales, simbólicas, gráficas o concretas, etc. – *conocimiento sobre las rutinas instruccionales, que implica, estrategias, métodos o técnicas específicas al contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción y el* conocimiento de las características de las interacciones didácticas, así como de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje y las alternativas para afrontarlas.
Conocimientos los materiales curriculares	– *de los materiales para la instrucción del contenido matemático o para una determinación noción*, sus características, los textos y materiales básicos y alternativos, software, calculadoras, programas específicos, problemas, ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas de y sobre conceptos o tópicos, demostraciones en laboratorios, programas o simuladores *on-line*, recursos en Internet, etc., y de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias. – *del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión*, su organización razonada de tópicos, las actividades y problemas que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las estrategias instruccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático.
Conocimiento sobre el currículo matemático	– *conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático*, que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático (según el grado y nivel de enseñanza), de las relaciones con otros contenidos matemáticos y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática. – *conocimiento del currículo de otras disciplinas escolares*, que incluye la revisión de programas, textos, materiales y recursos con el objeto de establecer con éstas una mayor vinculación con la matemática y el tópico específico que se trate. – *del diseño e implementación de nuevos materiales de la materia en cuestión*, que implica el conocimiento teórico y práctico del estudio del diseño y evaluación de materiales curriculares de contenido matemático.

Categoría: Conocimiento de los Procesos de Aprendizaje del Estudiante sobre el contenido matemático (p. 35)	
Dimensiones	***Indicadores* / breve descripción**
Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en Matemáticas	– *conocer las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes*, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula, sobre el contenido matemático que aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las Matemáticas y con los diferentes tópicos específicos. – *conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en Matemáticas*, enfatizando los procesos de comprensión del concepto y las formas de justificación, partiendo de objetos concretos que representen ideas Matemáticas, conociendo las diferencias individuales que puede haber en la forma de aprender de los alumnos, el conocimiento de las características del aprendizaje de tópicos concretos (más y menos comunes) y según niveles cognitivos de desarrollo (procesal o conceptual), las formas de conectar las ideas concretas con las abstractas de las Matemáticas y de las formas de ir de lo simple a lo complejo; del conocimiento de las intuiciones y heurísticas de los estudiantes; formas de conectar unas ideas con otras; formas en que la mayoría comprende un tópico dado; es decir, algunos aplicados a las Matemáticas en general (ej. terminología), a los tópicos y procedimientos específicos de la Matemáticas (ej. simplificar), y otros a su concepción o forma de aprender (ej. memorizar reglas sin comprenderlas) y el porqué de estos aspectos; los fundamentos de razonamiento del estudiante. – *conocer las creencias y concepciones inadecuadas comunes de los estudiantes*, así como sus interpretaciones, dificultades (o facilidades), obstáculos y errores de los estudiantes del contenido matemático o del tópico específico, como son, por ejemplo, la falta de juicio para utilizar un procedimiento en una situación y que es diferente para otra (especialmente cuando parecen similares); y conocer las atribuciones o causas de éstas.
Conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante	– *conocimiento de técnicas para medir y diagnosticar sus concepciones inadecuadas*, que incluye, el análisis de los criterios de selección, uso y adecuación de instrumentos o materiales (genéricos o específicos de la didáctica de las Matemáticas) para el diagnóstico de las necesidades, formas de aprender, creencias, errores y dificultades en el aprendizaje del tópico matemático.
Conocimiento de estrategias instruccionales	– *conocer las estrategias instruccionales específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades*, así como conocer las estrategias instruccionales específicas que pueden ser usadas para permitir que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ellos ya poseen. – *conocer las estrategias de aprendizaje de los estudiantes* para promover la adquisición, organización y almacenamiento del contenido matemático, que implica, conocer estrategias para promover el recuerdo, la memorización y la comprensión; y conocer los contextos significativos de aprendizaje de los estudiantes, desde los más primitivos hasta los más sofisticados. – *conocer los materiales curriculares,* utilizados como parte de las estrategias instruccionales para corregir las dificultades y concepciones inadecuadas de los estudiantes.

Por tanto, a partir de la revisión realizada sobre los modelos, se concluye que el CDC es propicio y se ajusta a esta investigación ya que: i) reconoce un contenido específico, en el caso de esta investigación el contenido específico son las ET, a partir del cual se puede hacer un estudio sobre el avance del CDC de los maestros en formación avanzada, ii) el sistema de indicadores propuesto por Pinto nos proporciona ejemplos de indicadores en torno a un tópico específico y en relación con los conocimientos del PM, iii) uno de los principios rectores del trabajo doctoral de Pinto (2010):

> (…) aunque los estudios sobre el CDC en educación matemática acentúan sus resultados y conclusiones sobre el tópico matemático que investigan, éstas sirven como referente teórico y metodológico en el momento de generar una nueva investigación sobre el profesor en tópicos diferente. (p.99)

brinda un espacio que permite ampliar la teoría en relación al CDC sobre las ET. Como concluye Godino (2009) en relación a los modelos descritos

> (…) Desde nuestro punto de vista, los modelos de “conocimiento matemático para la enseñanza” elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las Matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemática (p.7).

3.3 ET EN EL CURRÍCULO ESCOLAR DE MATEMÁTICAS

3.3.1 UNA REVISIÓN NORMATIVA DE LAS ET EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

En el siguiente apartado se presenta un estudio sobre la presencia de la Trigonometría y en particular de las ET en el Currículo Escolar Colombiano desde los años cincuenta hasta la fecha. Para esto se retoman los documentos elaborados por Gómez (2013-2014), MEN (1998), MEN (2006), MEN (2015), en conjunto con planes de estudio y decretos que han hecho parte de la historia de la Educación Básica y Media colombiana en el área de Matemáticas. El apartado finaliza con una presentación del tratamiento de las ET en algunas fuentes de consulta con las cuales cuentan los Maestros de Matemáticas.

Atendiendo al intervalo histórico en el que se centra este apartado, el primer referente data del 17 de enero de 1951 fecha en la que se adoptó el plan de estudios para la enseñanza secundaria del país mediante el *Decreto 051*. El artículo primero registra la cultura mínima obligatoria[26] para cada una de las áreas del saber, (p. e., Sociales, Biología, entre otras). Así para el caso de Matemáticas, en el primer y segundo año se debía enseñar Aritmética, en el tercero Álgebra, en el cuarto Álgebra y Geometría, mientras que en los dos últimos años no se enseñaba Matemáticas. En este primer documento no se evidencia la presencia del estudio de la Trigonometría; además, debido a que no se ha hallado un plan de estudio con contenidos específicos de dicho momento no es posible afirmar sin en algunos de dichos cursos se enseñaban ET.

El Decreto 051 fue derogado por el Decreto *045 del 25 de enero de 1962,* esto luego de: i) la participación de Colombia en la Conferencia Regional de Punta del Este donde se señaló el atraso educativo en América Latina. ii) La realización del Primer Seminario sobre Problemas del Bachillerato realizado en Tunja en 1961; en este se propuso implementar cursos Matemáticas en los dos últimos años de escolaridad en particular, en el último se debería enseñar análisis matemático iii) El desarrollo de la Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática, de la cual emanó el propósito de plantear cambios en la enseñanza de las Matemáticas en el nivel secundario en América Latina (Gómez, 2014). La asignación de materias por cursos para la asignatura de Matemáticas fue: Aritmética y nociones de Geometría para los dos primeros (de bachillerato o primaria), Álgebra y Geometría en el tercero y cuarto, el quinto *Trigonometría* y elementos de Geometría Analítica, mientras que el último incluyó una iniciativa al análisis matemático.

Aunque para el desarrollo de este investigación no fue posible el hallazgo de un documento elaborado por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] contemporáneo a dicho decreto que

[26] Listado de áreas de conocimiento e intensidad horaria semanal obligatorio para cada año de escolaridad.

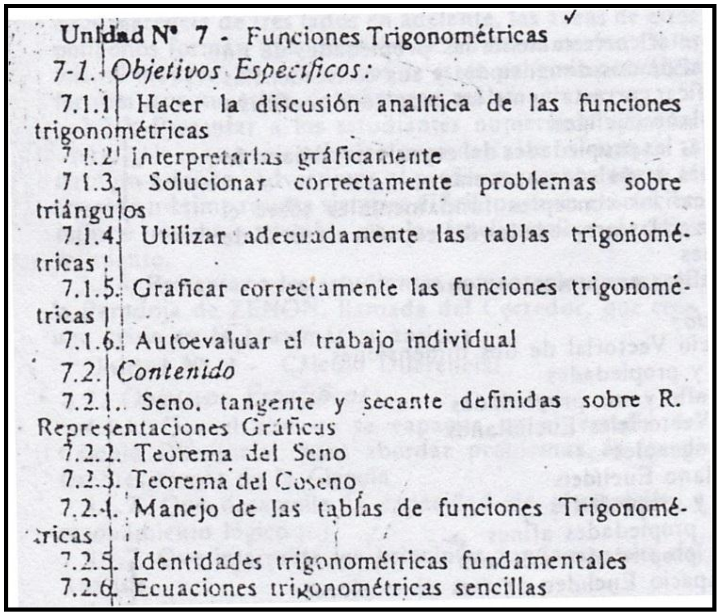
hiciera explícitos los contenidos de dichas asignaturas, Gómez (2014) expone que uno de los libros empleados para la enseñanza durante la vigencia de este decreto, fue *La Trigonometría Rectilínea* de Agustín Anfossi. Al realizar la revisión de este texto se encuentra que en la página 64 se hace alusión a ET, razón por la cual aunque no se haga explícito en los documentos curriculares, se asume que en los salones de clase los maestros dedicaban tiempo a la enseñanza de este asunto.

Sin embargo, el decreto 045 de 1962 desconoció los "avances" que a nivel mundial el currículo escolar atravesaba, la implementación de la enseñanza de la matemática moderna, Gómez (2014) afirma:

> Volviendo nuevamente al decreto 045 de 1962, se insiste que este no atendió las recomendaciones de la inclusión de la matemática moderna sino las recomendaciones del Seminario de Tunja, ya que Colombia envió como delegado a Arturo Ramírez Montufar a la conferencia de Budapest (Sangiorgi, 1962), y allí lo que presentó fue un informe con las conclusiones de Tunja (p. 7)

El decreto *080 de 1974* deroga el 045 y reestructura el plan de estudios de bachillerato. Mediante la denominada diversificación del bachillerato, se ofrecierón alternativas para la formación científica, técnica y humanística. No obstante, este último no dejaba de lado inconsistencias presentes en anteriores decretos entre ellas la falta de continuidad en los planes de estudio de primaria y bachillerato.

Así, en 1975 mediante *la Resolución 277* el MEN autorizó la enseñanza de la matemática moderna en nuestro país. El programa de Matemáticas adoptado por dicha resolución presenta objetivos específicos y contenidos para los 6 cursos que componen la Educación Básica y Media. En particular, para el objeto de esta investigación, es de resaltar lo estipulado por dicho plan de estudios en el curso V *Geometría Analítica y Trigonometría en la Unidad N° 7*, en la que se plantea el estudio de *Ecuaciones Trigonométricas sencillas (Figura 18),* convirtiéndose en el primer hallazgo curricular, que contempla de forma explícita el estudio de las ET; aunque no se especifica el carácter de sencillas que se da a estas ecuaciones.


Unidad N° 7 - Funciones Trigonométricas

7-1. *Objetivos Específicos:*

7.1.1 Hacer la discusión analítica de las funciones trigonométricas

7.1.2 interpretarlas gráficamente

7.1.3. Solucionar correctamente problemas sobre triángulos

7.1.4. Utilizar adecuadamente las tablas trigonométricas

7.1.5. Graficar correctamente las funciones trigonométricas

7.1.6. Autoevaluar el trabajo individual

7.2. *Contenido*

7.2.1. Seno, tangente y secante definidas sobre R. Representaciones Gráficas

7.2.2. Teorema del Seno

7.2.3. Teorema del Coseno

7.2.4. Manejo de las tablas de funciones Trigonométricas

7.2.5. Identidades trigonométricas fundamentales

7.2.6. Ecuaciones trigonométricas sencillas

Figura 18. Aparte de la Resolución 277 de 1975, unidad 7 del curso V

Fuente propia

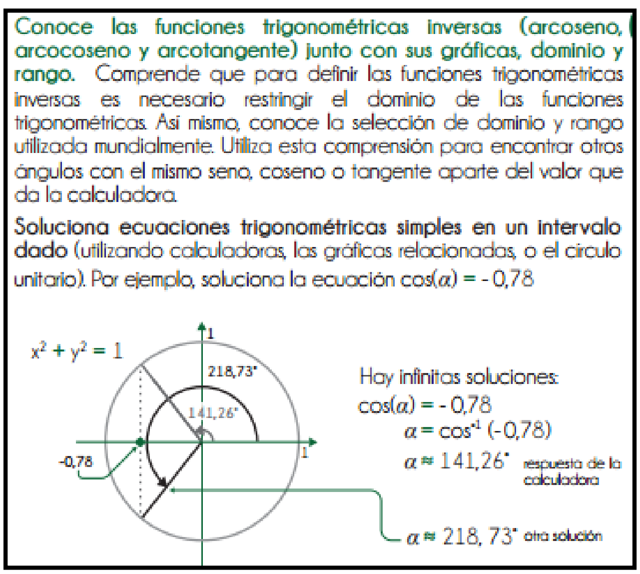
Los programas curriculares estructurados en la matemática moderna, presentaron grandes dificultades algunas de ellas asociadas a la falta de preparación de los profesores responsables de su enseñanza, la carencia de conceptos previos de los estudiantes, que les permitiera avanzar en los distintos cursos, la desconexión entre los contenidos de los programas, entre otros. Lo anterior, generó la elaboración de un nuevo plan de estudios, el cual fue dado a conocer por el gobierno nacional mediante el *Decreto 1002 de 1984* según Gómez (2014):

> Con este decreto, la enseñanza de la matemática moderna se fue extinguiendo, orientándose primero hacia la enseñanza de la matemática bajo el enfoque de sistemas, y luego como alternativa una segunda dirección hacia el movimiento de lo básico, donde se retomaba la matemática tradicional insertando la teoría de conjuntos como un tema suntuoso y no fundamental, reduciendo la lógica se redujo al mínimo con el predominio de las tablas de verdad (p. 165)

Durante la vigencia del Decreto 1002 de 1984 se redactó la nueva Carta Constitucional de 1991 y a partir de este expidió la ley 115 de 1994 conocida como Ley General de Educación. En esta se estipuló la autonomía escolar, la regulación del currículo mediante lineamientos generales para cada área de estudio diseñados por el Ministerio de Educación Nacional y la elaboración del plan de estudios de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional. En particular los

Lineamientos del área de Matemáticas[27] se publicaron en 1998 y en mayo del 2006 los *EBC en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Estos se convirtieron en la guía que instituciones de educación primaria, básica y media que hicieron uso de ellos para determinar las competencias mínimas de sus estudiantes. En relación con las ET no se encontró evidencia alguna de su abordaje en el plan propuesto, aunque se asume podrían estar implícitamente en uno de los estándares propuestos al finalizar el grado once (11): "*Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas*" (MEN, 2006, p. 88).

Finalmente, en el año 2015 el MEN publicó los DBA un conjunto de saberes y habilidades fundamentales que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, de primero a once, y en las áreas de Lenguaje y Matemáticas (p. 3). En particular, es en los DBA estipulados para grado once (11) donde nuevamente se encuentra alusión explícita a las ET acompañadas del adjetivo simples dando un ejemplo de ellas, la siguiente imagen muestra la anterior afirmación.


Conoce las funciones trigonométricas inversas (arcoseno, arcocoseno y arcotangente) junto con sus gráficas, dominio y rango. Comprende que para definir las funciones trigonométricas inversas es necesario restringir el dominio de las funciones trigonométricas. Así mismo, conoce la selección de dominio y rango utilizada mundialmente. Utiliza esta comprensión para encontrar otros ángulos con el mismo seno, coseno o tangente aparte del valor que da la calculadora.

Soluciona ecuaciones trigonométricas simples en un intervalo dado (utilizando calculadoras, las gráficas relacionadas, o el círculo unitario). Por ejemplo, soluciona la ecuación $\cos(\alpha) = -0{,}78$

Figura 19. Aparte de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) grado once (11º)

Fuente propia.

[27] Documento curricular colombiano mediante el cual el MEN orienta a las instituciones educativas para la elaboración de planes y programas de estudio.

La búsqueda del término ET en los diferentes documentos referenciados en este apartado permitió al grupo de investigadores observar como este concepto matemático aparece por primera vez como *Ecuaciones Trigonométricas sencillas* en la reforma curricular que emana de la denominada matemática moderna. Suponemos, por la revisión de diferentes textos, que el estudio fue constante en las aula a nivel de secundaria, aun cuando en documentos curriculares esto no se hace explícito hasta la publicación en el 2015 de los Derechos Básicos de Aprendizaje para grado once, en donde nuevamente se hacen presentes, pero esta vez como *Ecuaciones Trigonométricas simples.* La revisión realizada no ha dado justificación a los dos adjetivos que han acompañado el término ni al porqué de su presencia en la educación secundaria de nuestro país.

Por último, aunque este apartado está encaminado a identificar la presencia de las ET en la normativa educativa colombiana, con el fin de indagar sobre su presencia en algunas fuentes de consulta con las que cuenta el maestro de Matemáticas, a continuación, se presenta una recopilación del tratamiento que se da en estas fuentes a las ET, ya que, de alguna manera, reflejan lo que puede estar dándose en las aulas escolares.

3.3.2 REVISIÓN DE ALGUNAS FUENTES DE CONSULTA CON LAS QUE CUENTA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS ACERCA DEL TRATAMIENTO QUE SE DA A LAS ET[28]

El profesor de Matemáticas en su quehacer diario de planeación y ejecución de clase requiere de fuentes de consulta que le permitan validar, ampliar, gestionar, indagar y recordar diversos aspectos relacionados con un determinado tema matemático. Entre las muchas fuentes de consulta existentes, las más usuales y disponibles como primeros recursos de consulta del profesor de Matemáticas, son a libros de texto escolares, libros empleados en su propia formación profesional y páginas web. En cualquier caso, el profesor de Matemáticas recurre a lo que conoce del objeto, procedimiento o teoría matemática a estudiar para ampliar, validar o cuestionar (algunas veces) lo que estas fuentes dicen.

[28] Se incluye un análisis más detallado de esta sección en el Anexo 3

Los autores de este documento consideran, desde su experiencia, que con frecuencia el profesor de Matemáticas promedio colombiano, si está dentro de su plan de estudios la enseñanza de las ET, lo primero que hace es revisar el libro guía escolar de grado décimo para consultar cómo se aborda la solución de ET para posteriormente enseñar. Esta acción permite plantear posibles situaciones que se relacionan con el CPM; entre ellas, que el profesor: a) aprenda los métodos de solución mostrados en el libro ya que no conoce alguno; b) interprete lo planteado en el texto e incorpore lo que sabe para enriquecer la propuesta; c) esté en desacuerdo con lo planteado y vaya a otras fuentes; En otras palabras, el profesor de Matemáticas acude al libro de texto escolar o portador de saberes institucionalizados para ser enseñados y aprendidos, muchas veces, como un recurso de aprendizaje.

Lo anterior, pone en evidencia la necesidad de hacer una revisión a este tipo de fuentes de consulta, ya que son aquellas con las que cuenta el profesor de Matemáticas y la información allí encontrada influye directamente en sus conocimientos. A continuación, se hace una breve presentación sobre el tratamiento que se da a las ET en diferentes fuentes de consulta vigentes, con el propósito de brindar un panorama sobre el estado de este objeto matemático en las fuentes y como primera evidencia del asunto problema a investigar. En cada uno de los casos, se presenta la definición y el abordaje que se da a la ET, y los aspectos de tipo metodológico y matemático que destacan cada una de las fuentes consultadas.

3.3.2.1 Fuentes documentales: libros de texto escolar

En la consulta y análisis de este tipo de materiales se seleccionaron cuatro libros de texto escolar de grado décimo[29] de alta circulación pertenecientes a las editoriales SM, Santillana, Libros & Libros y Norma, los cuales son utilizados como recurso en la práctica docente. En ellos se identificó que, el abordaje que se da a las ET se caracteriza en general por:

[29] Los libros consultados fueron Matemáticas 10, (Alcaide et al, 2010), Glifos 10. Procesos Matemáticos (Arévalo et al, 2008), Los caminos del Saber Matemáticas 10 (Buitrago et al, 2013) y Nuevo Alfa 10 (Moreno & Restrepo, 2002)

- Asociar las ET a ecuaciones algebraicas donde la incógnita es una función o una razón trigonométrica.
- Para solucionar una ET es necesario conocer el dominio y la periodicidad de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación.
- Relacionar identidades trigonométricas y ET; en ocasiones, las primeras como caso particular de las segundas o como herramienta para solucionar ET más complejas.
- Los procedimientos para resolver ET son similares a los utilizados en la solución de ecuaciones algebraicas.
- Asumir que la solución de una ET es una tarea invariante consistente en encontrar un valor faltante que puede ser un ángulo (p. e., $senx = 0.5$), un número real (p. e., $sen\ 120^o = x$) o un conjunto de valores que satisfacen la ecuación (p. e., $sen^2x + 3senx + 2 = 0$).

No obstante, se evidencia una ruta metodológica que en algunos casos omite pasos o los desarrolla con poco grado de profundidad, como sigue:

1. Presentación de una situación problema inicial, (p. e., cálculos de distancias al sol, alturas de edificios, problemas de escaleras inclinadas, situaciones de Topografía, entre otras).
2. Solución de la situación y análisis de los resultados.
3. Definición de ET y algunas características.
4. Ejemplos de resolución de una ET.
5. Ejercicios de resolución de ET.
6. ET con una incógnita y con una función trigonométrica: lineal, cuadrática y racional.
7. ET con más de una función trigonométrica:
   a) Características de la ecuación y métodos de solución.
   b) Condiciones del conjunto solución.
   c) Ejemplos de resolución.
   d) Ejercicios y problemas de aplicación.

3.3.2.2 Fuentes documentales: libros empleados en formación profesional de Maestros de Matemáticas:

Se realizó la revisión de cuatro libros[30] generalmente empleados en las prácticas formativas de los docentes de Matemática. En estos se analizó el tratamiento que dan a las ET, aspecto diferente a lo estudiado con los textos escolares (abordaje de las ET y secuencia metodológica); esto, en tanto los autores de esta investigación identifican que las dos fuentes de consulta están dirigidas a poblaciones diferentes y por ende la presentación de un contenido matemático arraiga unas características especiales. Así en esta segunda fuente de consulta, el interés se centró en evidenciar los métodos propuestos para la solución de ET; de esto se concluyó que estos se rigen por "reglas básicas" que se exponen a continuación:

- Caso 1: Aislar la función trigonométrica en un lado de la igualdad y hallar la solución a la ecuación en el intervalo de $[0, 2\pi]$ para el caso del seno y coseno y de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en el caso de la tangente. Con lo anterior, el resultado general de la ecuación se expresa $a + np$ o $b + np$ donde p corresponde al periodo de la función trigonométrica involucrada. Cabe notar que las ecuaciones a las cuales se remiten los textos solo consideran una función trigonométrica.
- Caso 2: Si el texto se remite a ecuaciones que involucran dos funciones trigonométricas para hallar su solución se sugiere dividir a ambos lados de la ecuación por alguna de las funciones trigonométricas, luego de esto se espera que la solución de la ecuación se remita al caso 1.
- Caso 3: En las situaciones en las cuales el caso 2 no remita al caso 1, los autores sugieren hacer uso de las identidades trigonométricas y reglas de factorización. En algunos ejemplos se identifica una asociación clara entre el algoritmo de solución de una ET y una ecuación cuadrática.

Aunque en los textos los autores utilizan como parte de la solución de ET las identidades trigonométricas, esta herramienta solo es un paso previo al uso de reglas algebraicas que llevan al conjunto solución de la ecuación. Por otra parte, la periodicidad de las funciones trigonométricas es la única propiedad utilizada de forma recurrente para dar solución a una ET; esta es empleada como una forma de establecer en conjunto solución y no como una herramienta de análisis en las respuestas.

[30] Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría (Baldor, 2004), Precálculo. Matemáticas para el cálculo (Stewart, Redlin & Watson, 2007), Trigonometry Fourth, fully solved problems (Moyer y Ayers, 1991) y Precálculo (Sullivan, 1997).

3.3.2.3 Fuentes internet: sitios web especializados en Matemáticas.

Se revisaron cinco sitios web[31] que reportan definiciones acerca de las ET y se analizaron los aspectos que destaca en dicha definición; de esto se concluyó que:

- Las definiciones encontradas en sitios web mostraron menos rigor en relación con los otros dos tipos de documentos consultados; todas ellas se corresponden a definiciones simplificadas del término ET.
- En cuanto a lo que se puede deducir de los métodos de solución se encuentra una gran influencia de los métodos algebraicos para solucionar dichas ecuaciones; ninguna de ellas hace alusión a métodos diferentes.
- Algunas páginas aclaran que primero debe hacerse un tratamiento con identidades trigonométricas para luego proceder de manera algebraica. Esta afirmación es explícita en dos de las definiciones; solo una definición enfatiza en el hecho de que las ET son distintas a las identidades trigonométricas.
- Se advierte que para dar solución a una ET es necesario tener en cuenta el dominio y la amplitud del intervalo del periodo de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación sin dar mayor justificación sobre ello.

Lo anterior significa que se hace uso de procedimientos algebraicos para determinar los valores que satisfacen este tipo de igualdades no se evidencian otros tipos de solución. Estas revisiones permiten afirmar que definitivamente el estudio que se hace de las ET está referido principalmente a un tratamiento algebraico, centrado en el terreno algorítmico y sin ahondar sobre la naturaleza de estas ecuaciones, las características de la incógnita y su posible potencial formativo en la educación secundaria colombiana.

[31] Los sitios web revisados fueron: Campus de Educación Virtual de la Universidad Nacional (http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/fundamentacion/uv00009/lecciones_html/cap5/trigo12.html), Sector Matemática (http://www.sectormatematica.cl/proyectos/ecuaciones.htm), Descartes (http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/razones_trigonometricas_bcnt/ecua2.htm), Vitutor (http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_4.html) y campus de educación virtual de la Universidad de Antioquia – Colombia (http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php?id=87555)

Las evidencias sobre el cómo se conciben y tratan las ET en la escuela, revelan que en las Matemáticas escolares aún se desconoce el verdadero potencial formativo de algunos objetos que se tratan de forma rutinaria y sin sentido. En particular, el estudio de las ET desde otras perspectivas, como la histórica o la curricular, posibilita un abordaje diferente de estas en aula, pues se dejan de tratar como polinomios y emplear solo herramientas propias del álgebra para su solución. Todo lo anterior, permite reflexionar en relación a como estas fuentes de consulta aportan al CPM sobre el tema ET y si son suficientes para enriquecer el quehacer profesional de los maestros de Matemáticas.

4. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología empleada en el desarrollo de la investigación que se reporta en este documento y se incluyen diferentes argumentos que permiten al lector aclarar el porqué de las decisiones tomadas por los autores en relación con la recolección y análisis de los datos. Los temas abordados en este capítulo son: paradigma de investigación en el que se encuentra inscrito el trabajo, tipo de investigación, escenario específico, rol del investigador, rol de los participantes, momentos de recolección de información y se finaliza con la descripción de la herramienta analítica empleada para el análisis de los datos.

4.1 PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Atendiendo al objetivo de esta investigación y reconociendo que la comprensión del objeto de estudio en cuestión (los aportes de la historia de las ET al conocimiento de un grupo de maestros en formación avanzada) se alcanza a partir de la interpretación y caracterización de las diferentes ideas, saberes o creencias que los maestros en formación avanzada exponen de forma verbal o escrita a diferentes cuestionamientos, reflexiones y afirmaciones sobre ET, los autores de este documento inscriben esta investigación en un enfoque *cualitativo hermenéutico – interpretativo.*

El paradigma *interpretativo (naturalista)* pretende, como su nombre lo indica, la interpretación, comprensión y comparación de signos o fenómenos; estos son analizados a la luz de referentes teóricos previos o que se construyen de forma paralela a la investigación. Centra su objeto de estudio en los saberes de uno o un grupo de individuos; sus resultados no pretenden ser generalizables, procuran la comprensión dentro del contexto en el que se realiza el estudio y busca un contraste entre la acción y la práctica. Esta idea se incorpora en la investigación por medio de cuatro elementos preponderantes y diferenciadores: *i)* La investigación se centra en el análisis de signos que están presentes en afirmaciones orales o escritas de un grupo de maestros sobre ET. *ii)* El centro de la investigación es el individuo y sus saberes; es decir, el objeto de investigación son los saberes de los individuos (profesores en formación avanzada) *iii)* Se concibe el conocimiento humano mediado por un contexto específico; no se busca generalizaciones al respecto, de otros contextos o campos, sino una comprensión situada en el contexto de la población. iv) La comprensión de signos se realiza a partir un marco de referencia previo que se ajusta a la situación; para este caso, se estableció a partir de un estudio histórico sobre ET y los componentes del conocimiento del profesor recopilados por Pinto (2010); de este último se apropiaron y ajustaron los indicares requeridos para esta investigación.

De otro lado, el estudio de las ideas expuestas por Sampieri (2010) y Pinto (2010), permiten identificar elementos en esta investigación que la enmarcan en el *enfoque cualitativo*. A continuación, se describen:

- La recolección de datos pretende obtener los saberes y significados de un grupo de maestros sobre ET a través del lenguaje escrito o verbal, numérico y no numérico.
- Los métodos de recolección de información no son estandarizados ni totalmente predeterminados; fueron creados a partir de la observación de los investigadores al grupo población y según las necesidades del estudio.
- La investigación produce datos en forma de notas extensas, que llevan a descripciones detalladas sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas generado por sus saberes y experiencia (práctica docente y el estudio histórico de las Matemáticas en conjunto con, sus saberes previos, su formación en general e incluso sus creencias sobre la HM).
- No se efectúa un registro numérico de datos, fue necesaria la clasificación y asociación por medio de unidades de análisis establecidas con anterioridad o emergentes.
- Las preguntas que hacen parte de los diferentes instrumentos para la recolección de información no corresponden a cuestiones cerradas. En los cuestionarios, por ejemplo, se dio lugar a que los maestros en formación avanzada registraran sus ideas y saberes sobre diferentes aspectos relacionados con las ET sin poner restricciones para este tipo de respuestas. En las plenarias, los maestros expusieron sus percepciones sobre diferentes aspectos en donde expresaron sus ideas y creencias.
- Pretende una caracterización y reflexión sobre una población particular (estudiantes del seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas) nominados en este documento como *maestros en formación avanzada*; no la generalización de resultados que puedan ser aplicables a otro tipo de población; sin embargo, se reconoce el aporte reflexivo sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas.

- No se pretende la generación de teorías y los resultados de la investigación no pretenden ser ajustados a una teoría previa.

Al ser esta investigación cualitativa, inscrita en la perspectiva interpretativa y atendiendo al objetivo de la misma, se utilizaron algunos elementos de la metodología de *estudio de concepciones*. Esta decisión se tomó porque: *i)* el estudio de concepciones permite comprender lo que dicen, creen, piensan o saben los maestros en relación con las ET; *ii)* se propuso un marco de referencia previo; *iii*) se realizó una caracterización del conocimiento sobre ET que posee un grupo de maestros en formación avanzada; esto se asocia a una clasificación de saberes y concepciones.

Sin embargo, la metodología utilizada en este trabajo se define como una *metodología propia* en tanto pretendió la observación de posibles modificaciones al conocimiento que posee el profesor de Matemáticas en formación avanzada luego de un acercamiento histórico a las ET, en contraposición al estudio de concepciones el cual usualmente no pretende el análisis de transformaciones, por lo cual solo se tomaron algunos elementos de esta metodología. Otro argumento para considerar esta metodología como *propia*, es que los participantes del estudio no se encontraban en su ambiente natural, (p. e., en su práctica docente); la participación se dio en el desarrollo de un seminario de postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN] en el marco del programa de Maestría en Docencia de la Matemática [MDM]. Vale la pena aclarar que las técnicas empleadas buscaron la mayor comprensión de las ideas expuestas por los maestros, reflejado en su discurso y en las respuestas dadas a un cuestionario. De igual forma, se pretendió una integración de información que permitiera una mirada holística de la realidad estudiada.

4.2 ESCENARIO ESPECÍFICO

El escenario en el cual se desarrolló esta investigación fue el *Seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas* (electivo) ofertado en el segundo semestre del 2015 en la MDM de la Universidad Pedagógica Nacional. Este espacio académico contó con un total de 12 sesiones de clase presenciales, cada una con una intensidad de tres (3) horas semanales, de las cuales se utilizaron tres (3) sesiones para realizar la investigación que aquí se reporta (para ampliar la información del curso ver *Anexo 3*).

El objetivo principal del seminario fue:

> (…) contribuir a la constitución del conocimiento de los profesores de Matemáticas e investigadores en Educación Matemática, incorporando en este una reflexión histórico-epistemológica de sus creencias y concepciones sobre las Matemáticas, y promoviendo una conciencia sobre el uso y las implicaciones de la Historia y la Filosofía de las Matemáticas en el ejercicio docente e investigativo. (DMA-UPN, 2015, p. 2).

Con dicho fin y retomando ideas y perspectivas de disciplinas como la Historia y la Filosofía de las Matemáticas, el seminario abarcó tres temáticas principales: la historia de la demostración, la historia de la proporcionalidad y la historia de la Trigonometría. Fue durante el estudio de esta última temática donde se realizaron las intervenciones pedagógicas asociadas a esta investigación y la recolección de la información.

El **equipo de participantes de esta investigación** fue el conformado por los siete (7) estudiantes inscritos en el seminario, todos profesores de Matemáticas de la Educación Básica, Media o Superior (denominados aquí maestros en formación avanzada). Los estudiantes que participaron del Seminario tenían un rol activo dentro de la investigación, pues realizaban cada una de las actividades propuestas por el equipo de investigadores y sus participaciones y reflexiones escritas u orales se constituyeron en las fuentes de información. De antemano se reconoce que los participantes otorgan un papel relevante a la Historia de las Matemáticas en su formación, pues se registraron al Seminario de manera voluntaria, por intereses personales o profesionales.

Por su parte, el grupo de investigadores, lo conformaron tres profesores de Matemáticas, con título de Licenciado en Matemáticas, estudiantes del mismo programa de postgrado y del seminario que los participantes, con experiencia como profesores de grado décimo (ciclo V de Educación Media). Su rol durante todo el proceso investigativo fue activo, ya que fueron quienes diseñaron el cuestionario, las actividades y las secuencias de intervención, registraron y analizaron los datos recolectados; y asumieron el papel de docentes en dos sesiones de seis (6) horas cada una, en las cuales, se abordaron aspectos referidos a la historia de la Trigonometría y las ET.

4.3 FASES DE INVESTIGACIÓN

El desarrollo de la investigación se realizó en distintas fases; estas permitieron obtener la información necesaria para estructurar las intervenciones de clase, recolectar información y realizar un proceso de análisis.

4.3.1 FASE 1. CREACIÓN DE UNIDADES DE ANÁLISIS PRIMARIAS

Atendiendo a la necesidad de *i)* orientar correctamente la construcción de los instrumentos para la recolección de información y *ii)* tipificar las concepciones, creencias, saberes o ideas sobre ET de los maestros en formación avanzada, se hizo necesario la elaboración de un marco de referencia que permitiera alcanzar estos dos objetivos. Para ello se realizó el contraste entre los elementos hallados en la historia de las ET y la recopilación de los componentes del CDC realizada por Pinto (2010). Así, se apropian como *unidades de análisis* las tres categorías del CPM descritas en esta propuesta:

- *i.* *Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las Matemáticas.*
- *ii.* *Conocimiento del contenido matemático a enseñar.*
- *iii.* *Conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático.*

para cada una de estas, se establecen *sub-unidades de análisis*, tomadas de las dimensiones definidas por el autor para cada categoría (ver *Tabla 3* del apartado 3.2.1), e *indicadores* que corresponden a una adecuación realizada por los investigadores, de los indicadores[32] presentados en la propuesta del CDC de Pinto (2010), particularizando en la historia de la Trigonometría y las ET, como se muestra en la siguiente tabla:

[32] Pinto (2010) utiliza tres categorías para analizar el CDC las cuales agrupa en un Sistema que denomina Sistema de Dimensiones e Indicadores.

Tabla 4 Unidades de análisis primarias, sub-unidades e indicadores relacionados con la Trigonometría y las ET

UNIDAD DE ANÁLISIS	SUB UNIDAD DE ANÁLISIS	INDICADOR
Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las Matemáticas	Conocimientos sobre las representaciones instruccionales	Identifica algunos hechos que originan y fundamentan las representaciones empleadas para las ecuaciones (*sin* 36°), desde diferentes procedimientos, geométricos y simbólicos, encuentra la solución de ecuaciones reconociendo esta como una posibilidad de potenciar el aprendizaje de sus estudiantes.
		Aporta a las traducciones entre representaciones que realiza el estudiante
		Conecta y relaciona aspectos de la historia (métodos de solución-pensamientos) de las Matemáticas con la propuesta de los estándares nacionales en cuanto al desarrollo de pensamientos y los métodos de solución.
		El repertorio que otorga la historia de la ET son los métodos de solución de Ecuaciones, lo que significa una comprensión en las distintas maneras de abordar problemas matemáticos.
		Reconoce en la historia un orden de aparición de los conceptos los cuales se pueden relacionar con el desarrollo del proceso de aprendizaje del estudiante, así como las posibles dificultades que se producen en el mismo, posibilitando un plan de contingencia y generación de alternativas para afrontarlas.
	Conocimiento de los materiales curriculares	La consulta en la historia proporciona elementos y recursos para abordar las ET en la práctica docente.
		La consulta en la historia proporciona un contexto interdisciplinar que conecta otras ciencias con las Matemáticas.
		La consulta en la historia proporciona criterios para el uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de las ET.
	Conocimiento sobre el currículo matemático	La historia reflexiones sobre el desarrollo de los contenidos en relación con el currículo actual de Matemáticas.
		La historia permite crear nexos entre las Matemáticas y otras disciplinas en este caso la física (astronomía) allí puede encontrar un escenario para materiales y recursos o la aplicación de las ET.
		La historia de las Matemáticas presenta una visión de contenido que puede enriquecer el currículo escolar de Matemáticas.
		Se relacionan la Trigonometría con la astronomía para realizar cálculos de distancias entre cuerpos celestes y así

Conocimiento del contenido matemático a enseñar	Conocimientos sobre la actividad matemática general	realizar cálculos en ubicaciones marítimas y cartas de navegación.
		Actividad matemática: mejorar la aproximación de tablas de cuerdas, medir.
		La evolución en los métodos para dar solución a algunas ET: geométricos, numéricos y analíticos.
		Los cambios en las formas de las ET que se resuelven en los periodos históricos identificados.
		En la cultura árabe se evidencia el interés en mejorar los cálculos astronómicos asociados a sus creencias filosóficas.
		Las culturas representativas asociadas al tratamiento de las ET: griega, árabe, hindú.
		La búsqueda de la rigurosidad en la precisión de las aproximaciones (Valor estético del contenido a enseñar).
	Cocimiento por tópico especifico matemático	La ET $sin1° = x$, $sin18° = y$ y $sin36° = z$ son ejemplos prototipos de Ecuación
		Las ecuaciones trigonométricas están relacionadas con la solución de ecuaciones cubicas algebraicas.
		Una forma de resolver algunas ET consiste en utilizar métodos numéricos, uso de logaritmos y geometría euclidiana.
		El uso de identidades en la resolución de ET de la forma $sin(a) = x$, con a conocido.
		Se reconocen tipos de ecuación y cómo evoluciona $sina=x$, $sinx=a$ de la misma y los métodos de solución.
	Conocimiento sobre el currículo matemático	Existe una correspondencia secuencial entre los hallazgos encontrados en la Historias de las ET y la estructura temática del currículo de Trigonometría
		Permite entender fenómenos que se han modelado con las ecuaciones trigonométricas, relacionado al estándar *“Describo y modelo fenómeno periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas”*
		Para solucionar ecuaciones trigonométricas en la escuela se usan identidades trigonométricas en correspondencia con algunos de los métodos encontrados en la escuela, se cuestiona el por qué no se incluyen esos otros métodos en la escuela.
Conocimiento de los de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático	Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en Matemáticas	Reconocer contextos desde la historia que pueden ser afines a los interese, motivaciones y expectativas de los estudiantes (contextos de astronomía, topografía, arquitectura, física, entre otros).
	Conocimiento de estrategias instruccionales	La historia aporta estrategias instruccionales que permiten cambiar las creencias y concepciones inadecuadas errores y dificultades (los distintos métodos, para que no caigan en la creencia de único uso de las identidades para dar solución a ecuaciones).

Cabe resaltar, que los indicadores son prefigurados, es decir, no emergen del análisis de los datos, sino que se definen a partir de la integración de los elementos conceptuales reportados en el marco de referencia (hitos de las ET, las ET en el currículo y el modelo del CDC). Se definen como:

> Características distintivas del fenómeno objeto de estudio (CDC), las cuales son susceptibles de segmentarse y codificarse en un plano global y específico del CDC, a partir de las cuales se obtienen los datos y fenómenos en forma de ideas y conceptos definidos como necesarios para el estudio del CDC. (Flick, 2004 citado por Pinto, 2010, p. 69)

4.3.2 FASE 2. DISEÑO Y APLICACIÓN DE CUESTIONARIO

Atendiendo al enfoque de esta investigación, se reconoce la importancia y la preponderancia de las técnicas e instrumentos que fueron parte de la investigación; es así como se concertó entre los tipos de instrumentos, su papel en cada momento de la investigación y cómo estos facilitarían, o no, la búsqueda de los datos.

Puesto que las principales técnicas para la búsqueda de datos cualitativos que se consolidaron como parte importante en la investigación fueron la observación, la entrevista, la recolección de documentos y materiales (Sampieri, 2012), fue preciso generar instrumentos que permitieran la puesta en acción de esas técnicas. Además, dado que el proceso de recolección no fue lineal, sino que se produjo de forma simultánea con el análisis, se plantearon técnicas que permitieran esas acciones de forma paralela. Así, se optó por dos técnicas de recolección de información: la observación de sesiones grupales y el cuestionario (Sampieri, 2012); para ello se aplicaron dos instrumentos:

El registro documental previo sobre la historia de las ET, presentado en el marco de referencia y la definición de los indicadores para cada uno de las tres unidades de análisis permitieron estructurar un ***cuestionario*** encaminado a reconocer en el grupo de maestros en formación avanzada sus conocimientos sobre algunos aspectos matemáticos de las ET, su enseñanza, aprendizaje y la importancia que le otorgan en el currículo. El cuestionario mixto estuvo compuesto por diez (10) preguntas unas de selección múltiple y otras de respuesta abierta cada una enmarcada en uno o más indicadores del CPM. Esto, en tanto los hitos, reportados en el marco de referencia, permitieron establecer algunos aspectos (indicadores) del conocimiento de la Trigonometría y las ET que deberían ser de dominio del profesor de matemáticas, los cuales se constituyeron en un insumo para la construcción de las preguntas del cuestionario, como se describe de forma breve en la siguiente tabla:

Tabla 5 Relación entre preguntas del cuestionario, hitos históricos de las ET y evidencias de indicadores

PREGUNTA DEL CUESTIONARIO	ASPECTO RELACIONADO CON LOS HITOS	INTENCIÓN
1	La historia aporta representaciones simbólicas de ET.	Identificar la representación simbólica que asocian los maestros cuando se habla de ET.
2	La historia aporta una transformación en la concepción de ET, por ejemplo, en un primer momento se trató como una expresión numérica (indios y árabes), como un recurso geométrico (griegos) y como una expresión simbólica (edad media)	Reconocer las definiciones de ET que poseen los profesores según sus saberes previos a un curso de HM.
3	La historia aporta métodos para dar solución a esta ET mediante series, aproximaciones y métodos geométricos.	Identificar estrategias de solución (previas a la intervención de la Historia) que utiliza el maestro para resolver estas ET.
4 5	La HM aporta a que los maestros contextualicen las ET para el trabajo que desarrollan en el aula.	Reconocer usos y contextos matemáticos que los maestros atribuyen a las ET *sin* haber recurrido a la HM. Contrastar los usos de las ET en la HM con los usos reconocidos por los maestros. Identificar si los maestros identifican que la HM permite contextualizar este contenido para el aula.
6	La HM aporta elementos que amplían la consideración y la pertinencia del tema en la Matemática Escolar (Contextos de aplicación), por ejemplo, su vínculo con el cálculo diferencial.	Reconocer la coherencia con que relaciona al currículo con los contextos donde se puede aplicar el tema específico. Además, caracterizar las razones con las que argumenta la pertinencia o no del contenido en el currículo.
7	La HM justifica el desarrollo didáctico de las ET en el aula.	Contrastar el desarrollo histórico de las ET con el trabajo que desarrollan los maestros en el aula de clase al abordar este tipo de conceptos.

		Identificar si los maestros reconocen la intención y diferencia entre este tipo de ecuaciones y el cómo abordarlas en el aula, esto sin haber tenido un acercamiento con la Historia de las ET
8	La HM aporta al maestro en la construcción de secuencias didácticas para enseñar ET.	Identificar las relaciones entre conceptos que un maestro considera relevantes para el desarrollo de ET en el aula de clase y los que desde la Historia de las ET. se han empleado. Considerar si los procedimientos empleados por los maestros en el aula en la solución de ET responden a diferentes procesos, numéricos, algebraicos, geométricos.
9	En la HM se puede evidenciar cómo en el uso de las ET en cada hito histórico identificado era necesario que quien la utilizaba contara con unos saberes matemáticos previos (conocimientos geométricos como cuerdas, operar logaritmos, conocer identidades, entre otras).	Identificar la secuencia metodológica que utiliza el profesor de matemáticas para abordar el tema de ET. Identificar la dependencia o no de otros temas de trigonometría para enseñar ET en el aula (saberes previos que al criterio del docente debe poseer un estudiante).
10	En las evidencias históricas la naturaleza de la solución de una ET se asocia aspectos de la periodicidad, valores angulares y mediciones de cuerdas, pero no sólo a números reales que cumplen la condición de la igualdad en la ecuación.	Identificar si el maestro considera las ET una extensión de las ecuaciones algebraicas o son dos tipos de ecuaciones diferentes. Identificar para el maestro que naturaleza tiene la solución de una ET

El cuestionario se sometió a una prueba piloto y a la revisión y análisis por parte de expertos. En el primer caso se aplicó a cuatro (4) docentes de Matemáticas, con distintas experiencias de formación profesional, con el fin de identificar variables tales como: tiempo empleado para dar solución, anticipar posibles respuestas, y la comprensión de los ítems e instrucciones del cuestionario. En el segundo caso, se pidió a dos expertos la revisión de los objetivos, la pertinencia de las preguntas a la luz de las intenciones en relación con las unidades de análisis preliminares y las expectativas de datos que se esperaban reconocer.

Cabe destacar que los expertos seleccionados son profesores universitarios formadores de profesores, el primero de ellos es candidato a Doctor y su trabajo académico ha girado en torno al campo de la EPM y la Historia de las Matemáticas, fue además el docente encargado del seminario de Historia y Epistemología donde se desarrolló la investigación. El otro experto es

Doctora en Didáctica de las Matemáticas con un amplio recorrido académico, con grandes reconocimientos en el campo educativo, siendo un referente nacional en el campo de la Educación Matemática. El cuestionario en su primera versión se puede ver en el *Anexo 5.* Las sugerencias de expertos, las observaciones sobre las variables identificadas en los cuatro (4) docentes al dar solución al instrumento piloto y algunas consideraciones de los investigadores al revisar las respuestas dadas por los docentes, contribuyeron al refinamiento del cuestionario (la versión final del cuestionario se puede ver en el *Anexo 6)* y posteriormente fue implementado con los maestros en formación avanzada en una sesión de dos (2) horas.

4.3.3 FASE 3. REVISIÓN PRELIMINAR DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

Posterior a la fase anterior, los investigadores realizaron un análisis a las respuestas dadas por los maestros en formación avanzada al cuestionario; esto con el objetivo de identificar elementos que permitieran estructurar las actividades siguientes, refinar las unidades de análisis y caracterizar los saberes, creencias o concepciones que estos maestros tenían antes de llevarse a cabo un trabajo predeterminado acerca de la historia de las ET.

4.3.4 FASE 4. DISEÑO Y EJECUCIÓN DE INTERVENCIONES

Basados en los resultados de la fase anterior, se planearon e implementaron dos secuencias de intervención en el seminario Historia y Epistemología de las Matemáticas. Estas pretendían relacionar la Historia de las ET con las preguntas propuestas en el cuestionario. Por la flexibilidad de la metodología de esta investigación, se asumieron otros instrumentos para la recolección de información que no estaban previamente establecidos, sino que surgieron como necesidades de apoyo en las sesiones de trabajo. Así para las ***intervenciones*** (ver *Anexo 7* y *Anexo 8*) cada maestro en formación avanzada generó documentos escritos denominados ***tarea*** (ver *Anexo 9*). Para realizar el registro de las intervenciones se emplearon grabaciones de audio y video, mientras que para la información escrita se tomó como referente las tareas escritas por los maestros en formación avanzada.

A continuación, se muestran apartes de dos de las actividades propuestas, la primera corresponde a la intervención estructurada 1 y la segunda a la tarea originada como complemento a la misma:

Intervención estructurada 1:

7. **MOMENTOS:** A continuación, se describe los momentos de la sesión:

Momento 1. Lectura del documento de trabajo

Previo a la sesión presencial los estudiantes deberán realizar la lectura de Smith (1952), con esto se busca contextualizar a los participantes del seminario en el desarrollo histórico de la Trigonometría. La socialización del documento se realizará de forma grupal, con el fin de identificar hechos históricos que han permitido el cambio de concepción en el desarrollo de la Trigonometría.

Momento 2. Introducción

Se entrega a cada estudiante tres tiras de papel y un marcador y se pide que escriban en cada tira un hecho, avance o idea que considera fue importante en el recorrido histórico que presenta Smith (1925) en relación con la trigonometría. Luego, debe pasar al tablero e intentar ubicarlo en la línea cronológica que presenta el docente y mencionar el porqué de esta ubicación.

Figura 20. Aparte de la Intervención estructurada 1.

Fuente propia

El momento 2 buscó alcanzar el primer objetivo propuesto en la secuencia de intervención, reconocer los principales elementos y hechos que originaron a lo largo de la Historia un cambio de concepción en la idea de Trigonometría (hitos).

Tarea:

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Maestría en Docencia de la Matemática – 2015-II
Historia y Epistemología de las Matemáticas

HITOS EN LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

El considerar como una ciencia analítica a la trigonometría y ser reconocida con dicho nombre; se puede situar tal acontecimiento en el siglo XVII, después del desarrollo del simbolismo algebraico. Sin embargo, en momentos y autores anteriores se pueden evidenciar indicios del estudio y cimientos de la trigonometría, es por ello, que a continuación se hace una breve alusión de algunos de esos momentos y autores que fueron significativos para el surgimiento de la trigonometría tal y como es conocida hoy en día.

Figura 21. Aparte de la tarea emergente 1. Hitos de la Historia de la Trigonometría.

Fuente propia

Esta tarea buscó puntualizar sobre los aspectos que los maestros en formación consideraron relevantes en el estudio del documento previamente propuesto.

El diseño de las intervenciones se fundamentó en el análisis de las respuestas al cuestionario preliminar y atendiendo a la unidad primaria de análisis e indicadores que se habían elaborado. Estas se desarrollaron con el propósito de identificar los conocimientos de los profesores sobre las ET; luego de un acercamiento a documentos que trataban sobre historia de la Trigonometría y las ET, buscando signos que permitieran reconocer indicadores sobre el CDC y los aportes de la HM. De allí la necesidad de implementar en las secuencias intervención, grabaciones en video que capturaran en tiempo real fragmentos en los cuales se evidenciaran datos relevantes para el análisis y permitieran describir el CPM referido a las ET.

4.3.5 FASE 5. REFINAMIENTO DE LAS UNIDADES DE ANÁLISIS Y ELABORACIÓN DE CÓDIGOS

Durante el desarrollo de la investigación, surgieron algunas modificaciones a la estructura de las unidades de análisis primarias propuestas en la fase 2. Esto debido a que, en un análisis preliminar de la información recolectada en las intervenciones y tareas, se evidenciaron otros indicadores del CDC propuestos por Pinto (2010), que en un principio no fueron tomados en cuenta por los autores de esta investigación. Así, en esta fase se consolida una propuesta final constituida por tres unidades de análisis, ocho sub-unidades de análisis y veintiún indicadores como se muestra a continuación:

Tabla 6 Unidades de análisis, sub-unidades e indicadores finales

UNIDAD DE ANÁLISIS	SUB-UNIDAD DE ANÁLISIS	INDICADOR

<table>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento del contenido matemático a enseñar</td><td>Conocimiento sobre la actividad matemática general: Historia de la Trigonometría y las ET</td><td>– Contextos donde se desarrolló la Trigonometría o las ET (p. e., navegación, Astronomía, entre otras.)
– Principales actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría (p. e., mejorar la aproximación de tablas, hacer mediciones, entre otras.)
– Evolución en los métodos para dar solución a algunas ET (p. e., geométricos, numéricos y analíticos)
– Cambios en las concepciones de la Trigonometría (objetos y usos)
– Influencia de los intereses culturales y creencias filosóficas para mejorar cálculos y procedimientos trigonométricos
– El tratamiento de las ET que se dio en las culturas o civilizaciones más representativas (p. e., griega, árabe, hindú, etc.)
– La búsqueda de la rigurosidad en la precisión de las aproximaciones</td></tr>
<tr><td>Conocimiento por tópico especifico matemático: Ideas Matemáticas de las ET</td><td>– Atributos de las ET (p. e., definición, tipos de ET, características de las ET, etc.)
– Ejemplos de prototipos de ET
– Relaciones de las ET con otros conceptos matemáticos (p. e., funciones, periodicidad, etc.) dadas sus relaciones Matemáticas
– Métodos y estrategias de solución de ET
– Diferentes representaciones de las ET (p. e., numérica en tablas de valores, algebraica o gráfica)</td></tr>
<tr><td>Conocimiento sobre el currículo matemático: pertinencia desde la perspectiva matemática de las ET en el currículo</td><td>– Conocimiento de las justificaciones para aprender ET desde las Matemáticas y su evolución
– Conceptos, nociones y procedimientos matemáticos necesarios para el estudio de las ET dadas sus relaciones curriculares.
– Conocimiento de las justificaciones Matemáticas para aprender ET desde los documentos normativos curriculares (p. e., la relación de las ET con los procesos de estimación, modelación, fenómenos periódicos, etc.)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las Matemáticas</td><td>Conocimiento sobre las representaciones instruccionales</td><td>– Conocimientos de la secuencia metodológica para enseñar ET</td></tr>
<tr><td>Conocimientos de los materiales Curriculares</td><td>– Conocimiento sobre el tratamiento de las ET en los materiales curriculares (p. e., libros de texto)</td></tr>
</table>

	Conocimientos sobre el currículo matemático: pertinencia desde la perspectiva didáctica/instruccional de las ET en el currículo	– Correspondencia secuencial entre los hallazgos encontrados en la Historia de las ET y la estructura temática del currículo de Trigonometría – Conocimiento de las justificaciones curriculares de enseñar ET (p. e., razones del porqué las ET están en el currículo y en el plan de estudios de grado décimo)
Conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático	Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en Matemáticas	– Alusión a la necesidad de aprender ET basado en características cognitivas de los estudiantes (concepciones, intereses, expectativas)
	Conocimiento de las estrategias curriculares	– Estrategias instruccionales basadas en el proceso de aprendizaje que permiten cambiar las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades.

Posterior a ello, se realizó una actividad de verificación de los objetivos de cada instrumento (*Figura 22*) que permitió establecer una posible correspondencia entre los indicadores propuestos para cada sub-unidad de análisis y las preguntas del cuestionario (CI), los momentos (M1, M2, …) de cada intervención (GS1, GS2) y el propósito de las tareas (T1, T2).

PREVIO HM

- **Cuestionario:** este instrumento mixto compuesto por 10 preguntas (abiertas, de selección multiple,entre otras), buscó reconocer los saberes previos de los maestros en formación avanzada sobre las ET.

POSTERIOR HM

- **Intervención 1:** el trabajo de esta sesión de 6 horas tuvo la intención de los maestros en formación avanzada reconocieran los principales elementos y hechos que originaron a lo largo de la historia un cambio de concepción en la idea de trigonometría (hitos), estudio a partir del estudio de documentos histócos como el de Smith (1925).
- **Tarea Emergente:** cada maestro en formación avanzada realizó un escrito de una página en el cual expuso y argumento cuál(es) fue(ron) el(los) hecho(s) que considera marcaron hitos en el cambio de concepción de la idea de Trigonometría, a partir de lo trabajado en la intervención 1.
- **Tarea 2:** previo a la sesión de trabajo 2 cada maestro en formación avanzada hizo lectura de un documento referido a un método de solución de ET y realizó un escrito en dónde dió respuesta a algunos interrogantes encaminados a caracterizar el contexto, la intención, el proceso y algunos aspectos curriculares involucrados en el método asignado.
- **Intervención 2:** la sesión de trabajo de 6 horas buscó caracterizar algunos procedimientos de solución de ET hallados en la HM con el objetivo de que el maestro en formación avanzada reflexionara sobre: i) su quehacer pedagógico en el aula cuando enseña ET, ii) sus conocimientos sobre el tema, y iii) el aporte que hace la HM a su formación profesional.

Figura 22. Breve descripción de los objetivos de los instrumentos de investigación

Fuente propia.

Un ejemplo de lo anterior, se muestra en la siguiente figura (ver la tabla completa en el *Anexo 10)*:

				ANTES HM	DESPUÉS HM			
					INTERVENCION 1		INTERVENCION 2	
UNIDAD	**SUB-UNIDAD**	**SUSTENTO TEORICO (Pinto, 2010)**	**INDICADOR**	**CI**	**GS1**	**T1**	**T2**	**GS2**
Conocimiento del contenido matemático a enseñar **CoMatEns**	Conocimiento sobre la actividad matemática general: Historia de la Trigonometría y las ET **ConAcMatG**	– *Conocimiento de la historia de la disciplina*, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos. – *Conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas* en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico.	Contextos donde se desarrolló la Trigonometría o las ET (p. e., navegación, Astronomía, entre otras.) – **CtxTriET**	P4, P5	M1, M2	SI	P3.2	M2, M3P4, M3P5
			Principales actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría (p. e., mejorar la aproximación de tablas, hacer mediciones, entre otras.) – **AcTri**	P4	M2	SI	P3.5	M2, M3P4
			Evolución en los métodos para dar solución a algunas ET (p. e., geométricos, numéricos y analíticos) – **EvMetET**	NO	NO	NO	P3.4	M2, M3P2

Figura 23. Ejemplo de Unidad de Análisis vs. Instrumentos.

Fuente propia.

Por último, se creó la nomenclatura de codificación para las unidades, sub-unidades e indicadores como se muestra en el *Anexo 11.*

4.3.6 FASE 6. SELECCIÓN DE LA INFORMACIÓN Y CONSTITUCIÓN DE LOS DATOS

Esta fase consistió en la sistematización de la información acopiada por los distintos instrumentos aplicados (cuestionario, documentos escritos (tareas), videograbaciones), la constitución, codificación y análisis de datos. Inicialmente en el software Atlas.ti se incorporaron los instrumentos de recolección de información; es decir, los cuestionarios resueltos por cada maestro en formación avanzada, las videograbaciones de cada intervención y los documentos escritos (tareas) emergentes de las intervenciones. Posteriormente, se seleccionaron fragmentos de información que al juicio de los autores daban evidencia de los indicadores propuestos y constituyen el conjunto de datos de la investigación, estos se codificaron para luego crear los mapas de relaciones semánticas en el software.

Cabe resaltar que, en esta investigación, un código corresponde a la unión de tres nomenclaturas: la asignada a la unidad de análisis, a la sub-unidad y al indicador. En el software se resume solo con la nomenclatura este último (*Figura 24*), por el proceso de anidación que en el programa se realiza.

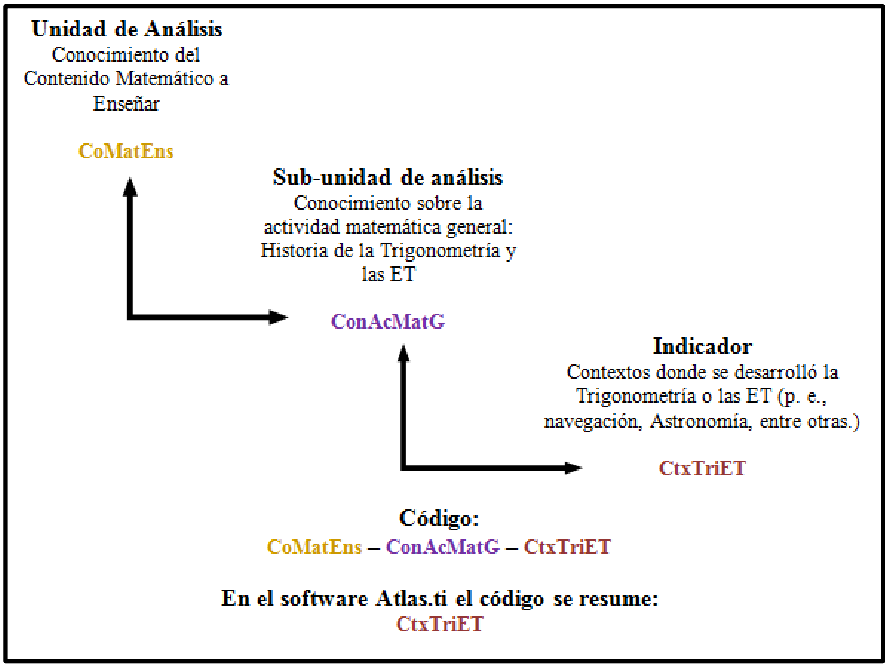


Figura 24. Ejemplo de codificación

Fuente propia.

Al iniciar el proceso de codificación se hizo necesario hacer una extensión de algunos indicadores; esto con el fin de describir algunas características particulares que se hallaron en los fragmentos de información. Por ejemplo, para el indicador [*AcTri] principales actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría (p. e., mejorar la aproximación de tablas, hacer mediciones, entre otras.),* se crearon los siguientes sub-códigos que especifican las actividades Matemáticas referidas por los maestros en formación avanzada como: medir ángulos [Med – ángulo], medir longitudes [Med- Long], entre otros:

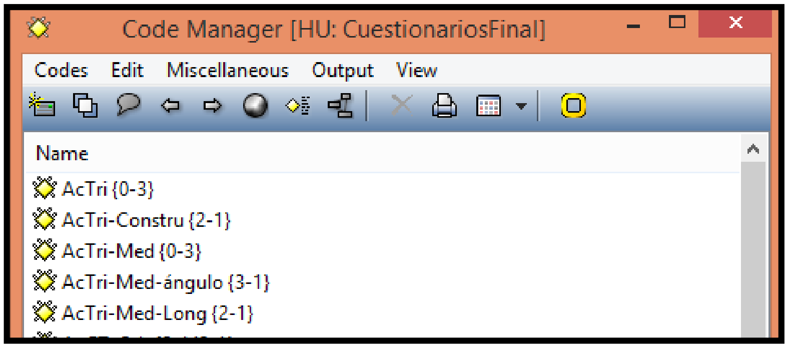


Figura 25. Ejemplo de sub-códigos para el código ActTri.

Fuente propia.

Para la selección de la información se asociaron códigos y sub-códigos a fragmentos en los cuales se identificaban uno o más indicadores de las unidades de análisis. Luego, el software permitió la elaboración de una red semántica en la cual se presentan los fragmentos codificados y las conexiones entre unidades, sub-unidades e indicadores. Para algunos de los indicadores se construyeron dos redes semánticas. La primera, incluye los fragmentos codificados del cuestionario en el momento previo al trabajo con la HM (PrevioHM). En la segunda, se codificaron las tareas y videograbaciones de las sesiones de clase, que se ha denominado como momento posterior al trabajo con la HM (PosteriorHM). Adicional a ello, se realizó un registro de frecuencia porcentual para cada uno de los códigos y sub-códigos que se utilizó como insumo para realizar un análisis comparativo entre los dos momentos de la investigación.

A continuación, se muestra un ejemplo de la codificación realizada en uno de los cuestionarios incorporados en el software y de la red para el indicador *Contextos donde se desarrolló la Trigonometría o las ET* [CtxTriET]:

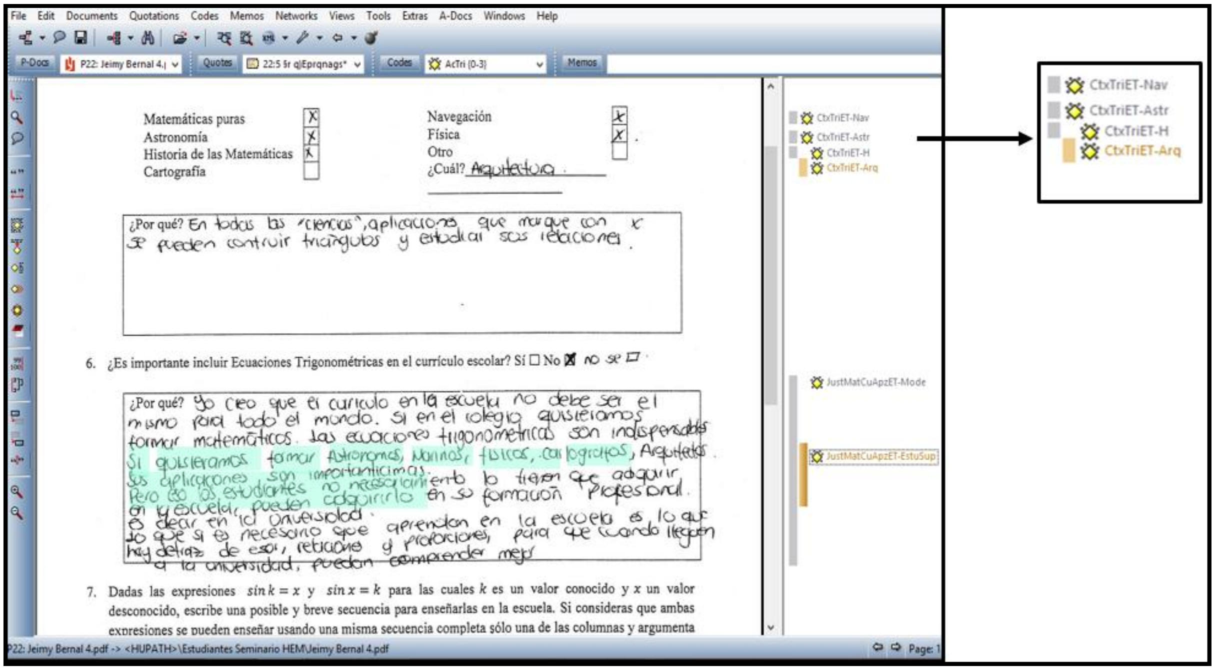


Figura 26. Ejemplo de codificación de un cuestionario.

Fuente propia.

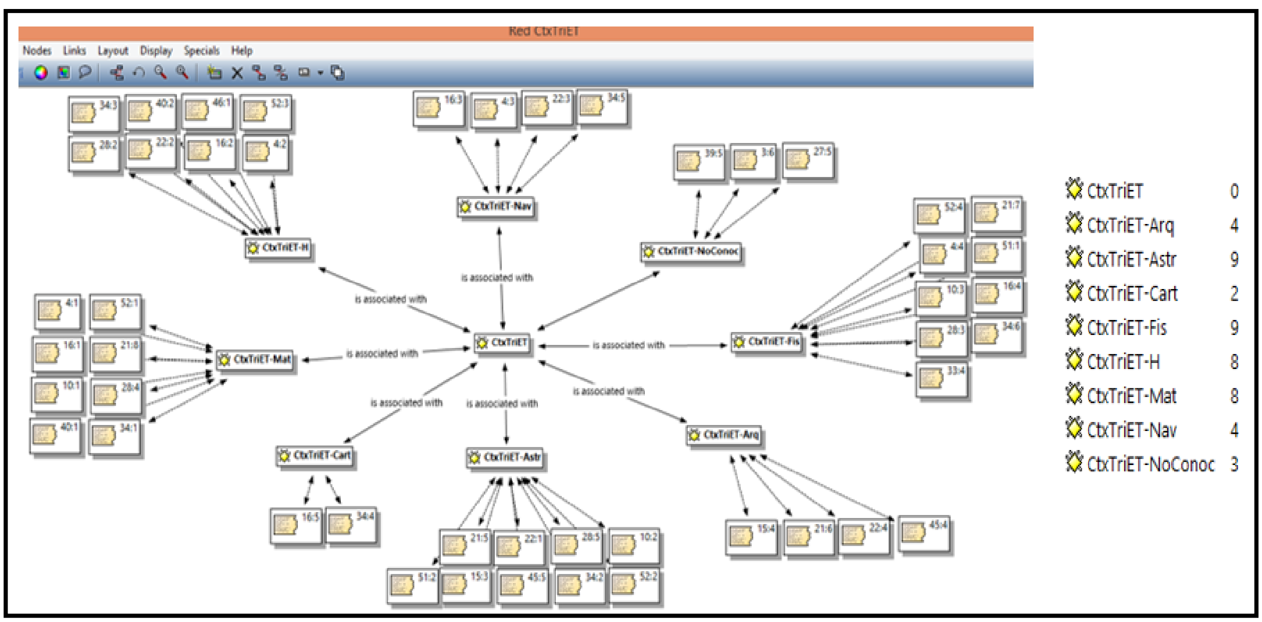


Figura 27. Ejemplo de una red semántica para el indicador CtxTriET.

Fuente propia.

Cabe resaltar que, la red semántica permitió de forma detallada analizar aspectos o hechos vinculados con la pregunta de investigación. Finalmente, estos microanálisis se cruzaron en la herramienta analítica para cada sub-unidad y con ello se elaboraron las respectivas conclusiones.

4.3.7 FASE 7. ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos se realizó en tres momentos. El primero de ellos, buscó generar conclusiones para los distintos indicadores asociados a los fragmentos tomados de los cuestionarios; estos resultados sirvieron de fundamento para el análisis del CPM previo a las intervenciones realizadas sobre historia de la Trigonometría y de las ET.

El segundo momento permitió generar conclusiones en relación al CPM posterior a las intervenciones sobre la historia de la Trigonometría y las ET, y se tuvo en cuenta la aparición de indicadores que no hicieron parte del primer momento de esta fase. En el tercer momento se realizó una comparación entre los resultados de los dos momentos anteriores, en busca de posibles transformaciones o ampliaciones del CPM que se dieron a través del estudio de la HM acorde con el objetivo de esta investigación. En el capítulo de análisis de datos se describe en detalle los resultados de esta fase.

4.4 HERRAMIENTA ANALÍTICA

Para establecer una herramienta analítica que permitiera el análisis de los datos recolectados en esta investigación se consideró tres factores predominantes. En primer lugar, el reconocimiento de la investigación con matices de estudio de concepciones, razón por la cual esta investigación se basó en un marco de referencia previo relacionado con la categorización del CDC expuesta por Pinto (2010) para el CPM y por un estudio histórico sobre ET realizado por los investigadores. En segundo lugar, se determinó la relevancia del marco de referencia en la construcción de las unidades de análisis en torno a los conocimientos del profesor de Matemáticas sobre ET. Y finalmente, se asume que las intervenciones hechas en clase buscan un contraste entre los conocimientos de los maestros en formación avanzada antes y después de que el CPM fuese permeado por el estudio histórico explícito sobre las ET.

Estos tres elementos, conllevaron a generar cuestionamientos en torno a ¿Qué tipo de herramienta analítica permitiría el análisis de los datos recolectados a través de las diferentes técnicas e instrumentos y el contraste de esta información con el marco de referencia preestablecido? Así pues, atendiendo a las anteriores premisas se optó por establecer como herramienta analítica, una tabla de contraste para cada una de las sub-unidades de análisis.

En cada tabla de forma horizontal se ubicó la unidad, la sub-unidad a analizar y los momentos previo y posterior al estudio de la historia de la Trigonometría las ET para cada indicador, como se muestra a continuación:

Tabla 7 Herramienta Analítica

Unidad →	**CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [CoMatEns]**	
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre la actividad matemática general: Historia de la Trigonometría y las ET [ConAcMatG]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
CtxTriET		
ActTri		
EvMetET		
CamCpTri		
InfCultCreF		
CulTraET		
RiguApx		
Sub-unidad→	**Conocimiento por Tópico Específico Matemático [ConTopEsp]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
AtriET		
ProtET		
RelConcep		
MetSolET		
RepET		
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre el Currículo Matemático [ConCuMatDM]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
JustApzETEvMat		
PrqETRelCu		

JustMatCuApzET		
Unidad→	**CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS [CoEstRepInst]**	
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre las Representaciones Instruccionales [ConRepInst]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
SecMetgET		
Sub-unidad→	**Conocimiento de los materiales curriculares [ConMtrCu]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
TratETMtrCu		
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre el Currículo Matemático [ConCuMatDD]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
JustInsEnsET		
SecHCuTri		
Unidad →	**CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO [CoApzEConMat]**	
Sub-unidad→	**Conocimiento del Proceso Cognitivo del Estudiante en Matemáticas [ConProCogEMat]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
NcsApzETcaractCogE		
Sub-unidad→	**Conocimiento de las estrategias curriculares [ConEstInst]**	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
EstInsProcApzCamCreCp		

El registro vertical de información en esta tabla permitió el planteamiento de conclusiones en términos de los saberes, creencias y concepciones, que los maestros poseen antes y después de su encuentro explícito con la historia de las ET.

5. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presentan los resultados del análisis realizado sobre los datos obtenidos de los instrumentos implementados en esta investigación, los cuales, como se mencionó en el apartado de metodología fueron organizados, agrupados y gestionados mediante el software Atlas.ti, teniendo en cuenta las unidades de análisis o la modificación de estas a partir de indicadores emergentes.

Para algunos de los indicadores asociados a las unidades de análisis del CPM se presentan una o dos redes semánticas obtenidas del Software. La primera, corresponde a los elementos previos – PrevioHM – sobre la Trigonometría y las ET que se pueden identificar en las expresiones (escritas y orales) de los maestros en formación avanzada antes de las intervenciones referidas a la Historia de la Trigonometría y de las ET. En la segunda red se presentan aspectos del conocimiento de estos maestros, posteriores a tales intervenciones – PosteriorHM – Adicional a ello, se realizó un registro de frecuencia porcentual para cada uno de los códigos y sub-códigos que permitió plantear algunas hipótesis sobre la modificación en el CDC de los maestros en formación avanzada entre el momento previo y posterior al estudio de la Historia de las ET.

En este sentido, este capítulo se divide en tres apartados referidos a los conocimientos de los maestros de formación avanzada sobre las ET y la Trigonometría asociados a las unidades de análisis: i) conocimiento del contenido matemático a enseñar (CoMatEns); ii) conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las Matemáticas (CoEstRepInst); iii) conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático (CoApzEConMat). Para cada una de las sub-unidades que las conforman, se presenta al final la matriz de la Herramienta Analítica diligenciada que resume los hallazgos encontrados.

Con el objetivo de orientar al lector en este capítulo, se retoma parte del esquema presentado en la metodología que incluye las unidades y sus respectivas sub-unidades:

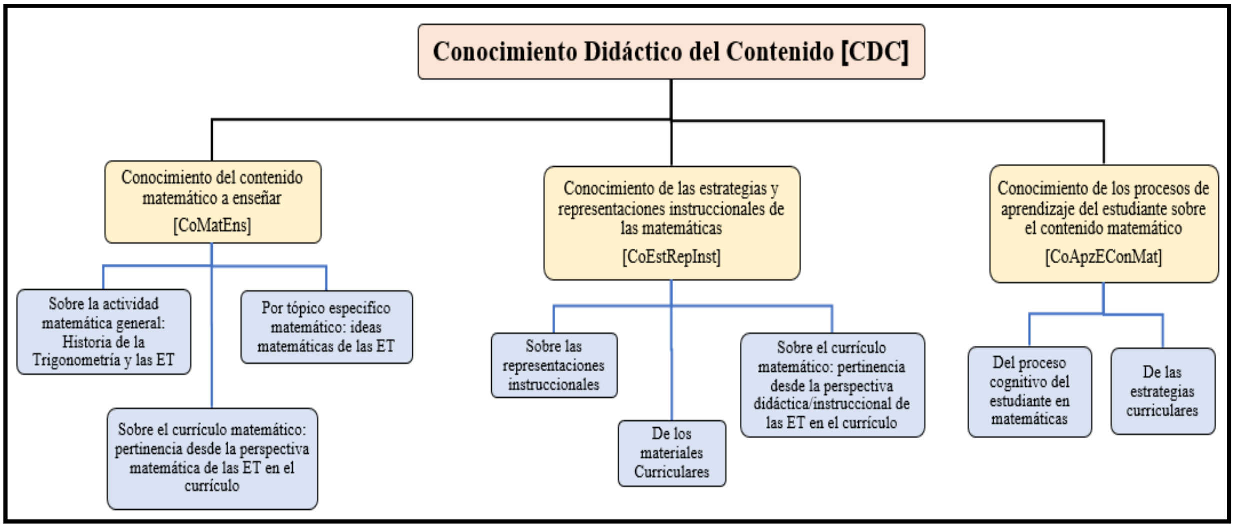


Figura 28. Unidades y sub-unidades de análisis

Fuente propia

Al interior de cada uno de los apartados, se presenta una breve descripción del significado de los sub-códigos (especificaciones de los indicadores) que componen las redes semánticas y luego el análisis respectivo. No obstante, para cada unidad de análisis, se relacionan los elementos que se toman de Pinto (2010) y los hallazgos sobre la historia de la Trigonometría y las ET.

5.1 UNIDAD: CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [CoMatEns]

Esta unidad recoge tres (3) sub-unidadess: ConAcMatG, ConTopEsp y ConCuMatDM, las cuales, aluden al conocimiento matemático que debe poseer un maestro sobre un contenido específico; en otras palabras, el nivel de dominio del contenido que se propone a enseñar. Este no solo implica conocer matemáticamente el objeto, sino incluye conocimientos de la naturaleza de la actividad matemática, conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas en relación a cómo se crea y se construye el saber matemático, las características, representaciones, ejemplos y relaciones de un concepto matemático específico con otros conceptos, entre otros.

5.1.1 SUB-UNIDAD ConAcMatG

Esta sub-unidad, *Conocimiento sobre la Actividad Matemática General* [ConAcMatG], incluye conocimientos de la Historia y la Filosofía de las Matemáticas, de la construcción del saber matemático, de la historia de la Trigonometría y las ET, su evolución, principales problemas y cambios en las nociones y conceptos. Entonces, responde a siete (7) indicadores: CtxTriET, AcTri, EvMetET, CamCpTri, InfCultCreF, RiguApx y CultTraET como se muestra en la *Figura 29Figura 25:*

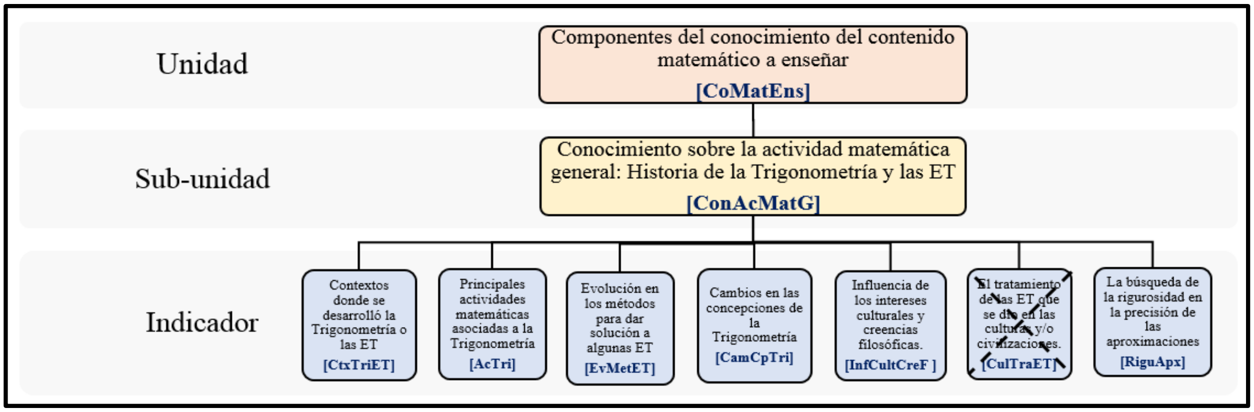


Figura 29. Esquema de indicadores de ConActMatG

Fuente propia

Cabe mencionar que, para el indicador *Tratamiento de las ET que se dio en las culturas o civilizaciones* no se cuenta con información que permita hacer el respectivo análisis. Esto obedece al hecho de que los maestros en formación avanzada no reconocen de forma explícita cuándo una expresión corresponde a una ET y por tanto no realizaron afirmaciones que permitan evidenciar el tratamiento de estas en diferentes culturas, es por ello que se ubicó una equis (X) sobre el esquema.

5.1.1.1 Contextos donde se desarrolló la Trigonometría o las ET [CtxTriET]

La siguiente tabla presenta una breve descripción de los sub-códigos que permiten caracterizar este indicador:

Tabla 8. Descripción de sub-códigos asociados a contextos de la Trigonometría y las ET [CtxTriET]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN

CtxTriET-Arq CtxTriET-Astr CtxTriET-Cart CtxTriET-Fis CtxTriET-H CtxTriET-Mat CtxTriET-Nav	Cada sub-código hace referencia a los contextos que los maestros en formación avanzada reconocen como escenarios donde se desarrolló la Trigonometría y las ET, por ejemplo, la Arquitectura (Arq), la Astronomía (Astr), la Cartografía (Cart), la Física (Fis), la Historia (H), la Matemática (Mat) y la navegación (Nav).
CtxTriET-NoConoc	Este sub-código se refiere a las intervenciones o afirmaciones hechas por los maestros en formación avanzada sobre el desconocimiento de contextos particulares donde se desarrolló la Trigonometría y las ET.

A continuación, se presenta las redes semánticas, la tabla de frecuencias y el análisis correspondiente:

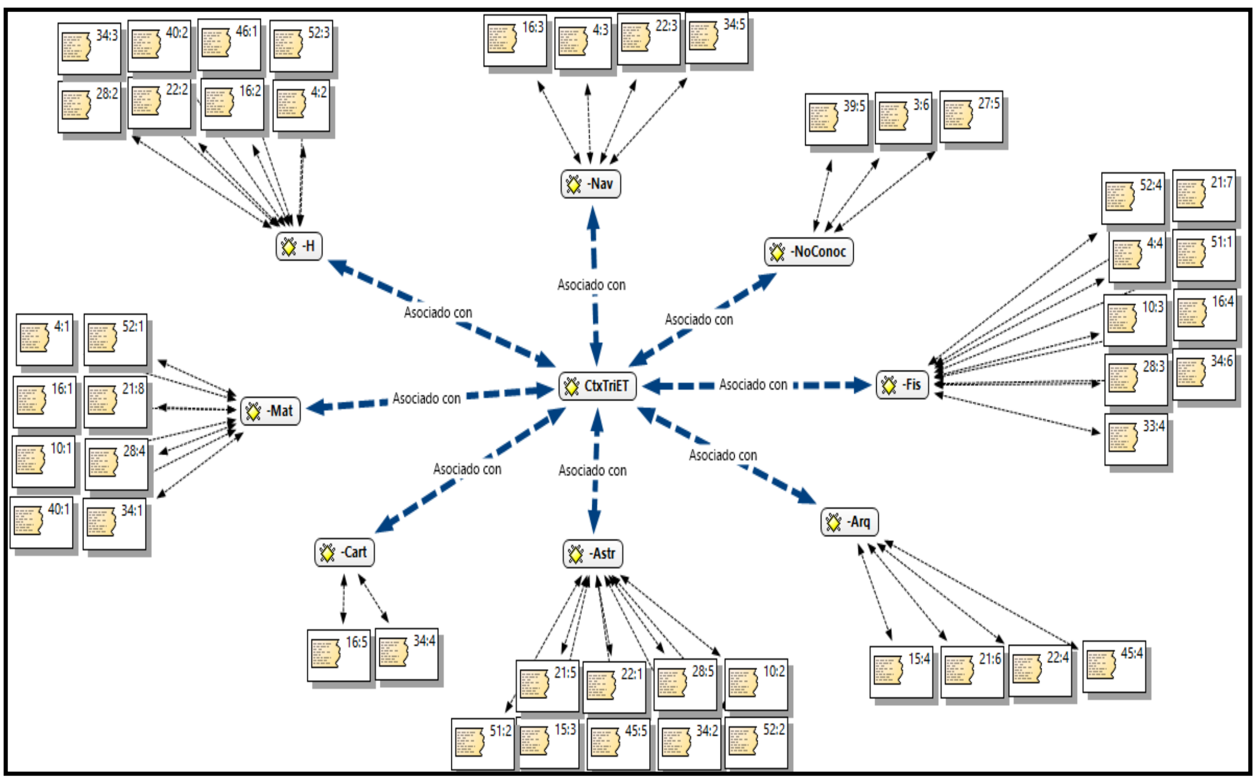


Figura 30. Red semántica PrevioHM – CtxTriET

Fuente propia

Los fragmentos de información recolectados y codificados corresponden a las preguntas 4 y 5 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada. Con estas se indagó por los contextos o usos en los que ellos consideran tienen sentido las ET y la Trigonometría.

4. Enuncia contextos o usos donde dar solución a las Ecuaciones Trigonométricas tenga significado.

5. ¿Cuáles de las siguientes opciones, consideras que te permitirían identificar contextos asociados a las Ecuaciones Trigonométricas?

Matemáticas puras	☐	Navegación	☐
Astronomía	☐	Física	☐
Historia de las Matemáticas	☐	Otro	☐
Cartografía	☐	¿Cuál?_____________________	

Figura 31. Preguntas 4 y 5 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada

Fuente propia

Al respecto se evidencia que:

I. La Física y la Astronomía son los contextos señalados con mayor frecuencia. Esto obedece a que en dichos contextos los maestros encuentran elementos relacionados con el cálculo de longitudes y de ángulos. Evidencia de ello son los siguientes fragmentos:

- Aplicaciones en M.A.S en física
- Astronomia

• Al hallar distancias o medidas de objetos; en donde se puedan construir triangulos como en la astronomia, arquitectura,
• fisica.

II. Los maestros reconocen que en la HM es posible encontrar contextos que dan sentido al uso de ET:

Debido a q' el proceso historico de algun objeto matemático, permite analizar la emergencia, causas y consecuencias del mismo. En cuanto a las matemáticas puras, nos brinda elemento disciplinares.

Se pueden asociar a razones trigonometricas, que modelan funciones. En la historia deben responder a algún problema.

Las ecuaciones trigonométricas surgen de la necesidad de solucionar algunos problemas de la sociedad... la H.M hace un recuento de ello.

III. Aunque los maestros reconocen la existencia de contextos en los cuales la solución de las ET tiene sentido, desconocen situaciones específicas en ellos:

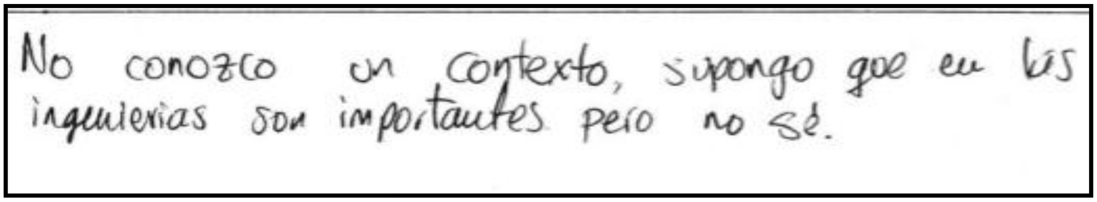
¿Por qué? Supongo que las ecuaciones resuelven problemas en esos contextos, sin embargo no conozco la utilidad.

¿Por qué?
considero que se deben utilizar pero la verdad no tengo profundidad en esto.

Estas dos evidencias cobraron importancia para esta investigación en tanto se consideró que el trabajo posterior a las intervenciones históricas podría aportar a profundizar en tales ideas.

IV. Uno de los contextos que mayor predomina en las respuestas es el matemático, esto tal vez obedece a la formación específica de los participantes de esta investigación.

V. Finalmente, tres maestros en formación avanzada afirman no conocer contextos específicos para las ET:


No conozco un contexto, supongo que en las ingenierias son importantes pero no sé.

La siguiente red semántica es el resultado de la codificación de las afirmaciones hechas por los maestros en formación avanzada en relación a los contextos, esto luego de un acercamiento a la Historia de la Trigonometría y las ET:

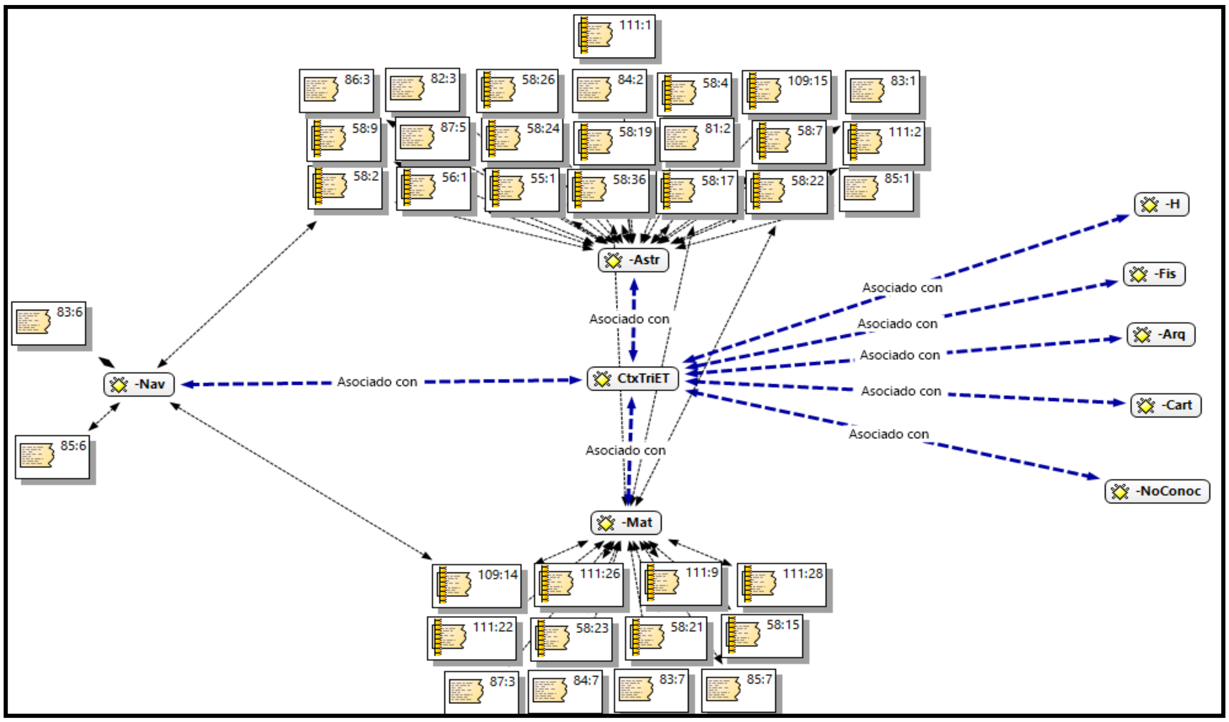


Figura 32. Red semántica PosteriorHM – CtxTriET

Fuente propia

De la red semántica se entrevé que la HM les permitió a los maestros en formación avanzada enriquecer su conocimiento en relación con situaciones particulares en las cuales se hace uso de la Trigonometría y las ET. Lo anterior, se puede evidenciar en las siguientes transcripciones de las afirmaciones hechas por los maestros (obtenidas de las grabaciones de video):

Fragmento 111:1 *La tabla de acordes de Ptolomeo en ese sentido el contexto donde surgió el procedimiento* [refiriéndose al trabajo de Ptolomeo]*… lo ubicamos como un hito histórico en el segundo siglo después de Cristo y aparte decimos que el surgimiento de la tabla se debió al cálculo de longitudes entre astros con el fin de explicar fenómenos astronómicos como el movimiento del Sol, la Luna y otros planetas*

Fragmento 111:2 [Haciendo alusión al documento de Montiel]… *hacen referencia como a unos antecedentes que habían de Ptolomeo donde estaba Hiparco y lo que buscaban era cómo encontrar distancias entre los astros, pero como que él asumía la incidencia de los rayos del Sol digamos en la Luna y empezaba a mirar la distancia que había entre estos y de alguna manera tenía una relación que había en el ángulo.*

Fragmento 111:22 [En relación al documento sobre Omar Jayyam] *Omar Jayyam que es un poeta matemático…si el contexto en el que se va a mover este método hace referencia justamente a que dentro de su obra fundamental está un Álgebra que estaba constituida por 25 ecuaciones que eran o de grado 3 o de grado menor, de esas 25 ecuaciones ,14 no se podían resolver a partir de la geometría euclidiana si y dentro de esas 14 ecuaciones está la ecuación de la que se va a referir el método, él enuncia esa ecuación como el cubo de la cosa más la cosa igual al cuadrado de la cosa más un número, entonces a partir de esa ecuación es que va a girar todo lo que se ha hecho de aquí para allá, ¿qué pasa con la expresión trigonométrica? …* [Continúa con la explicación del método mediante la construcción geométrica que hace el autor]

Fragmento 58:15 *Hay una parte de Herón de Alejandría que habla de los pronósticos de las funciones trigonométricas entonces por eso lo catalogué acá* [señalando a ubicación de los hitos que se trataron en la sesión 1]. *Él hizo uso de ciertas reglas expresadas en fórmulas para encontrar el área de polígonos regulares dando en cada caso el producto del cuadrado de un lado a un cierto número y estas reglas permiten hacer un cierto pronóstico de las funciones trigonométricas.*

Fragmento 87:7 *La relación de la Trigonometría con la Astronomía, se dio en torno a la realización de calendarios, el cálculo del tiempo, y en la navegación.*

No obstante, al realizar un comparativo entre los fragmentos codificados en cada una de las redes semánticas se obtuvo la siguiente tabla de frecuencias:

CtxTriET	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
Sub-Código	**f_i**	**%**	**f_i**	**%**
H	8	17,0	0	0,0
Mat	8	17,0	15	36,6
Cart	2	4,3	0	0,0
Ast	9	19,1	22	53,7
Arq	4	8,5	0	0,0
Fís	9	19,1	0	0,0
Nav	4	8,5	4	9,8
NoConc	3	6,4	0	0,0
Total	**47**	**100**	**41**	**100**

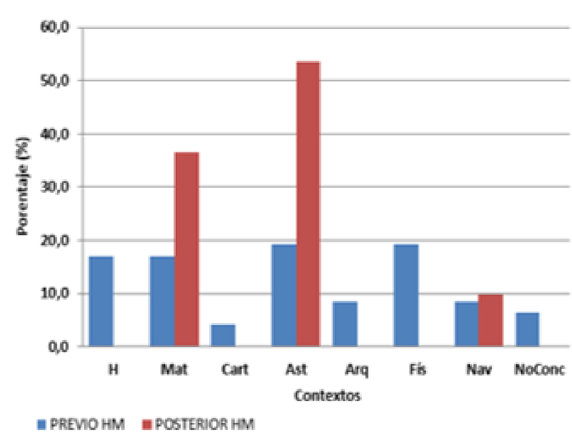


Figura 33. Frecuencia porcentual y gráfica de CtxTriET

Fuente propia

Como se observa en la tabla, predominan la Astronomía y las Matemáticas como ámbitos donde existen contextos para la Trigonometría y las ET. Esto posiblemente se debe a que, en el recorrido histórico estudiado, las ET surgen como respuesta en la mayor parte de los casos a situaciones asociadas con el cálculo de longitudes astronómicas o problemas de tipo matemático como solución de ecuaciones algebraicas. Además, después de la intervención desaparecieron afirmaciones en las cuales los maestros en formación avanzada no reconocían contextos; la frecuencia de aparición del contexto de navegación se mantiene, esto porque muchas situaciones en este ámbito están directamente relacionadas con la Astronomía.

5.1.1.2 Actividades asociadas a la Trigonometría [AcTri]

La siguiente tabla presenta una breve descripción de los sub-códigos que permiten caracterizar este indicador:

Tabla 9. Descripción de sub-códigos referidos a actividades asociadas a la Trigonometría [ActTri]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
AcTri-Med-Ang AcTri-Med-Long AcTri-Tab AcTri-Cons	Estos sub-códigos describen algunas actividades Matemáticas asociadas al desarrollo histórico de la Trigonometría tales como: medición de ángulos (Med-Ang), medición de longitudes (Med-Long), construcción de tablas (Tab) y construcciones asociadas a la Geometría (Cons).

Las redes semánticas, la tabla de frecuencias y el análisis respectivo para este indicador se presenta a continuación:

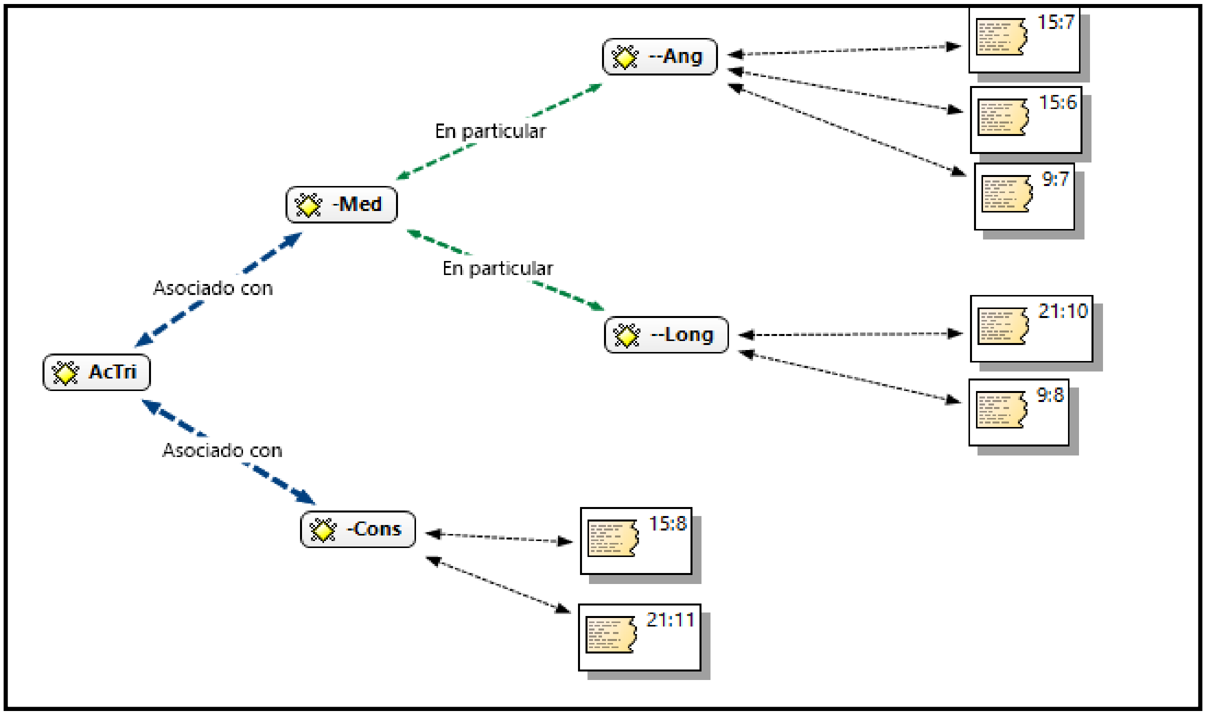
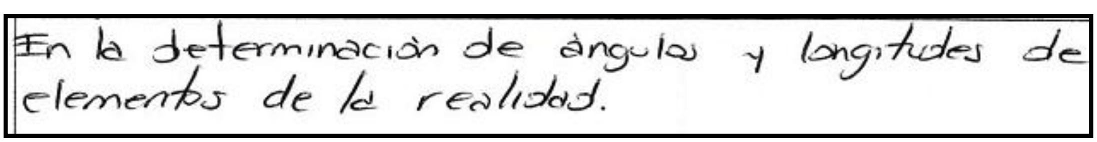


Figura 34. Red semántica PrevioHM- ActTri

Fuente propia

La información para el análisis de este indicador se obtuvo de las respuestas dadas por los maestros en formación avanzada a la pregunta cuatro (4)[33] del cuestionario. Aunque esta pregunta indagaba por contextos, se evidenció que los maestros reportaron ideas de actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría. Así, se reconoce que las principales actividades están relacionadas con la medición de ángulos o longitudes y construcciones geométricas. Como ejemplo de lo anterior se muestran dos de los fragmentos codificados:


En la determinación de ángulos y longitudes de elementos de la realidad.

[33] La pregunta corresponde a: Enuncia contextos o usos donde dar solución a las Ecuaciones Trigonométricas tenga significado.

En todos los casos en el que sea necesario el trabajo con distancias, y distancias a partir de ángulos determinados. ejemplo la astronomia. la construcción o arquitectura.

No obstante, son pocos los maestros en formación avanzada que reportan el conocimiento de algún tipo de actividad. Esto se relaciona con el hecho de no reconocer con claridad situaciones en los contextos como se mencionó anteriormente, lo que no les permite asociar actividades Matemáticas específicas.

La siguiente red semántica es el resultado de la codificación de las afirmaciones hechas por los maestros en formación avanzada en relación a las actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría luego de un acercamiento a la HM:

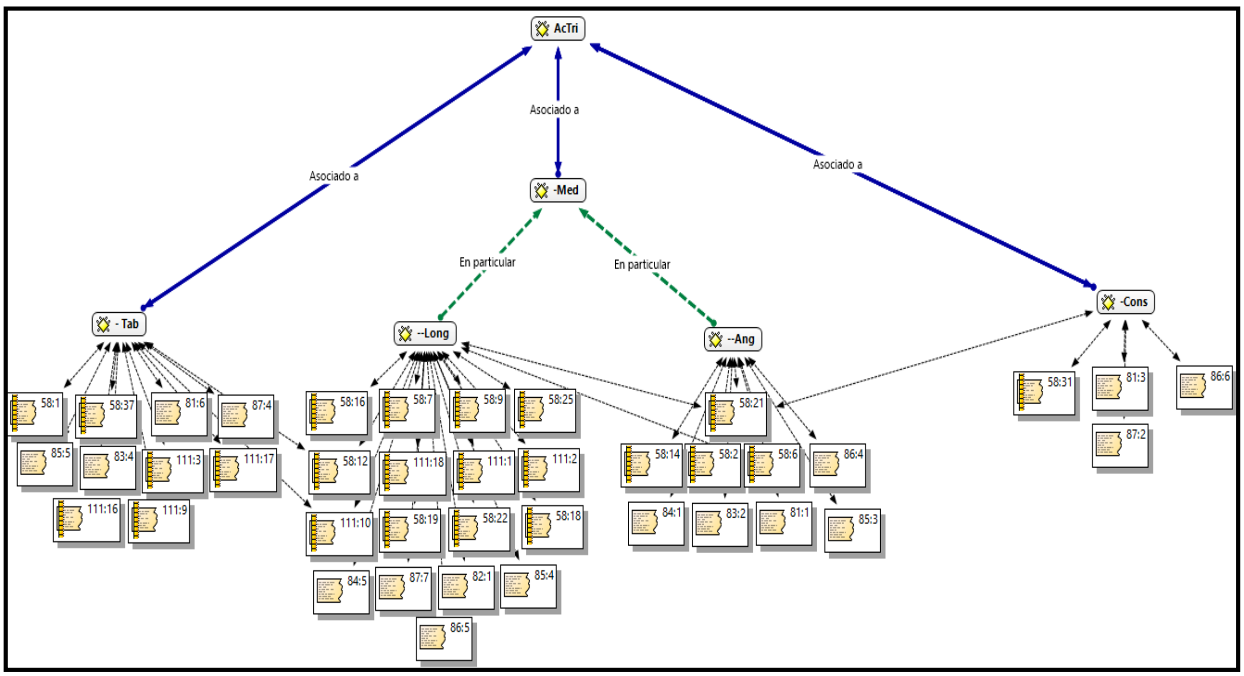


Figura 35. Red semántica PosteriorHM – ActTri

Fuente propia

La codificación de las afirmaciones de los maestros en formación avanzada permitió la generación de un nuevo código emergente alusivo a la creación de tablas como una actividad asociada a la Trigonometría, esto de acuerdo a lo que se registra en los documentos estudiados para las intervenciones de clase y como se muestra en los siguientes fragmentos:

> **Fragmento 87:4** *Los babilonios poseían métodos que se acercan bastante a la semejanza de triángulos, a la aproximación de medidas de ángulos y lados de los triángulos rectángulos, lo cual se vio reflejado en la tabla Plimpton con algunos triplos pitagóricos que al parecer surgieron al solucionar problemas con el teorema de Pitágoras.*
>
> **Fragmento 81:6** [En relación a Ptolomeo] *Los conocimientos de este astrónomo y matemático dieron origen al astrolabio e inclusive a los relojes de sol, además construyó las primeras tablas trigonométricas, en las que aparecía las razones trigonométricas de ángulos sexagesimales, todo ello basado en el libro viii de Euclides.*
>
> **Fragmento 58:12** *(…) El libro de Astronomía del Almagesto, en el cual, se encontraba una tabla de cuerdas… y mostraban ejemplos de cómo utilizar esa tabla para calcular los elementos desconocidos en un triángulo a partir de los conocidos (…)*

De la red semántica se puede visualizar que: i) la actividad con mayor frecuencia es la medición de longitudes, seguida por la medición de ángulos y elaboración de tablas; y ii) las actividades que habían sido reportadas en el estudio previo a la Historia de la Trigonometría y las ET prevalecen; sin embargo, las afirmaciones de los maestros presentan mayor especificidad, claridad e integran más elementos históricos y conceptuales a su discurso, como lo muestran los siguientes fragmentos clasificados por sub-códigos:

Referidos a la medición de longitudes (MedLong):

> **Fragmento 87:7** *(…) siguiendo con este recorrido* [Luego de escribir otros elementos que considera importantes para el desarrollo de la Trigonometría] *se nota a Aristarco de Samos, quien dio un paso importante en el desarrollo de la Trigonometría, puesto que encontró las distancias de la Tierra al Sol y la Luna, y también los diámetros de estos cuerpos*.
>
> **Fragmento 58:16** *(…) Y el otro* [haciendo referencia a un asunto o hito histórico Trigonométrico] *fue el de la medida de la altura de una pirámide, que fue el de Tales, mide la altura de una pirámide a través de su sombra, es una precisión en el cálculo de la altura y dice que la sombra proyectada por la pirámide forma dos triángulos y la proporción de las sombras era igual a la altura de la pirámide (…)*

Referidos a la medición de ángulos (MedAng):

> **Fragmento 86:04** *Teniendo en cuenta el hecho de que la Trigonometría ha sido usada en diversas épocas y culturas se hace indispensable mencionar qué hitos han enmarcado su origen. En Egipto la medición de ángulos en pirámides, en Babilonia la medición angular, aunque sin*

evidencia directa, dando indicios de lo que entendemos actualmente por Trigonometría. [La redacción de fragmento fue modificada, procurando no afectar la idea que quería presentar el maestro en formación avanzada]

Fragmento 81:1 *Sin duda la medición de los ángulos ha representado un gran hito alrededor de la historia de la Trigonometría.*

Referido a construcciones geométricas (Cons):

Fragmento 58:31 *(…) Y partimos de los egipcios,* [El maestro en formación avanzada pregunta y responde] *ahí ¿cuál era la necesidad?: La construcción de las pirámides y ¿qué permitió responder a esa necesidad? el manejo de triángulos (…)*

Relacionado con la construcción de tablas (Tab):

Fragmento 111: 3 *Las tablas de cuerdas elaboradas por Ptolomeo son equivalentes a una tabla de seno, en el documento entregado por los compañeros* [haciendo alusión al documento histórico que le correspondió analizar] *se puede observar cómo se halla la similitud entre estos dos tipos de Tablas.*

Por último, al realizar un comparativo entre los fragmentos codificados en cada una de las redes semánticas se obtuvo la siguiente tabla de frecuencias:

ActTri	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
Sub-Código	f_i	%	f_i	%
Med-Long	2	28,6	17	41,5
Med-Ang	3	42,9	9	22,0
Constru	2	28,6	5	12,2
Tab	0	0,0	10	24,4
Total	**7**	**100,0**	**41**	**100,0**

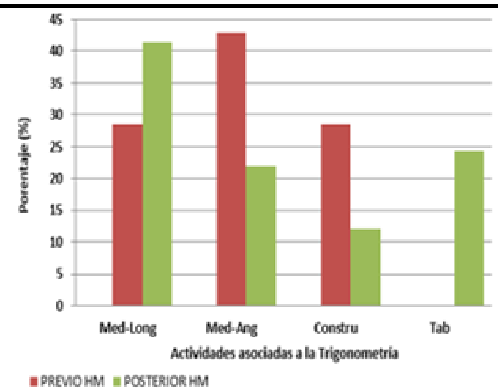


Figura 36. Frecuencia porcentual y gráfica de ActTri

Fuente propia

Aunque el registro de frecuencias muestra que en el estudio posterior a la Historia de la Trigonometría y las ET el porcentaje de participaciones de los maestros en formación disminuye para dos sub-códigos frente a lo reportado para el estudio previo, es importante resaltar que en ambos momentos el número de fragmentos codificados es diferente. Teniendo en cuenta esta aclaración, en la tabla de frecuencias es evidente el aumento de participaciones por parte de los maestros en formación; la información recolectada muestra un discurso acompañado por mejores argumentos y conocimiento de las actividades específicas que enmarcan el desarrollo histórico de la Trigonometría. La aparición de una nueva actividad es muestra del aporte de la HM al CPM.

5.1.1.3 Evolución en los métodos para dar solución a algunas ET [EvMetET]

Este indicador permitió describir si los maestros en formación avanzada luego de realizar un estudio histórico sobre los métodos de solución a las ET reconocen alguna evolución en las estrategias y procedimientos usados, por lo cual no se cuenta con la red semántica previa.

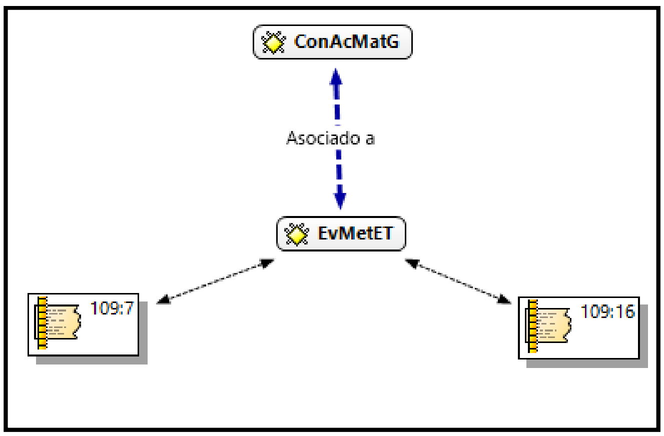


Figura 37 Red semántica PosteriorHM – EvMetET

Fuente propia

Aunque las intervenciones son pocas, las discusiones muestran las reflexiones hechas por los maestros en formación avanzada en relación con la evolución de los métodos de solución de las ET, los cuales, están mediados por el contexto, los elementos matemáticos con los que se contaba en esa época y los diferentes aspectos históricos estudiados en la intervención a partir de las fuentes documentales históricas. Estas discusiones se ven permeadas por las concepciones de los maestros sobre ET, como se muestra en el siguiente fragmento:

> **Fragmento 109:7** *(…)* [el maestro en formación avanzada A pasa al tablero] *si estoy hablándoles a ustedes y digo* $f(x) = \frac{1}{x}$ *, yo estoy construyendo esta función, yo no sé cuáles son los valores*

que toma pero yo le puedo dar valores a esto [señala *x* de la expresión escrita en el tablero] *hasta que me dé, pero esto no es una ecuación y no es Trigonometría, si yo estoy construyendo* $sin1°$, *no sé que esté asociada al círculo unitario,* ***pues no estoy haciendo un procedimiento que requiera pasos estructurados para encontrar el valor, sino que es encontrar cuánto vale esa función y ya.***

[Interviene el maestro en formación avanzada B en relación con lo que mencionó A] *pero creo que a eso va lo que ella habla* [refiriéndose a una intervención hecha por uno de los investigadores] *, es que ahorita lo vemos así y ahorita se puede hacer fácilmente porque tenemos un trabajo anterior* [refiriéndose al valor de sen1° a través de calculadoras], *pero lo* ***que ella nos decía era y ¿cuándo no se tenía todo ese trabajo y lo que quería era hallarse el*** $\boldsymbol{sin1°}$ ***para ser exacto?, ahí sí era una ET porque no tenían ninguno de los elementos que tenemos ahorita.(…)***

5.1.1.4 Cambios en las concepciones de la Trigonometría [CamCpTri]

Posterior al estudio de la Historia de la Trigonometría (intervención 1) se determinaron algunas concepciones de los maestros en formación avanzada asociadas a la categorización inicial que se muestra en la intervención 1 (*Anexo 7*). A partir de esto se pretende reconocer en los argumentos de los maestros elementos asociados a los hitos históricos que marcaron un cambio de concepción en el desarrollo de la Trigonometría. Por tanto, no se presenta la red semántica previa que brinde información sobre este asunto. A continuación, se describe los sub-códigos de este indicador.

Tabla 10. Descripción de sub-códigos asociados a cambios en las concepciones de la Trigonometría [CamCpTri]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
CamCpTri-HerrCult CamCpTri-CienAnalt CamCpTri-DiscProp CamCpTri-HerrOtraCien	Estos sub-códigos se refieren a los cambios de concepción de la Trigonometría que se identifican en las intervenciones hechas por los maestros en formación avanzada. La Trigonometría vista como: una herramienta cultural para el cálculo de longitudes (HerrCult), como ciencia analítica (CienAnalt), como un discurso propio (DiscProp) y como herramienta para otras ciencias (HerrOtraCien).

En la siguiente red semántica se presenta la organización de los fragmentos codificados que hacen alusión a este indicador acompañada del registro estadístico y el análisis respectivo:

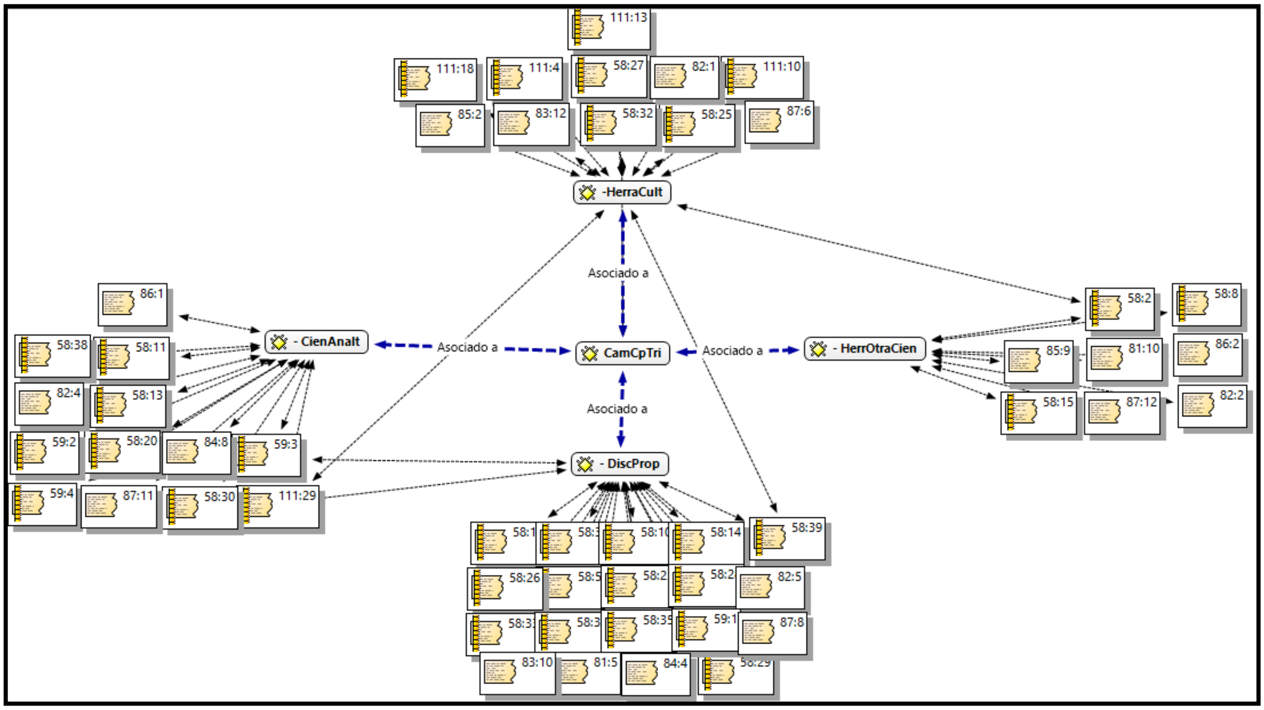


Figura 38. PosteriorHM Red semántica CamCpTri

Fuente propia

CamCpTri	POSTERIOR HM	
Sub-Código	**fi**	**%**
HerrCult	14	25,0
CienAnalt	13	23,2
DiscProp	21	37,5
HerrOtraCien	8	14,3
Total	**56**	**100,0**

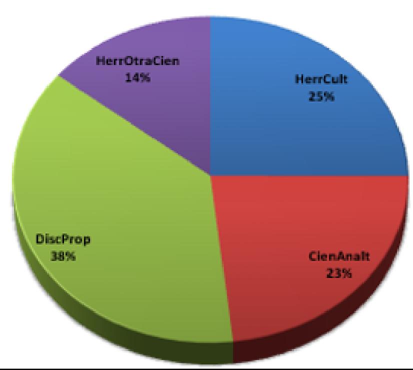


Figura 39. Frecuencia porcentual y gráfica de CamCpTri

Fuente propia

Se evidencia que para este indicador los maestros en formación avanzada reconocen en la HM distintos momentos en los que se dio un cambio de concepción de la Trigonometría. Estos, fueron clasificados previamente por los investigadores en los cuatro sub-códigos que se muestran en la *Tabla 10*. Cabe mencionar que, en la primera intervención surgió una clasificación de cambios de concepción de la Trigonometría de acuerdo a la organización propuesta por los maestros en formación avanzada a los hechos que cada uno identificó en los documentos estudiados, lo cual, se corresponde en gran parte con la clasificación previa hecha por los investigadores. De los datos presentados en la red semántica se puede concluir para cada una las concepciones lo siguiente:

i) Herramienta para otra ciencia: Se refiere al papel práctico o útil que tiene la Trigonometría, pero no en sí misma, sino como medio por el cual otras ciencias logran avances, como se muestra en los siguientes fragmentos:

> **Fragmento 81:10** *(…) por último el trabajo de los triángulos esféricos similares a los trabajados por Euclides en el plano, constituidos por Menelao en Spherics constituye uno de los hitos en la historia de la Trigonometría en la demostración de teoremas sobre triángulos esféricos y sus aportes a la Astronomía.*
>
> **Fragmento 58:2** *(…) las personas que estaban estudiando Trigonometría como Ptolomeo intentaban encontrar una aplicabilidad a la Astronomía y hacia la navegación, entonces digamos, los grados los dividían porque había una serie de constelaciones y realizaban una correspondencia entre el zodiaco y muchas creencias astronómicas a la Trigonometría y eso lo aplicaron también como forma de navegación entonces había una frase que yo encontré que decía que la construcción de mapas celestes proporcionó la base técnica para las grandes navegaciones, más delante servían para estimular ulteriores descubrimientos de nuevos recursos matemáticos (…)*

ii) Ciencia analítica: en los fragmentos referidos a esta concepción los maestros en formación avanzada caracterizan asuntos relacionados con el uso de simbolismos, fórmulas, teoremas e identidades en la Trigonometría, tal como se evidencia en:

> **Fragmento 111:29** *(…) Ciencia analítica, porque ya es una Trigonometría de fórmulas y teoremas (…)*
>
> **Fragmento 87:11** (…) *En la evolución de la Trigonometría no se puede dejar de lado a los árabes, quienes a partir del siglo VIII continúan los trabajos de las civilizaciones griegas e india, adoptando el concepto de la función seno; tuvieron avances significativos en tanto que en el siglo X completaron la función seno y las otras cinco razones trigonométricas (…)*
>
> **Fragmento 82: 4** *Hiparco por su parte estaba involucrado en la solución gráfica de triángulos esféricos y las fórmulas para las fórmulas de suma y resta de ángulos de seno y coseno junto con esto se piensa que el triángulo de Hiparco se inscribe en un círculo y el junto con Tolomeo*

conocían la relación que se expresa con la ecuación sin² A + cos ²A = i. Es por esto que (Smith, sf) afirma que la ciencia de la Trigonometría comienza con Hiparco.

iii) Disciplina propia: el énfasis está en reconocer la Trigonometría como un escenario que posee un discurso propio y que a diferencia de las concepciones anteriores busca la evolución de sí misma, con objetos de estudio propios y problemas que se resuelven dentro de sus dominios. Al respecto, los maestros en formación avanzada manifiestan que:

Fragmento 58:14 *(…) Yo leí del texto de Smith, entonces marqué tres,* [hitos de la Trigonometría, solo se reporta uno de los hitos que resalto el maestro en formación avanzada] *que es i) el trabajo de Hiparco pues porque, es como el inicio a la Trigonometría, ya que antes se hablaba de medición de ángulos y aquí ya hablan digamos de un enfoque más de la Trigonometría*, [Esto refiere a que concibe la Trigonometría como una disciplina propia] *en los trabajos de Hiparco se hace referencia a la solución gráfica de triángulos esféricos, el cálculo de algunos ángulos y también se le atribuyen las fórmulas de seno y coseno de la suma y la diferencia de ángulos (…)*

Fragmento 58:5 *(…) pues la primera obra en la que la Trigonometría plana aparece como ciencia entonces lo ubico aquí en la parte relacionada con escritos (…)*

Fragmento 58:33 *(…) es que podría ser enfocado hacia dos partes, porque no estamos hablando de que sea una ciencia como tal formal, pero si ahí surgieron algunos escritos que la presentaron como una ciencia.*

iv) Herramienta cultural para el cálculo de longitudes: en esta concepción se recopilan las ideas de los maestros en formación avanzada referidas al uso de la Trigonometría para el cálculo de longitudes medibles y no medibles (estimación) en diferentes escenarios culturales, es decir, la Trigonometría brinda los elementos para dar solución a problemas asociados con la medición de distancias astronómicas, cálculo de longitudes de diámetros, entre otros, como se evidencia en:

Fragmento 86:2 *La relación de la Trigonometría con la Astronomía, se dio en torno a la realización de calendarios, el cálculo del tiempo, y en la navegación. Siguiendo con este recorrido se nota a Aristarco de Samos, quien dio un paso importante en el desarrollo de la Trigonometría,* ***puesto que encontró las distancias de la tierra al sol y la luna, y también los diámetros de estos cuerpos.***

Fragmento 111:10 *(…) El hito yo lo ubiqué como cálculo de longitudes puesto que no adquiere todavía el rigor de disciplina (…)*

5.1.1.5 Influencia de los intereses culturales y creencias filosóficas para mejorar cálculos y procedimientos trigonométricos [InfCultCreF]

En esta red semántica se pretende mostrar las percepciones de los maestros en formación avanzada acerca de cómo la cultura y las creencias filosóficas se relacionan e influyen sobre la Trigonometría y las ET. Estas percepciones se dan a partir del estudio de la HM en relación con el tema. Dado que la mayoría de los maestros reportaron no haber tomado seminarios de HM y en particular el estudio de las ET ha sido abordado desde una perspectiva cultural, no se cuenta con la primera red semántica.

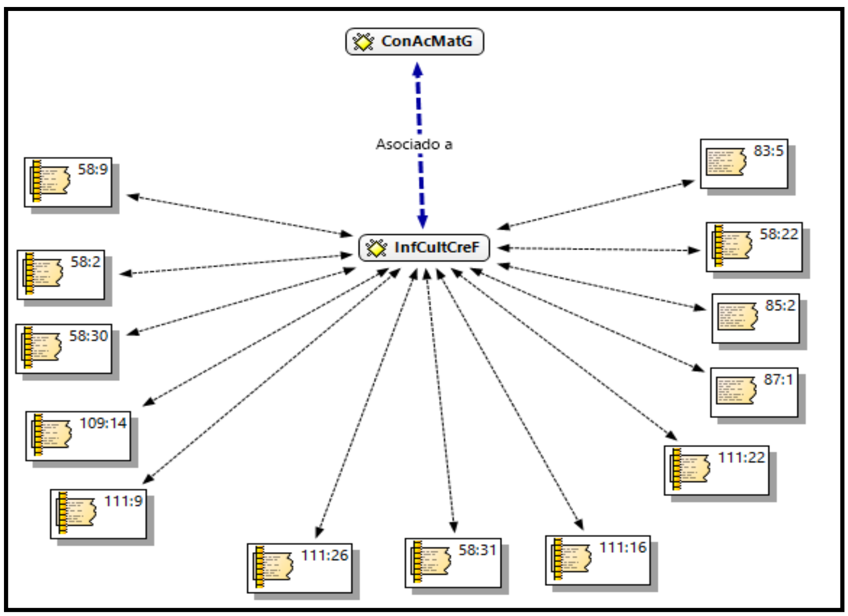


Figura 40. Red semántica PosteriorHM – InfCultCreF

Fuente propia

La revisión de los datos asociados a este indicador muestran que los maestros en formación avanzada reconocen: i) algunas actividades culturales que son fundamentales para promover la generación de nuevos y mejores desarrollos en torno a la Trigonometría y las ET (actividades económicas, predicciones sobre los astros, construcciones arquitectónicas, entre otros) y ii) desarrollos desde las Matemáticas mismas, en los cuales el rigor y la exactitud son aspectos fundamentales para promover avances en el campo.

Para ejemplificar estas afirmaciones se presentan los siguientes fragmentos:

> **Fragmento 83:5** *(…) Los egipcios se aproximaron bastante al concepto de área circular, con su sistema de división de ángulos denominado en su época como decágono, cuyo uso principal* ***era determinar las horas de la noche y las estaciones del año*** *(…)*
>
> **Fragmento 85:2** *(...)* ***La observación y curiosidad*** *por las fases de la Luna, las salidas y puestas del Sol, las constelaciones, los eclipses y algunos fenómenos celestes fueron esenciales en la construcción de cálculos astronómicos (…).*
>
> **Fragmento 87:1** *En este escrito se notan los hitos más importantes que influyeron en el desarrollo de la Trigonometría, los cuales se toman del documento de Smith;* ***así se comienza señalando que en Babilonia se usaba para realizar medidas en la agricultura y en Egipto se utilizó para la construcción de pirámides*** *(…)*
>
> **Fragmento 111:26** *(…) El contexto donde surgió este procedimiento es siglo XVI, algo característico que me llamó la atención es que Viète no era un matemático profesional, sino que era un abogado y solamente en sus tiempos libres era que él se dedicaba como pasatiempo a realizar (…) Matemáticas y* **su solución no respondía a una necesidad como tal si no a algo** ***matemático*** *(…)*
>
> **Fragmento 109:14** *Maestro en formación A: (…) Bueno esa pregunta me hizo pensar en lo que nos hablaba el profesor y lo que dijo mi compañero porque ahí lo que generó el método* ***fue la necesidad para la enseñanza de los militares lo que hace ese señor Chauvenet es proponer algo práctico****: si usted tiene que hallar estas cosas* [solución de una ET] *utilice esta fórmula, si usted quiere tal cosa utilice esta otra fórmula y eso es lo que él hace.*
>
> ***Yo me imagino que si hubiese sido un*** *matemático* [suponiendo otros escenarios dónde pudieron haber surgido las ET]**,** *las intenciones serian diferentes, como en el procedimiento que yo expuse* [método para la solución de sen1°] *ahí como podríamos hacer para* ***ser más exactos para aproximarnos vamos buscando otras identidades*** *(…)*
>
> *Maestro en formación B: Pareciese que las otras* [en relación a los procesos expuestos por los compañeros] *también son de* **necesidades, pero necesidades más Matemáticas** *no tanto de contexto (…)* [trabajo de Chauvenet]

5.1.1.6 La búsqueda de la rigurosidad en la precisión de las aproximaciones [RiguApx]

Este indicador surge a partir de la revisión de los elementos que componen los distintos métodos de solución a las ET. Así, se indagó por el papel que tiene la rigurosidad y la aproximación en dichos métodos y en general en las actividades propias de la Trigonometría; razón por la cual, no se cuenta con una red previa puesto que solo después del acercamiento a la Historia de la Trigonometría y las ET es posible identificar esto.

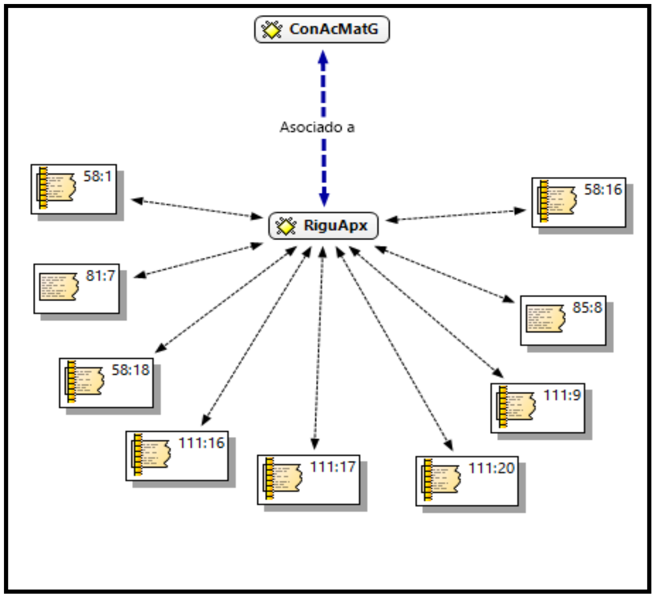


Figura 41. Red semántica PosteriorHM – RiguApx

Fuente propia

En los argumentos de los maestros en formación avanzada se reconocen las intenciones por las cuales se dio origen a las soluciones de ET. Entre ellas, se destaca el rigor y la aproximación, ya sea para elaborar tablas o hacer cálculos específicos. Además, la línea de hechos históricos abordada no solo les permite a los maestros hablar de la continuidad de los trabajos trigonométricos realizados por varios personajes o culturas, sino también de la necesidad que históricamente se dio por mejorarlos; en otras palabras, por alcanzar una mayor exactitud en los resultados. A continuación, se muestran fragmentos que hacen alusión a este hecho:

> **Fragmento 81:7** *A partir de las tablas de Ptolomeo se realiza el Aryabhatiya de Aryabhata quien a partir de su Surya Siddhanta genera una tabla de cuerdas- medias,* ***remplazando de esta forma las antiguas tablas griegas.***
>
> **Fragmento 111:16** *(…) pues hablaban de otros aportes que había hecho al Kashi (…) él quería conocer la longitud de una circunferencia, entonces decía la circunferencia de un círculo debe ser expresada en función del diámetro* ***con una precisión tal*** *que el error sobre la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro sea igual a 600000 veces el de la Tierra no sobrepase el espesor de un cabello, es decir que la* ***fiabilidad de los cálculos que él tenga no sobrepase el espesor de un cabello.***
>
> **Fragmento 111:17** *[Haciendo referencia a Alkashí]…Hace también parte de los árabes y se basa en la Astronomía, lo que ellos querían era hallar también el Sen1° entonces lo que hablaban ahorita, ellos ya tenían las tablas de Ptolomeo y de Abul- Wefa (…) si,* ***pero entonces ellos querían hacerla más exacta, más exacta*** *(…)*

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con la actividad matemática general se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 11. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConAcMatG

Unidad →	**CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [CoMatEns]**	
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre la actividad matemática general: Historia de la Trigonometría y las ET [ConAcMatG]**	
	El estudio histórico realizado amplía el conocimiento del maestro en formación avanzada en relación con: i) la identificación de ciertas actividades Matemáticas y culturales que aportan al desarrollo y avance de la Trigonometría y las ET; ii) el reconocimiento de ámbitos y posibles contextos donde la actividad trigonométrica tiene sentido; iii) la identificación de ciertos hitos en el desarrollo de la Trigonometría y cambios de concepciones en los mismos; iv) la evolución de algunos métodos de solución de ET y v) la influencia de la rigurosidad, precisión y aproximación en los avances que tuvo cada cultura en el campo de la Trigonometría y en particular en el surgimiento de las ET.	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
CtxTriET	Los maestros, aunque aluden a diferentes contextos no profundizan o desconocen hechos concretos que les contribuya a nutrir su discurso sobre escenarios donde la Trigonometría y las ET tienen sentido.	Las afirmaciones realizadas por los maestros en formación avanzada se ven acompañadas por justificaciones que desde la historia describen situaciones un poco más específicas de contextos de la Trigonometría y las ET.
ActTri	Las actividades asociadas a la Trigonometría que reconocen los maestros son: cálculos de longitudes, construcciones asociadas a la Geometría y medición de ángulos.	Además de las actividades reportadas por los maestros en el momento previo, el estudio de la HM les permite hacer alusión a la construcción de tablas como otra actividad asociada al desarrollo de la Trigonometría.
EvMetET	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del	Los maestros reconocen una evolución en los diferentes métodos de solución a las ET, los cuales, están influenciados por los contextos de cada momento

	estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.	histórico, las herramientas Matemáticas disponibles y las intenciones culturales o Matemáticas propias de una época.
CamCpTri	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.	La historia de la Trigonometría y las ET permiten al maestro identificar cuatro hitos que evidencian el cambio de concepción de la Trigonometría, lo cual, contribuye a que realicen una caracterización de los elementos específicos (p. e., objetos de estudio, necesidades e intenciones culturales o Matemáticas, procesos y actividades Matemáticas, fines y usos, entre otros) de cada uno de estos.
InfCultCreF	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.	El estudio de la historia de la Trigonometría y las ET permitió a los maestros en formación avanzada reconocer: i) necesidades e interés culturales que promovieron nuevos desarrollos en la Trigonometría; y ii) situaciones relacionadas con la exactitud y el rigor que influenciaron el avance en las mismas Matemáticas.
CulTraET	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo y posterior en relación a este indicador.	
RiguApx	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.	Los maestros en formación avanzada identificaron: i) la rigurosidad y la aproximación como elementos fundamentales en la construcción de tablas y cálculos trigonométricos; ii) la intención de las culturas o personajes por dejar un

		precedente del significado y valor que tienen estos elementos; y iii) la evolución de la idea de rigor en los diferentes momentos de historia de las ET.

5.1.2 SUB-UNIDAD: ConTopEsp

Esta sub-unidad de análisis, *Conocimiento por Tópico Específico Matemático* [ConTopEsp], corresponde al conocimiento de las ET desde la perspectiva matemática; es decir, el conocimiento de las características, prototipos, representaciones, ejemplos estándar, métodos de solución de las ET, entre otros. Lo anterior, se agrupa en cinco (5) indicadores pre-establecidos a saber: AtrET, ProtET, RelConcp, MetSolET y RepET como se muestra en la *Figura 42*:

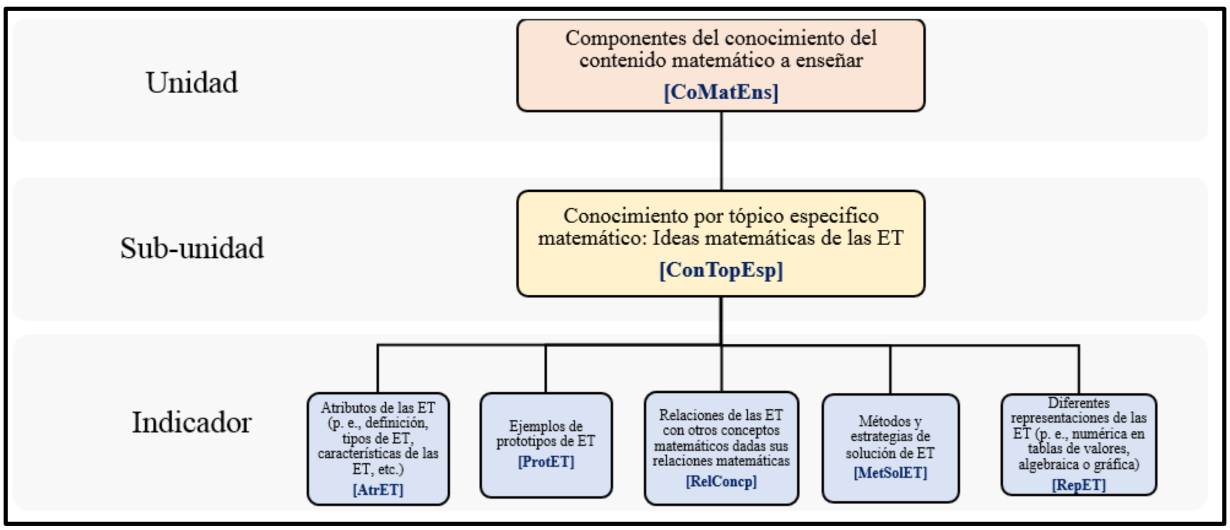


Figura 42. Esquema de indicadores de ConTopEsp

Fuente propia

5.1.2.1 Atributos de las ET (AtrET)

Este indicador agrupa tres (3) sub-códigos que se refieren a atributos específicos de las ET: características [C], Definiciones [D] y Tipos [T], los cuales, a su vez presentan algunas extensiones como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 12. Descripción de sub-códigos asociados a atributos de las ET [AtrET]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
AtrET-C-Perio AtrET-C-Proc AtrET-C- Alge AtrET-C- USol AtrET-C- InfiSol AtrET-C- ExSol AtrET-C- NoId AtrET-C- Id AtrET-C- Hallx AtrET-C- HallAng AtrET-C- ExpTri	Estos sub-códigos se refieren a elementos que los maestros en formación avanzada identifican como características (C) de las ET, entre las que se puede mencionar: la periodicidad (Perio), uso de procedimientos algebraicos para solucionarlas (Proc), el número de soluciones de la ET (única solución (Usol) o infinitas soluciones (InfiSol)), la existencia de la solución (ExSol), la correspondencia con las identidades trigonométricas (igual a una identidad (Id) o una ET es diferente a una identidad (NoId)), la naturaleza de la incógnita (un ángulo (HallAng) o un valor numérico asociado a una longitud (Hallx)) y la necesidad de que la ET esté conformada por funciones o expresiones trigonométricas (ExpTri).
AtrET-T-Trix=V AtrET-T-ComTri	Estos sub-códigos se refieren a los tipos (T) de representaciones simbólicas que los maestros en formación avanzada reconocen como ET; es decir, una ET es una expresión que: establece una igualdad entre una función trigonométrica y un valor (Trix=V) o combina funciones trigonométricas (ComTri).
AtrET-D-Ig AtrET-D-NoV	Estos sub-códigos se refieren a las definiciones (D) dadas por los maestros en formación avanzada sobre las ET. En el primer caso, la terminación *Ig* hace referencia a que la expresión debe ser una igualdad, mientras que en el segundo la terminación *NoV* se refiere a una igualdad entre una expresión trigonométrica y un valor desconocido *x*.
AtrET-D-NoJust	Este sub-código hace alusión a que el maestro en formación avanzada identifica cuando una ecuación es o no trigonométrica pero no cuenta con justificación alguna para su argumentación.

A continuación, se presenta las redes semánticas, la tabla de frecuencias y el análisis correspondiente:

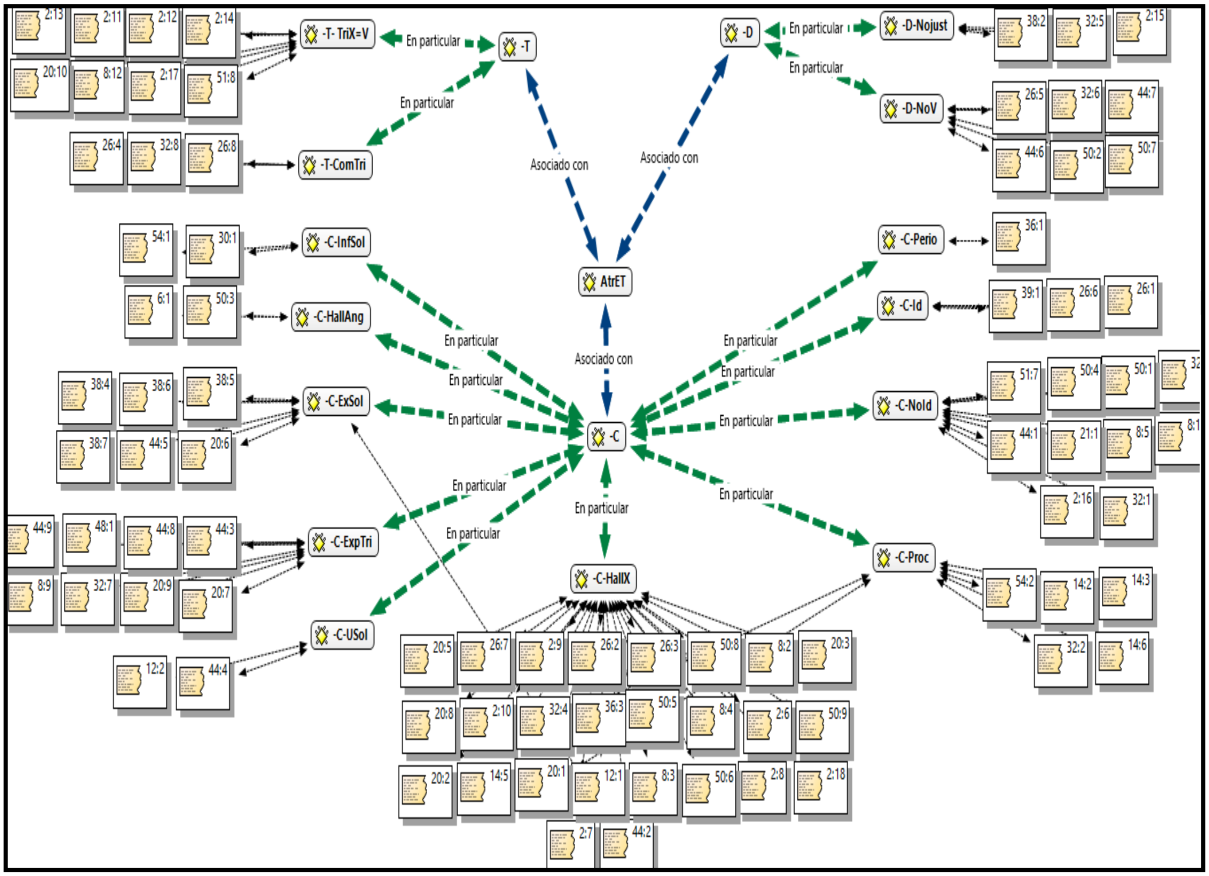


Figura 43. Red semántica PrevioHM – AtrET

Fuente propia

De la red semántica referida al indicador de atributos de las ET, se puede evidenciar que gran parte de los maestros en formación avanzada caracterizan una ET como una ecuación que relaciona una o varias funciones trigonométricas para una misma incógnita igualada a un número real (constante); es decir, las ET son expresiones de la forma $FunTri(x) = k$ o $FunTri(x) + \ldots + FunTri(x) = k$ donde $k \in \mathbb{R}$, en las cuales la idea es encontrar el valor de un ángulo o un valor numérico asociado a una longitud, sin hacer en muchos casos, la distinción del conjunto al que pertenece el valor a hallar (p. e., si x es número real o x es un valor en grados o radianes). Lo anterior sustenta el hecho de que al parecer los maestros en formación avanzada solo reconocen formas de representación simbólica de las ET que tienen el orden: función(es) trigonométrica(s) de una incógnita, igual y constante, tal y como se evidencia en los sub-códigos T-Trix=V y T-ComTri=V.

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

e. $2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$ [X] ¿Por qué? Podemos hallar todos los valores para los cuales se satisface la igualdad.

d. $\sin x = 1/2$ [X] ¿Por qué? Es necesario encontrar el ángulo cuyo seno sea 1/2.

h. $\sin x = 3$ [X] ¿Por qué? Se busca x. para que de 3 / es falsa.

2. Escribe una posible definición de Ecuación Trigonométrica, presenta ejemplos y no ejemplos.

Definición

~~Una~~ Una ecuación trigonométrica es ecuación en la cuál se busca el valor del ángulo para que de cierto valor.

Dos aspectos a destacar en este punto son: i) no hay claridad en la naturaleza de la expresión que acompaña la incógnita; por ejemplo, para *sinx* la expresión "*sin"* puede ser función o razón y ii) una expresión que tiene la forma descrita en el párrafo anterior es ET si es posible encontrar con algún "procedimiento" el valor de *x*, como ejemplo:

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

d. $\sin x = 1/2$ [x] ¿Por qué? Se puede definir la incognita a partir de Identidades.

h. $\sin x = 3$ [X] ¿Por qué? puedo determinar $x = sen^{-1}3$ aunque no tenga solución

En ambos casos se propone que las ET presentadas corresponden a ET si se puede hallar el valor de *x* ya sea usando identidades o funciones inversas.

d. $\sin x = 1/2$ [X] ¿Por qué? Es una ecuación que involucra una razón trigonométrica

e. $2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$ [X] ¿Por qué? Es una ecuación que relaciona dos razones trigonométricas

2. Escribe una posible definición de Ecuación Trigonométrica, presenta ejemplos y no ejemplos.

Definición	
Una ecuación trigonométrica es una función igualada a una constante. o Dónde es posible encontrar un valor para una incógnita:	
Ejemplos $\tan\alpha = \frac{1}{2}$	No ejemplos $f(x) = \tan\alpha$
$\text{Sen}\, 90° = x$	$\text{Sen}\,\alpha = \cos\alpha + 3$

Definición
Es una expresión que contiene razones trigonometricas e incognita
$\text{sen}\, x = 1$. $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$.

Los fragmentos muestran que la expresión que acompaña la incógnita en algunos casos es vista como razón o como función.

No obstante, otro grupo de maestros consideran que expresiones de la forma *FunTri*(*k*) = *x*, corresponden a una solución particular de una ET, por ejemplo:

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

b. $\sin 18° = x$ ☐ ¿Por qué? No es porque es un resultado de una ecuacion como tal.

En general, los maestros en formación avanzada presentan dificultades para definir y caracterizar una ET. Usan los términos ecuación, identidad, función y expresión trigonométrica, para definir unos con otros, como se evidencia en el siguiente fragmento:

2. Escribe una posible definición de Ecuación Trigonométrica, presenta ejemplos y no ejemplos.

Definición	
una ecuación trigonometrica es una funcion donde se buscan los valores que satisfacen la ecuacion, y en esta estan involucradas las identidades trigonometricas.	
Ejemplos $3\operatorname{Sen}x - \csc x = 0.$	No ejemplos $y = 3x+5.$

Por último y con menor frecuencia en la red se puede concluir que:

– Las identidades trigonométricas no corresponden a ET, pues la(s) incógnita(s) relacionada(s) en la identidad pueden tomar cualquier valor real. Sin embargo, los maestros en formación avanzada no presentan un argumento válido del porqué no podría ser ET:

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:
   a. $sin^2x + \cos^2x = 1$ ☐ ¿Por qué? Es la identidad fundamental

a. $sin^2x + \cos^2x = 1$ ☐ ¿Por qué? Es una identidad trigonométrica

- Si la expresión posee dos incógnitas (*x* e *y*) entonces es una función y no una ET.

- Toda ET se puede resolver como ecuación algebraica; esto es aplicando estrategias algebraicas para encontrar el valor de la(s) incógnita(s). Cabe mencionar que muchos de los participantes no tienen argumentos suficientes para decidir si una ET es una ecuación algebraica. Por ejemplo,

10. Argumente si las siguientes afirmaciones son verdaderas V o falsas F:

AFIRMACIÓN	V	F	JUSTIFICACIÓN
Toda ecuación trigonométrica es una ecuación algebraica.		✓	Se puede resolver como una ecuación algebraica.

Toda ecuación trigonométrica es una ecuación algebraica.			No tengo el conocimiento pertinente.

- El aspecto de la periodicidad no es determinante al momento de caracterizar una ET.
- Para que una expresión corresponda a una ET, además de relacionar funciones trigonométricas, incógnitas y constantes se debe garantizar la existencia de la solución.

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

   h. $sin\, x = 3$ ¿Por qué? No hay un valor que satisfaga x.

h. $sin\, x = 3$ ¿Por qué? No es ecuación, debido a q' el seno de un ángulo No es >1

h. $sin\, x = 3$ ¿Por qué? Está mal planteado, p/q el rango es [-1,1]

- Un maestro en formación avanzada presentó el siguiente argumento en el cual da una razón del porqué una igualdad numérica podría ser una ET. Sin embargo, recuerda que una de las condiciones que tiene la ET es que debe existir una incógnita. Lo anterior, suscita la discusión de pensar si x^0 acompañada de las expresiones que presenta el maestro podría dar lugar a una ET

1. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

   j. $2 = 1 + 1$ ¿Por qué? no se, puede ser cos0 + cos0 = 2 = pero no hay variable a despejar

A partir de los datos y fragmentos presentados en la red semántica, se puede concluir que los maestros en formación avanzada describen características que permiten decidir cuándo una expresión es o no una ET, pero en muy pocos casos presentan argumentos fundamentados o una definición precisa de lo que es una ET. No obstante, luego de un acercamiento a la Historia de la Trigonometría y las ET, resulta la siguiente red semántica para este indicador:

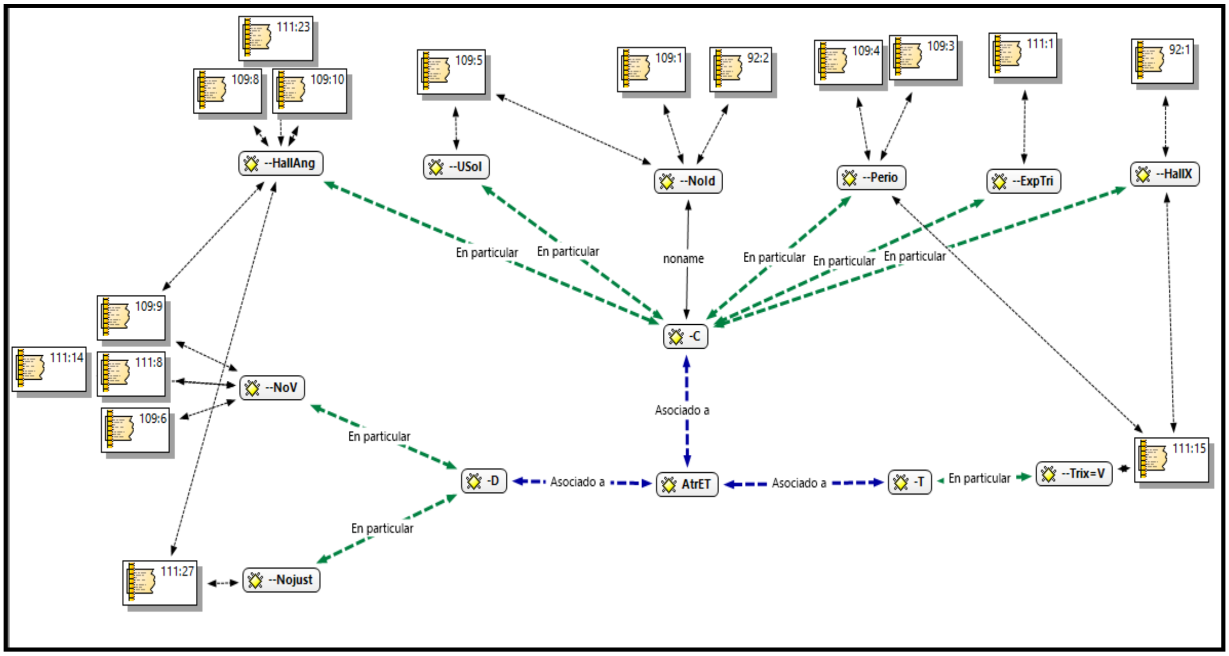


Figura 44. Red semántica PosteriorHM – AtrET

Fuente propia

Al analizar la red semántica del momento posterior a la HM se puede identificar que solo un maestro en formación avanzada hace alusión a lo que considera un tipo de ET, asociándola a una expresión simbólica de la forma *FunTri*(x) = k, como se muestra en el fragmento,

> **Fragmento 111: 15** *(…) para hallar el valor de x para solucionar esta ecuación* [escribiendo y señalando la ecuación $sinx = 0$] *las soluciones son de la forma y+2π, pues porque el periodo es 2π, mientras que cuando uno está hallando sin1=x no le veo esta misma dimensión* [haciendo alusión a la idea de periodicidad] *entonces no le veo que sea una ET.*

Por otra parte, en relación a las características que los maestros en formación avanzada atribuyen a las ET se pueden enumerar:

i) la solución de una ET consiste en hallar un valor desconocido x que hace parte de una expresión trigonométrica asociada en la mayor parte de los casos a una longitud, como se puede ver en:

> **Fragmento 92:1** *Es una ET porque ahí* [señalando una de las expresiones trigonométricas presentes en el documento referente a Viète] *si se busca* ***mirar los x que satisfacen esa condición*** [los valores para los cuales $x = 2cos\theta$, donde θ es conocido]

ii) en tres afirmaciones, los maestros en formación avanzada argumentan que en este tipo de ecuaciones la periodicidad es un aspecto inherente en la solución a diferencia de otras expresiones que no presentan este atributo:

> **Fragmento 111: 15** *(...) para hallar el valor de x para solucionar esta ecuación* [escribiendo y señalando la ecuación $sinx = 0$] ***las soluciones son de la forma y+2π, pues porque el periodo es 2π****, mientras que cuando uno está hallando sin1=x* ***no le veo esta misma dimensión*** [haciendo referencia a la idea de periodicidad] *entonces no le veo que sea una ET.*

iii) existe una disyunción entre una identidad y una ET, ya que en la primera expresión la incógnita puede tomar cualquier valor del conjunto de los números reales; es decir, se cumple para todo número real, mientras que, en la segunda el valor de la incógnita es un subconjunto de números reales. Un ejemplo de lo anterior se evidencia en la siguiente afirmación:

> **Fragmento 92:2** [Señalando la expresión trigonométrica $\cos^3\theta$ =3/4 $\cos\theta$ +1/4 $\cos 3\theta$], ***esta no es una ET porque simplemente se busca una igualdad numérica*** *mientras que esta sí es* [señalando la expresión $x = 2cos\theta$] *porque se* ***busca cuáles son esos valores que me satisfacen el x.***

iv) un maestro afirma que una de las características de las ET es la unicidad de su solución; parece entonces desconocer los elementos que han expuesto los demás maestros sobre la idea intrínseca de periodicidad, como se muestra en la trascripción:

> **Fragmento 109:5** ***Investigador:*** *¿qué carácter adicional debe tener una ET?,* ***Maestro en Formación avanzada:*** *Es que por ejemplo la identidad* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ***se va a cumplir para todos los valores, mientras que ahí*** [señalando la expresión sin*x*=0,5] ***se necesita un solo valor.***

En relación con esta característica, la discusión sobre el número de soluciones de una ET conlleva a que algunos maestros en formación avanzada se cuestionen sobre la naturaleza de la incógnita. Algunos de ellos responden que debe ser el ángulo que acompaña la expresión trigonométrica; en consecuencia, una posible definición de ET descarta aquellas expresiones en la cuales la incógnita no es el ángulo puesto que esto acarrearía que la expresión fuera el resultado de una operación, es decir un valor. Esto se evidencia en los siguientes fragmentos:

Fragmento 109:8 *(…)* ***para mí el valor desconocido debe estar en el argumento de la función*** [haciendo referencia en que en una ET el valor desconocido debe corresponder al ángulo] e*so de sin1º me parece que es más bien una operación es como decir que es cuadrado sabiendo que x es 3, es efectuar un cálculo*

Fragmento 109:9 ***Para mí una ET está fundamentada en que su incógnita debe ser un ángulo****, para mí sin90 =x no es una ET, porque yo puedo determinar el sin90 y sé que es un valor.*

A continuación, se presenta la tabla de frecuencias y el gráfico que relaciona el número de intervenciones con sus respectivos sub-códigos, para los momentos previo y posterior a la HM para el indicador AtrET.

	AtrET	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
	Sub-Código	fi	%	fi	%
C	Perio	1	1,1	3	14,3
	Proc	7	8,0	0	0,0
	Usol	2	2,3	1	4,8
	InfiSol	2	2,3	0	0,0
	ExSol	7	8,0	0	0,0
	NoId	10	11,4	3	14,3
	Id	3	3,4	0	0,0
	HallX	26	29,5	2	9,5
	HallAng	2	2,3	5	23,8
	ExpTri	8	9,1	1	4,8
T	Trix=V	8	9,1	1	4,8
	ComTri	3	3,4	0	0,0
	NoV	6	6,8	4	19,0
	NoJust	3	3,4	1	4,8
	Total	88	100,0	21	100,0

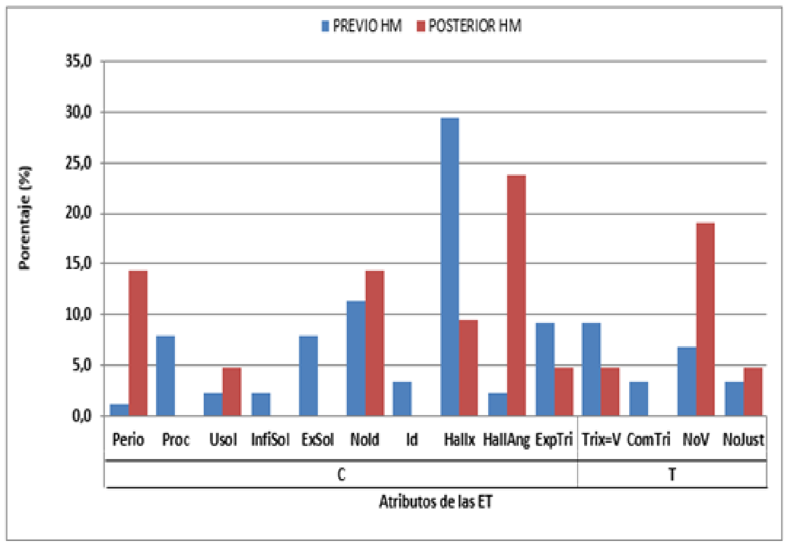


Figura 45. Frecuencia porcentual y gráfica de AtrET

Fuente propia

En relación a la figura anterior, se ve que el número de participaciones en el momento posterior a la HM disminuyó. Esto puede obedecer a que no hubo una tarea propuesta de manera predeterminada que estuviera orientada a encontrar, en las afirmaciones de los maestros, atributos de las ET. Esta cuestión sí se ubicó en el cuestionario de manera explícita. Además de la situación anterior, los maestros expresan el desconocimiento de muchos de los aspectos relacionados con este tipo de ecuaciones; razón por la cual se cohíben al momento de caracterizarlas.

En relación con los Tipos de ET, los maestros en formación avanzada se mantienen en su postura frente a que expresiones de la forma $FunTri(x) = k$ son ET. No incluyen combinaciones de expresiones trigonométricas dentro de sus afirmaciones; esto, tal vez producto de que los documentos estudiados en la intervención no abordaron ese tipo de ecuaciones, lo cual dejó a los maestros en formación avanzada sin argumentos para referirse a ellas.

En las afirmaciones realizadas por los maestros, sobre las características de las ET, se mantienen invariantes aquellas en las cuales se alude a que estas: i) presentan única solución ii) su solución corresponde a un conjunto infinito de valores esto asociado a la periodicidad de la expresión trigonométrica involucrada iii) la incógnita es el ángulo que acompaña la expresión trigonométrica o un valor asociado a una longitud y iv) Una ET no es una Identidad Trigonométrica. Es de resaltar que los maestros en formación no alcanzaron algún consenso frente a estas características. Finalmente, las definiciones dadas sobre ET muestran desconocimiento por parte de los maestros en relación al tema; sin embargo, algunos de ellos aluden a que expresiones en la cuales el valor desconocido no corresponde al ángulo de una función trigonométrica no son ET. Además, los maestros en formación avanzada presentan una postura reflexiva en relación a este asunto, dejando de lado afirmaciones que carezcan de fundamento.

5.1.2.2 Ejemplos prototipos de ET [ProtET]

A continuación, se presenta la primera red semántica (PrevioHM) para el indicador ProtET, en este se buscó identificar cuáles de los ejemplos de expresiones trigonométricas propuestas por los investigadores son reconocidas por los maestros en Formación avanzada como ET. En particular, el interés se centró en aquellas que fueron halladas durante la revisión histórica.

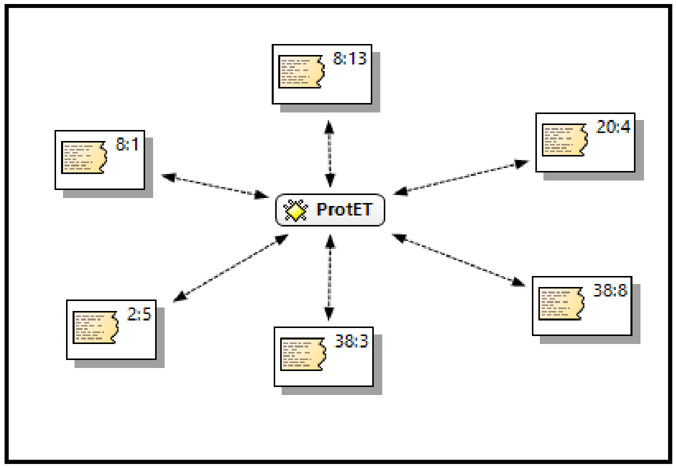
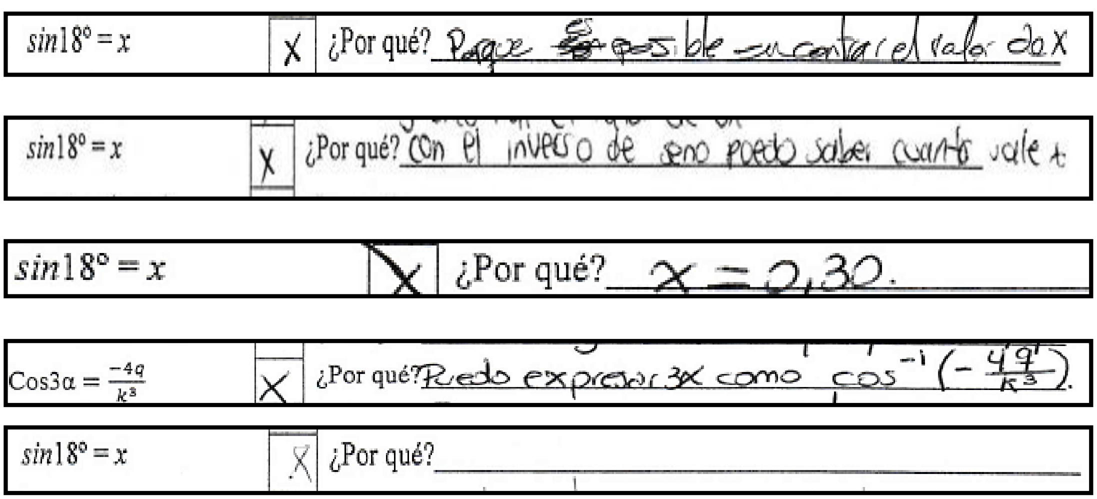


Figura 46. Red semántica PrevioHM – ProtET

Fuente propia

Analizando los fragmentos se halla que las expresiones que los maestros reconocen como ET son aquellas a las cuales asocian un método o forma de solución. En particular, de las dos ET tomadas de la revisión histórica, y que fueron propuestas en la pregunta 1 del cuestionario, solo 4 de las respuestas de los maestros las reconocen e intentan justificar el porqué de su elección. En dos fragmentos, los maestros solo las reconocen y no justifican. Lo anterior se muestra en los siguientes fragmentos:



Para este indicador no se presenta la red semántica del momento posterior, puesto que, con la intención de no sesgar la investigación y evitar influir en el uso del término ET, el término fue reemplazado en las intervenciones por *"expresión trigonométrica"*, lo que conllevó a que los maestros en formación avanzada se apropiaran de dicho vocablo y no permitió evidenciar si en sus afirmaciones hacían referencia a ET o a cualquier otro tipo de expresión trigonométrica.

5.1.2.3 Relaciones de las ET con otros conceptos [RelConcp]

Mediante este código se registraron los fragmentos que se refirieron a la relación existente entre las ET y algunas áreas de las Matemáticas, entre ellas: Álgebra, Aritmética, Geometría, etc. Además, con conceptos como ecuación, función inversa, identidades, periodicidad, proporcionalidad y variación, entre otros, de ahí los sub-códigos que se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 13. Descripción de sub-códigos asociados a las relaciones entre las ET y otros conceptos Matemáticos [RelConcp]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
RelConcp-Alge RelConcp-Arit RelConcp-Ec RelConcp-FunInv RelConcp-Geo RelConcp-Id RelConcp-Perio RelConcp-ProcVaria	Estos sub códigos se refieren a las relaciones que los maestros en formación avanzada reconocen entre las ET y otros conceptos (ecuación, función inversa, identidades, procesos variacionales y periodicidad) y áreas de las Matemáticas (Álgebra, Aritmética y Geometría).

En la siguiente red se presenta el esquema de los fragmentos codificados para este indicador, previo a la intervención de la HM.

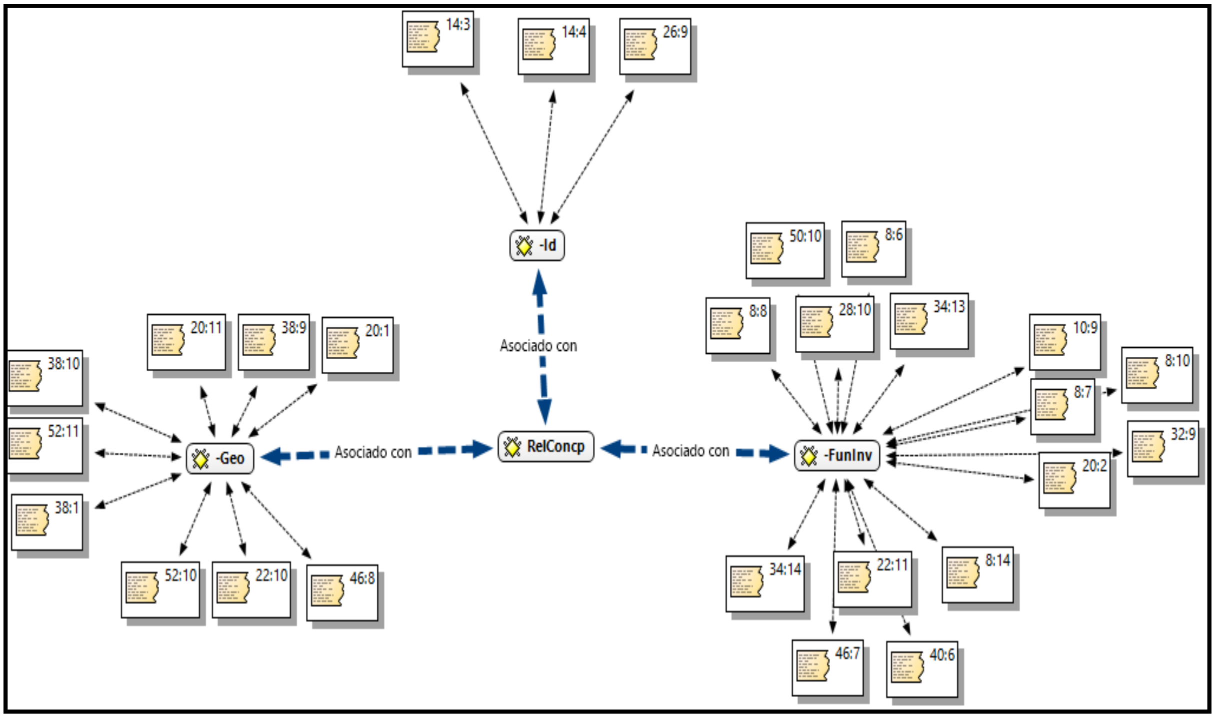
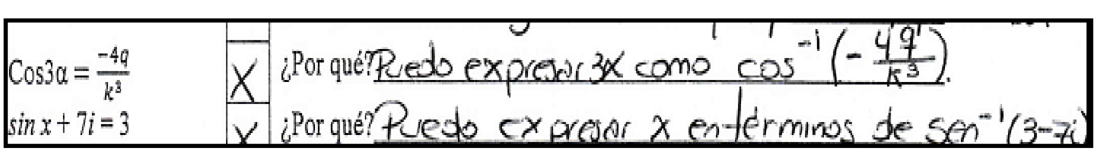


Figura 47. Red semántica PrevioHM – RelConcp

Fuente propia

Para indagar sobre este asunto, en la pregunta número uno del cuestionario se mostró un conjunto de once expresiones frente a las cuales se pidió al maestro en formación avanzada argumentar si eran o no ET. Las respuestas entregadas permitieron al grupo de investigadores realizar una clasificación en tres aspectos matemáticos: *Geometría* (Geo), *Funciones Inversas* (FunInv) e *Identidades* (Id). Como algunos lo argumentan, dichos aspectos aparecen puesto que son los elementos que les permitirían dar solución o hallar el valor de la incógnita en las ET

Las siguientes imágenes corresponden a respuestas dadas por los maestros en formación avanzada, donde se evidencian los aspectos matemáticos que relacionan con las ET.



$\sin x = 1/2$	X	¿Por qué? Es necesario encontrar el angulo cuyo seno sea 1/2.
$2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$	X	¿Por qué? Se puede definir la incognita a partir de identidades
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	X	¿Por qué? Por teorema de pitagoras; se puede resolve y encontrar el valor de x.
$y = \cos x$	X	¿Por qué? En el plano cartesiano es posible representar y=cosx.

La red que se presenta a continuación corresponde a los fragmentos que se obtuvieron de las afirmaciones dadas por los maestros en la intervención 2, que se corresponden con este indicador:

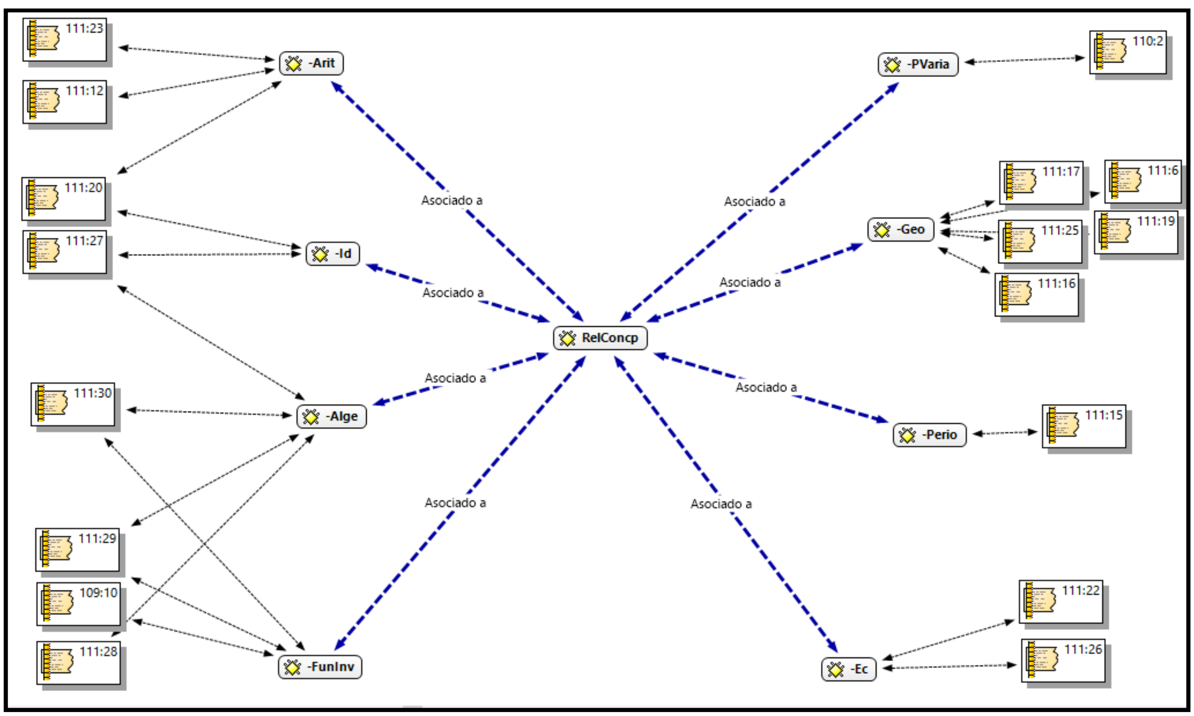


Figura 48. Red semántica PosteriorHM – RelConcp

Fuente propia

Se resalta la aparición de nuevos aspectos, campos, conceptos o asuntos de las Matemáticas que los maestros en formación avanzada relacionan con las ET, a partir del estudio realizado a los métodos de solución propuestos en los distintos documentos abordados. Para ampliar estas ideas se presentan a continuación fragmentos de transcripciones hechas en la intervención 2, en la cual los maestros en formación avanzada explican métodos para solucionar ET y reflexiones generadas en la misma sesión, en las cuales emergen las relaciones entre conceptos o disciplinas.

Los fragmentos que se presentan a continuación se clasifican en dos grupos. Los primeros son afirmaciones en las que los maestros en formación avanzada identifican de manera explícita relaciones entre las ET y otras disciplinas o conceptos. Los segundos se refieren a afirmaciones donde esta información se da de manera implícita.

Afirmaciones explícitas por parte de los maestros en formación avanzada:

> **Fragmento 111:30** *(…) Y los conocimientos previos que considero se deben tener es pues* ***álgebra básica, despejar ecuaciones, reemplazar ecuaciones y conocer la función coseno y arco coseno*** *porque é*l [Viète] *plantea esa solución en términos de esa ecuación.*

> **Fragmento 110:2** [Maestro en formación avanzada hablando del tipo de pensamiento matemático en el que se involucran las ET, haciendo referencia a la distribución propuesta por los estándares nacional] *el variacional ¿no? [Aparecen otras intervenciones]…**está en el variacional, en los estándares está en el variacional.***

> **Fragmento 111:6** *(…) entonces en lo que se requiere nosotros observamos que el trabajo de Ptolomeo está basado en los elementos, pues en los* ***conceptos y axiomas que se requieren en los elementos de Euclides.***

Afirmaciones implícitas por parte de los maestros en formación avanzada:

> ***Fragmento 111:20*** *(…) [explicando el método desarrollado por los árabes] El sen15º y el sen18º digamos que empieza el problema del seno de 3º entonces ellos* ***ya empiezan a conocer algunas identidades****, para ellos el sen3º es igual al seno de algo más algo es decir 1+2* ***y tienen la identidad de que sen(A+B) es igual (…) y ya ahí después (…)*** *utilizaban identidades para realizar el procedimiento reiterativo (…)*

> ***Fragmento 111:26*** *(…) el procedimiento que él se propone [aludiendo al trabajo desarrollado por Viète] es encontrar* **las soluciones de la ecuación cúbica** *(…)*

> ***Fragmento 111:5*** *(…) Si pues toca hallar el valor de x, pues son del tipo y+2π (…) [otros maestros intervienen]…* **La idea de periodicidad***… exacto y acá yo no la veo tanto por eso no es una ET, o eso es para mí (…)*

Las relaciones que se evidencian en el análisis posterior se dan con: periodicidad, identidades, funciones inversas, ecuaciones y procesos variaciones, así mismo se mantienen las relaciones con Álgebra, Geometría y Aritmética. En el siguiente registro de frecuencias se muestra el número de intervenciones o fragmentos de los momentos previo y posterior, asociados a estos sub-códigos.

RelConcp	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
Sub-Código	fi	%	fi	%
Alge	0	0,0	4	19,0
Arit	0	0,0	3	14,3
Ec	0	0,0	2	9,5
FunInv	15	55,6	3	14,3
Geo	9	33,3	5	23,8
Id	3	11,1	2	9,5
Perio	0	0,0	1	4,8
ProcVaria	0	0,0	1	4,8
Total	27	100,0	21	100,0

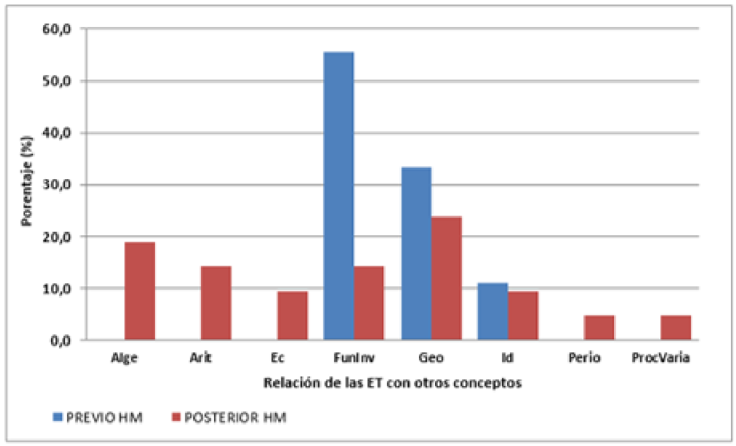


Figura 49. Frecuencia porcentual y gráfica de RelConcp

Fuente propia

En el análisis de las redes semánticas podemos encontrar cuatro asuntos relevantes. En primer lugar, la aparición de nuevos sub-códigos (Alge, Arit, Ec, Perio, ProcVaria) una vez que los maestros en formación han participado en la intervención histórica, los cuales están asociados a las características de los métodos estudiados en los diferentes documentos. Un segundo asunto se refiere a la disminución de las participaciones que se presentan en la segunda red (PosteriorHM) respecto a la primera (PrevioHM), con argumentos más rigurosos que muestran un dominio matemático más amplio por parte de los maestros.

El tercer asunto, tiene que ver con la primera red y las relaciones que se dan con otros conceptos; esto es con la posibilidad de implementarlos en la solución, mientras que en la segunda red semántica los fragmentos de audio registran relaciones entre conceptos u otros elementos de las Matemáticas, en la solución, pero de forma implícita especificando cómo está dada la relación y qué aporta dicho concepto en la solución. Por ejemplo, la función inversa tiene dos perspectivas: i) como método directo para solucionar la ET y ii) como un elemento dentro de todo el proceso para encontrar la solución.

5.1.2.4 Métodos de solución de las ET [MetSolET]

Este indicador pretende identificar afirmaciones en las cuales los maestros en formación avanzada aluden a características particulares que se pueden organizar como métodos para solucionar ET. En la siguiente tabla se relacionan los sub-códigos pertenecientes a este indicador:

Tabla 14. Descripción de sub-códigos asociados a métodos de solución de las ET [MetSolET]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
MetSolET-PersAna MetSolET-MetNum MetSolET- Alge MetSolET- GeoTria MetSolET- Geo MetSolET- AproxGraf MetSolET-Calc MetSolET- InvCalc MetSolET- Id	Estos sub códigos se refieren a los métodos de solución que los maestros en formación avanzada identifican para resolver ET los cuales se clasifican en: analíticos, (PersAna) numéricos (MetNum), algebraicos (Alge), geométricos (Geo), gráficos (AproxGraf), por calculadora (Calc) y trabajo con identidades (Id) entre otros.

La red que se muestra a continuación presenta el registro de las respuestas dadas por los maestros en formación avanzada al cuestionario en relación con este indicador.

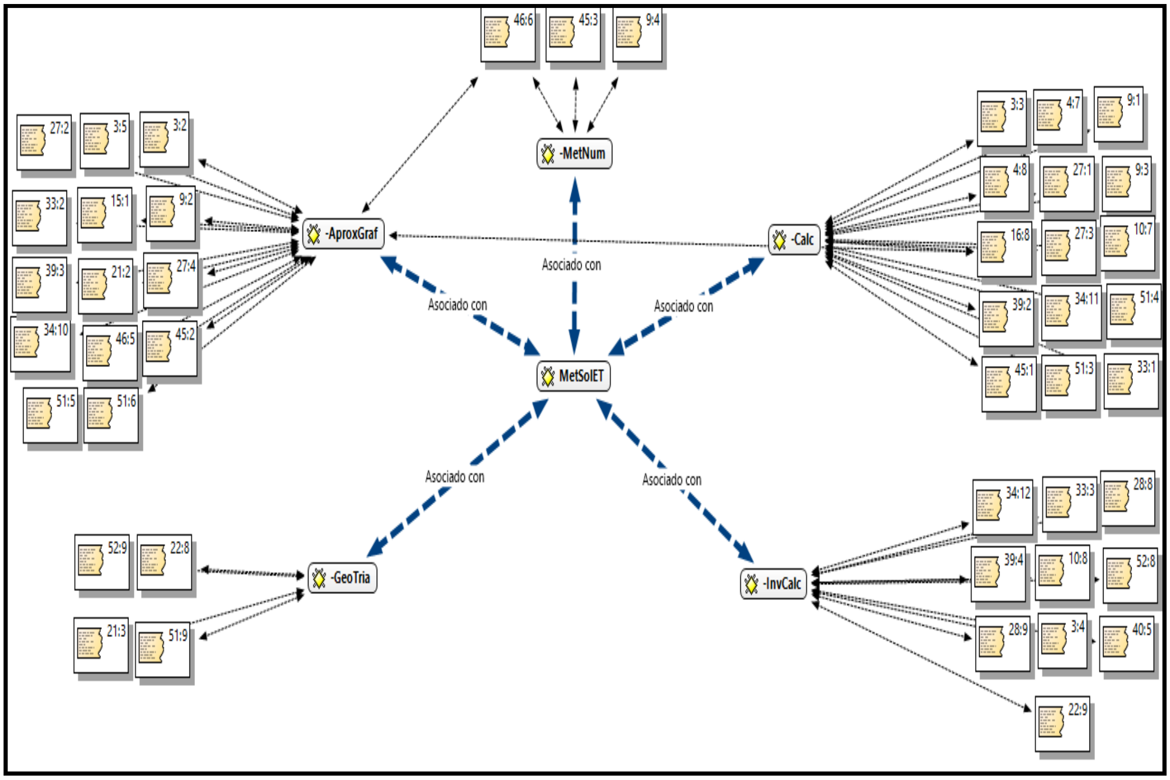
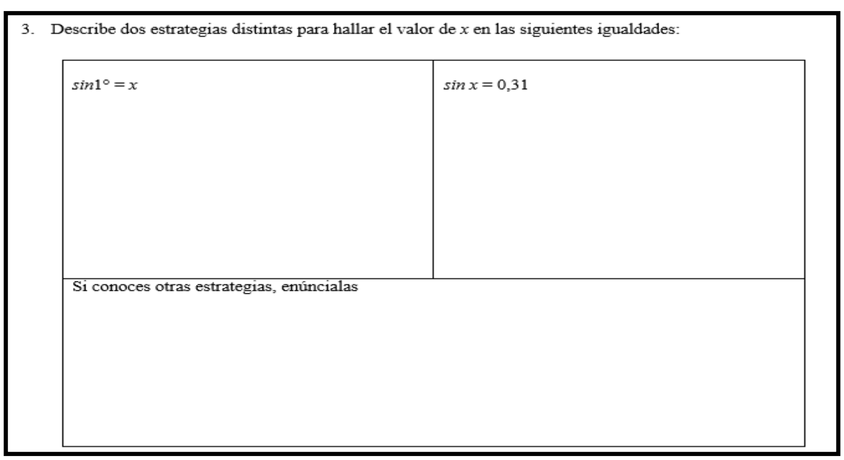


Figura 50. Red semántica PrevioHM – MetSolET

Fuente propia

Previo a un estudio de la Historia de las ET los maestros en formación avanzada proponen estrategias para dar solución a dos ecuaciones que se plantean en la pregunta tres (3) del cuestionario:



3. Describe dos estrategias distintas para hallar el valor de x en las siguientes igualdades:

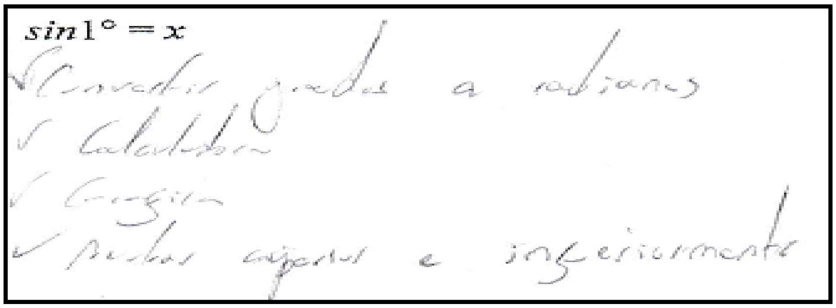
$sin 1° = x$	$sin\, x = 0{,}31$
Si conoces otras estrategias, enúncialas	

Figura 51. Pregunta número 3 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada

Fuente propia

Se evidencia que la estrategia a la que se remiten es al cálculo de valores mediante calculadora. En el primer ejercicio, hacen un cálculo directo; para el segundo ejercicio manifiestan el uso de la función inversa del seno para luego poder hallar la solución nuevamente con la calculadora.

Para el primer ejercicio uno de los maestros en formación avanzada remite a la conversión de grados a radianes para luego hacer uso de la calculadora.



$sin 1° = x$

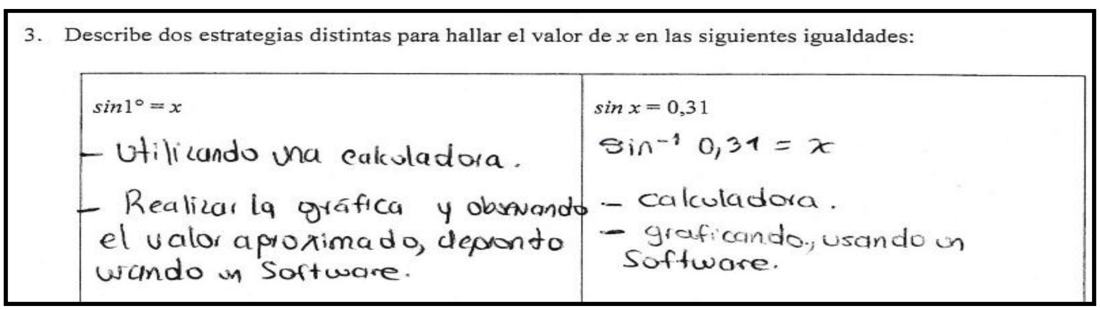
Convertir grados a radianes

Calculadora

Geogebra

[illegible]

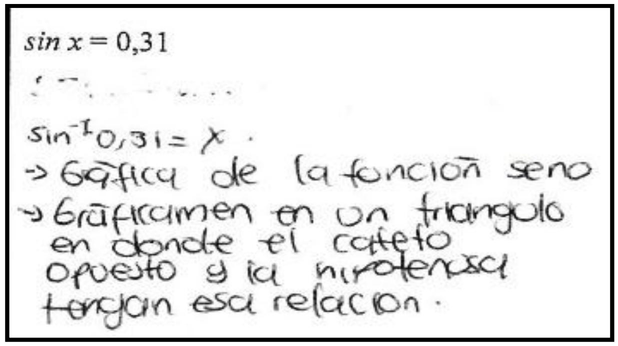
El método de aproximación gráfica es otra de las estrategias que presenta mayor número de alusiones, como se muestra en el siguiente fragmento:



3. Describe dos estrategias distintas para hallar el valor de x en las siguientes igualdades:

$sin 1° = x$	$sin\, x = 0{,}31$
– Utilizando una calculadora. – Realizar la gráfica y observando el valor aproximado, dependiendo usando un Software.	$sin^{-1}\, 0{,}31 = x$ – calculadora. – graficando., usando un Software.

Aunque el enunciado solicita una descripción de los métodos, las respuestas solo hacen alusión a las estrategias y no permiten ahondar en el paso a paso de la solución. En esta misma pregunta se registraron respuestas que hacen referencia a métodos geométricos; sin embargo, solo se hace mención del uso del triángulo sin mostrar procedimiento alguno; pero si se remiten a la definición de la razón seno en un triángulo rectángulo.


$\sin x = 0{,}31$

$\sin^{-1} 0{,}31 = x$.

-> Gráfica de la función seno

-> Gráficamen en un triangulo en donde el cateto opuesto y la hipotenusa tengan esa relacion.

En relación a las intervenciones se tomaron fragmentos que corresponden a este indicador los cuales se muestran en la siguiente red semántica:

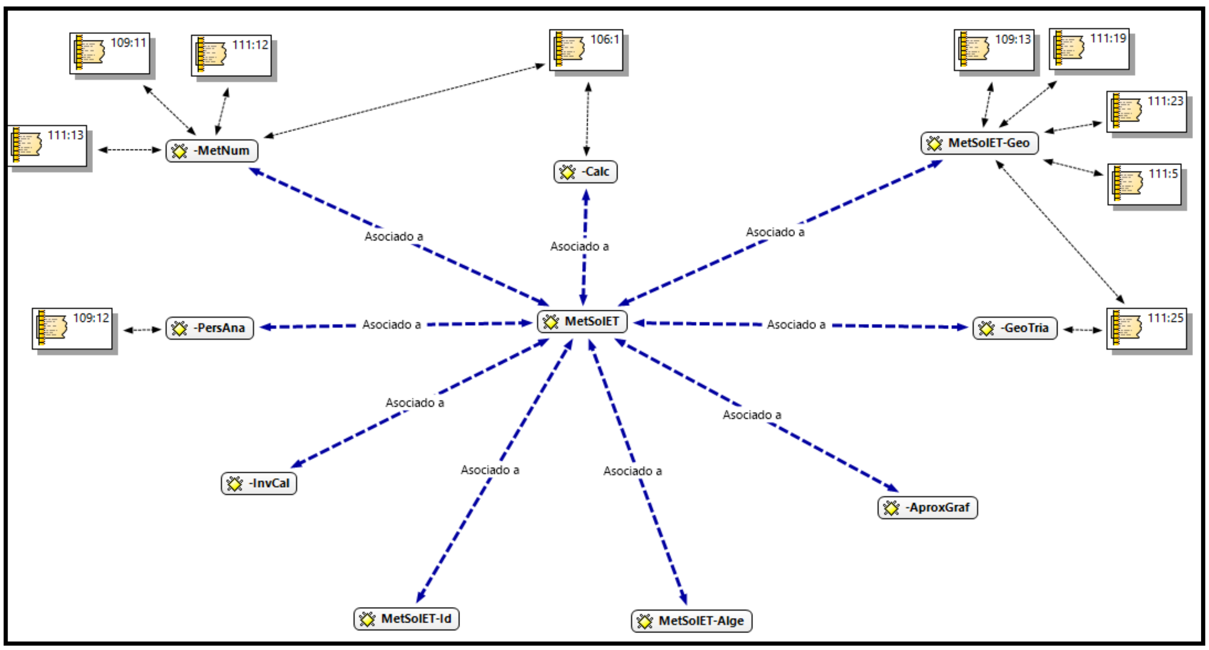


Figura 52. Red semántica PosteriorHM – MetSolET

Fuente propia

Posterior al estudio de documentos históricos que presentan algunos métodos de solución a las ET, en la segunda intervención los maestros en formación avanzada socializan estos métodos. Sus respuestas determinan dos corrientes: la primera, agrupa la mayoría de fragmentos; estos solo describen en detalle el método; la segunda, incluye los fragmentos que describen el método e intentan clasificarlo teniendo en cuenta la naturaleza de los procesos matemáticos usados en cada caso; además, presentan argumentos del porqué de esta clasificación, como se evidencia en los siguientes fragmentos:

Fragmento 109:11 Maestro en formación avanzada A: [Hablando del trabajo realizado por Chauvenet] *Él determina unas soluciones y ¿cómo halla esas soluciones? a partir de funciones trigonométricas de identidades trigonométricas y de logaritmos…*

Investigador –I-: ¿listo entonces como le llamaría al método?

A: De logaritmos y funciones, [aparecen otras intervenciones y retoma el maestro en formación avanzada A] *Método logarítmico* [Aludiendo a un método numérico].

***Fragmento 109:12:** (…) En el del maestro en formación avanzada A,* [Aludiendo al método de Viète que expuso el maestro A] *me parece que hay una especie de regula falsa porque él asume que hay una respuesta, trabaja con esa respuesta y luego sustituye…*

Profesor director del seminario: pero no sería ese sino más bien el nombre adecuado no sería ese sino una perspectiva analítica (…) suponer que existe luego encontrarlo y luego usarlo.

***Fragmento 109:13** [Aludiendo al método de Ptolomeo] (…) estábamos aquí discutiendo que ¿si era geométrico o no? pues porque yo consideraría que sí es geométrico en cuanto lo que decía mi compañero, trabajamos razones entre segmentos y aparte las mismas longitudes de las cuerdas (…)*

A continuación, se presenta un registro porcentual y gráfico de los aportes codificados en relación al indicador MetSolET:

MetSolET	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
Sub-Código	fi	%	fi	%
PersAna	0	0,0	1	8,3
MetNum	3	6,3	4	33,3
Alge	0	0,0	0	0,0
GeoTria	4	8,3	1	8,3
Geo	0	0,0	5	41,7
AproxGraf	16	33,3	0	0,0
Calc	15	31,3	1	8,3
InvCalc	10	20,8	0	0,0
Id	0	0,0	0	0,0
Total	48	100,0	12	100,0

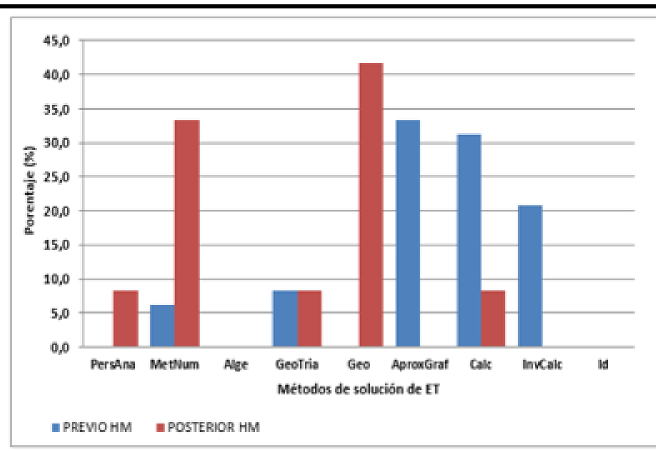


Figura 53. Frecuencia porcentual y gráfica de MetSolET

Fuente propia

De la tabla y las redes semánticas anteriores, se puede evidenciar que los métodos de solución expuestos por los maestros en formación avanzada en el momento previo a la HM, son empíricos (p. e., el uso de calculadora), mientras que posterior a la HM se cuestionan sobre la clasificación de los métodos formales que estudiaron y amplían su panorama conceptual en relación a los métodos que se pueden usar para dar solución a las ET.

Cabe resaltar, que luego de la segunda intervención aparecen dos ideas nuevas: la perspectiva analítica de los métodos, cuando se usa, por ejemplo, la regula falsa como estrategia de solución a las ET y los métodos numéricos que incluyen procesos reiterativos, cálculo de logaritmos, uso de tablas, entre otros.

5.1.2.5 Representaciones de las ET [RepET]

Este indicador alude a las asociaciones hechas por los maestros en formación avanzada en relación con las representaciones de las ET. Sin embargo, no se cuenta con una red semántica previa pues en las preguntas propuestas en el cuestionario las ET se presentaron de forma simbólica y no se indagó por otro tipo de representaciones. Para el momento posterior se cuenta con la siguiente red semántica:

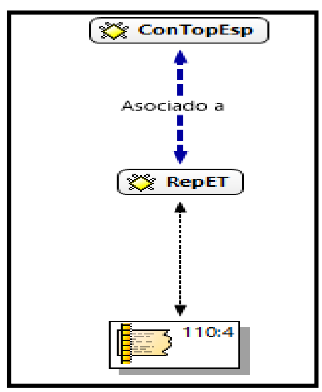


Figura 54. Red semántica PosteriorHM – RepET

Fuente propia

Como se puede evidenciar en esta red, son pocos los fragmentos asociados a este indicador, tal vez porque las tareas propuestas a los maestros en formación avanzada no incluían de forma explícita algún tipo de pregunta referida a este aspecto y en la mayor parte de los documentos históricos abordados las representaciones de la ET que más se evidenciaron fueron la representación simbólica y la numérica (tabular). Sin embargo, se generó reflexión acerca de los aportes que hace la HM en torno a las representaciones de los objetos matemáticos y cómo estas enriquecen el conocimiento del maestro en relación con el mismo objeto; esto se muestra en la siguiente transcripción:

> **Fragmento 110:4** *(…) y es que estos ejercicios nos dan muchas representaciones de un mismo objeto como lo que ella decía* [En referencia a uno de los investigadores], *nosotros solamente los representamos de una forma aritmética, algebraica pero no vemos tampoco la parte geométrica y tampoco vamos más allá a ver su estructura, la parte concreta del objeto, entonces sí es interesante como vemos diferentes representaciones y estas representaciones nos permiten una comprensión real del objeto (…).*

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con las ET desde la perspectiva matemática, se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 15. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConTopEsp

Unidad →	**CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [CoMatEns]**	
Sub-unidad→	**Conocimiento por Tópico Específico Matemático [ConTopEsp]**	
	La Historia de la Trigonometría y las ET permitió a los maestros en formación avanzada: i) reflexionar sobre los aspectos matemáticos de las ET que daban por hecho o consideraban “naturales”; por ejemplo, la naturaleza de la incógnita o el significado de “sin” en la expresión $sin\ (x) = k$, ii) caracterizar algunos métodos de solución a las ET y de dejar de lado la idea del uso de calculadora como única estrategia de solución para ET de la forma $FunTri(x) = k$ y iii) ampliar las relaciones conceptuales que se pueden establecer entre las ET y otros elementos matemáticos.	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
AtriET	Una ET se define como una expresión de la forma $FunTri(x) = k$ o $FunTri(x) + \ldots + FunTri(x) = k$ donde $k \in \mathbb{R}$; la idea es encontrar el valor de un ángulo o un valor numérico asociado a una longitud. Además, se caracteriza porque: i) es posible hallar el valor de x mediante un procedimiento, ii) no corresponde a una identidad, iii) no	Prevalece la idea de que una ET es de la forma $FunTri(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ o una combinación de expresiones trigonométricas y de que una ET no es identidad trigonométrica y viceversa. El estudio histórico permitió al maestro reflexionar sobre la periodicidad como un aspecto inherente a la solución de estas

	posee dos o más incógnitas, pues en estos casos se alude a una función trigonométrica; iv) es posible resolverla como una ecuación algebraica; v) existe la(s) solución(es) y dependen de la periodicidad de la(s) expresión(es) trigonométrica(s) involucrada(s). Por último, las expresiones de la forma *FunTri* (k) = x, corresponden a una solución particular de una ET (es un cálculo).	ecuaciones y la naturaleza de la incógnita (ángulo o longitud).
ProtET	Los maestros reconocen $sin18º=x$ como un ejemplo prototipo de ET, lo cual, resulta contradictorio con el indicador anterior pues argumentan que este tipo de expresiones corresponden a un cálculo.	No se cuenta con información para describir el conocimiento posterior en relación a este indicador en tanto que en la intervención 2 el uso del término expresión trigonométrica en lugar de ET, conllevó a que los maestros en formación avanzada se apropiaran de dicho vocablo y no permitió evidenciar si en sus afirmaciones hacían referencia a estas ecuaciones.
RelConcep	Las relaciones conceptuales de las ET propuestas por los maestros en formación avanzada corresponden a conceptos y procesos implicados en la solución de este tipo de ecuaciones; como por ejemplo funciones inversas, aplicación de identidades trigonométricas, etc.	Se amplían las relaciones conceptuales de las ET y se asocian aspectos como: la periodicidad, las operaciones y procesos de la aritmética y el álgebra; los procesos variacionales y la solución de ecuaciones algebraicas.
MetSolET	Las estrategias que reconocen como métodos de solución son: uso de calculadora, aproximación gráfica y aplicación de funciones trigonométricas inversas, en ningún caso se describe un método particular de solución.	Desaparece el uso de calculadora como "método de solución" a una ET y aparecen métodos numéricos, analíticos (p. e., la regula falsa), geométricos y algebraicos.

RepET	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación con este indicador, en tanto que en el cuestionario no se aludió a este asunto.	Se reconoce otro tipo de representación de las ET, la numérica (tabular) y se generó reflexión acerca de los aportes que hace la HM en torno a las representaciones de los objetos matemáticos y cómo estas enriquecen el conocimiento del maestro en relación con el mismo objeto.

5.1.3 SUB-UNIDAD: ConCuMatDM

La sub-unidad *Conocimiento sobre el Currículo Matemático* [ConCuMatDM] busca caracterizar la pertinencia de las ET en el currículo desde la perspectiva matemática; en otras palabras, reconocer las justificaciones Matemáticas de para qué y por qué es relevante aprender ET, las ideas más importantes para enseñarlas y los prerrequisitos necesarios para abordar este objeto. Todo ello se agrupa en tres indicadores pre-establecidos (JustApzETEvMat, PrqETRelCu y JustMatCuApzET) como se muestra en la *Figura 55*.

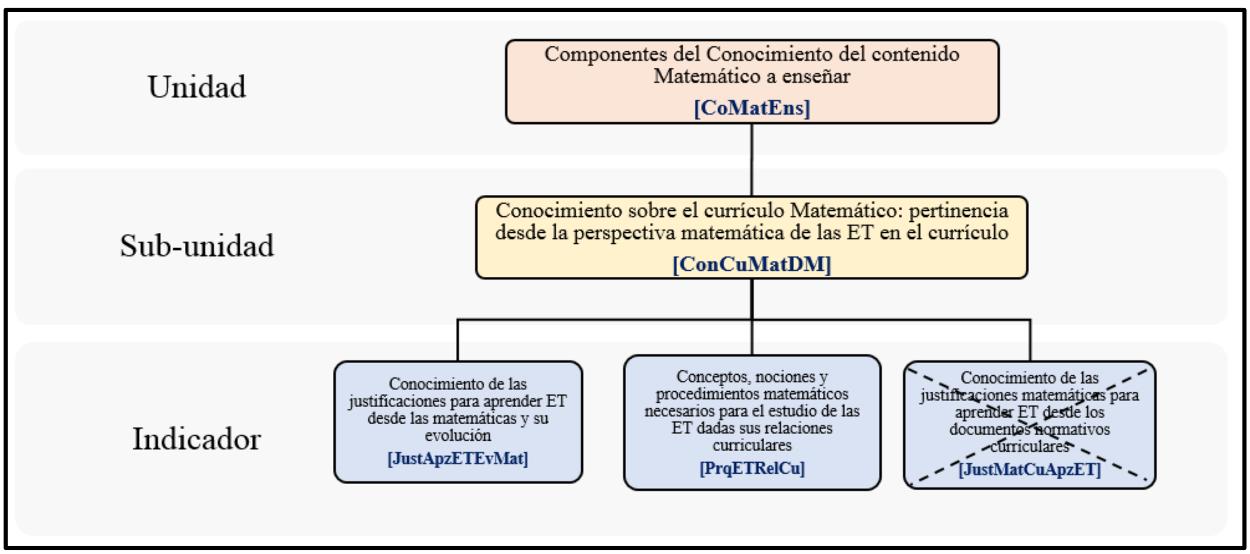


Figura 55. Esquema de indicadores de ConCuMatDM

Fuente propia

Para el primer indicador no se presenta un análisis del momento previo, pues el interés era indagar por las razones que tienen los maestros en formación avanzada para aprender ET, a partir del estudio de la historia de la Trigonometría y las ET. El segundo de ellos cuenta con un análisis previo y posterior, mientras que, para el último indicador no se cuenta con datos que permitan realizar algún tipo de análisis debido a que en las sesiones no se analizaron en detalle los documentos curriculares.

5.1.3.1 Justificaciones para el aprender ET desde de las Matemáticas y su evolución [JustApzETEvMat]

Este indicador se refiere a las razones que los maestros en formación avanzada dan como argumento para el aprendizaje de las ET desde la perspectiva matemática y la evolución del propio concepto. En relación con lo anterior y debido a que la mayoría de los maestros afirman no haber hecho un estudio histórico previo de las ET, no se presenta la primera red semántica; el análisis de este indicador inicia con red semántica posterior a HM como se muestra en la figura:

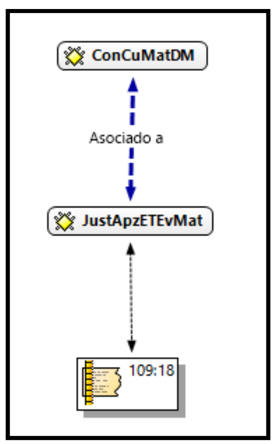


Figura 56. Red semántica PosteriorHM – JustApzETEvMat

Fuente propia

Luego del estudio histórico de las ET, la discusión sobre el tema llevó a un consenso por parte de los maestros en formación sobre el hecho de que aprender ET desde su historia permite adquirir una visión amplia y holística del objeto matemático brindando más herramientas para tratarlo; además, se reconoce la historia como un eje articulador del proceso de aprendizaje. Ello se evidencia en el siguiente fragmento:

> **Fragmento 109:18** *[Aludiendo a la desconexión de las ET en los programas curriculares] (…), yo pienso que la desconexión está más en cómo lo plantea uno (…) y cómo uno lo trabaja, porque por ejemplo en el de Omar Jayyam, que estábamos mirando, él dice, bueno ya lo solucioné (la ecuación que está ahí una de esas 14 ecuaciones) de una manera, pero también se soluciona si se corta una circunferencia con una hipérbola. Entonces,* ***si uno tuviera la manera de conectar ese tipo de cosas y que se trabajara la Trigonometría de una forma diferente de pronto enlazando todo eso que está ahí*** *[señalando todo lo expuesto por los maestros en formación avanzada] muy seguramente se vería la conexión,* ***pero como uno se rige a ciertas cosas*** *[da ejemplos de su afirmación]* ***pero no me voy a la Historia de*** *[algún objeto especifico]****, es por eso que quedan como desconectadas.***

5.1.3.2 Conceptos, nociones y procedimientos necesarios para el estudio de las ET dadas sus relaciones curriculares [PrqETRelCu]

En este indicador se recogen las afirmaciones que aluden a cuestiones curriculares relacionadas con el estudio de las ET desde la HM. Estas se clasificaron en tres aspectos: conceptos (Concp), nociones (Noc) y procedimientos (Proc), que a su vez están acompañados de un conjunto de sub-códigos tal como se muestra en la **Tabla 16.** Descripción de sub-códigos asociados a los prerrequisitos para el trabajo con las ET [PrqETRelCu]*Tabla 16*

Tabla 16. Descripción de sub-códigos asociados a los prerrequisitos para el trabajo con las ET [PrqETRelCu]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
PrqETRelCu-Concp-Ec PrqETRelCu-Concp-FunInv PrqETRelCu-Concp-FunTri PrqETRelCu-Concp-Semj PrqETRelCu-Concp-Ang PrqETRelCu-Concp-Raz PrqETRelCu-Concp-DefCal PrqETRelCu-Concp-Id	Estos sub códigos se refieren a los conceptos que los maestros en formación avanzada consideran son los prerrequisitos para el tratamiento de las ET.

PrqETRelCu-Noc-RepGraf PrqETRelCu-Noc-HTri PrqETRelCu-Noc-SolEc	Estos sub códigos se refieren a las nociones que los maestros en formación avanzada consideran deben ser prerrequisitos para el tratamiento de las ET.
PrqETRelCu-Proc-UsoCal PrqETRelCu-Proc-Arit PrqETRelCu-Proc-Alge PrqETRelCu-Proc-Graf PrqETRelCu-Proc-Id	Estos sub códigos se refieren a los procedimientos que los maestros en formación avanzada consideran deben ser prerrequisitos para el tratamiento de las ET.

En la siguiente imagen se muestra la red semántica que recopila el registro de las afirmaciones realizadas por los maestros en formación avanzada en relación a este indicador:

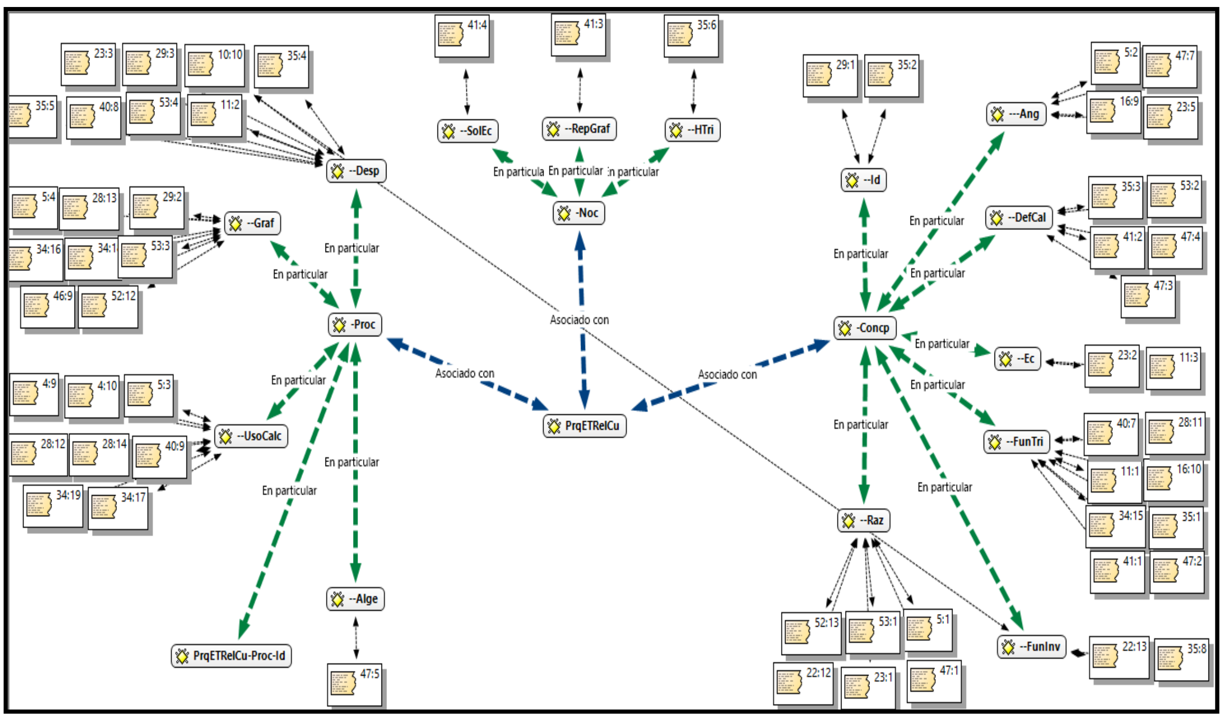


Figura 57. Red semántica PrevioHM- PrqETRelCu

Fuente propia

Los fragmentos que fueron seleccionados para el análisis de este indicador corresponden a las respuestas dadas por los maestros a las preguntas siete y ocho del cuestionario (*Figura 58*). En estas, se indagó por los conceptos, nociones y procedimientos necesarios para el estudio de las

ET. Es de resaltar, que dentro de la investigación no se dio definición alguna sobre estos tres elementos lo cual permitió identificar cuáles son las consideraciones que tienen los maestros en relación a estos términos.

7. Dadas las expresiones $\sin k = x$ y $\sin x = k$ para las cuales k es un valor conocido y x un valor desconocido, escribe una posible y breve secuencia para enseñarlas en la escuela. Si consideras que ambas expresiones se pueden enseñar usando una misma secuencia completa sólo una de las columnas y argumenta en la parte de Justificación el porqué de tu decisión.

$\boldsymbol{\sin k = x}$	$\boldsymbol{\sin x = k}$
Justificación:	

8. Lista los conceptos, nociones y procedimientos que, a tu juicio, necesita un estudiante para resolver una Ecuación Trigonométrica.

CONCEPTOS (Definiciones, teorías)	**NOCIONES** (Ideas intuitivas, pre-saberes)	**PROCEDIMIENTOS** (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)

Figura 58. Preguntas 7 y 8 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada

Fuente propia

Una de las principales características encontradas en la red, es el hallazgo de un mayor número de conceptos que de nociones o procedimientos para el estudio de las ET. En relación a este primer elemento, los maestros escriben un listado de contenidos (p. e., ángulos, razones trigonométricas, funciones, funciones trigonométricas, funciones inversas, identidades, definiciones de Calculo y ecuaciones) que se corresponden con los presentados en los libros de texto que se usan para la enseñanza de la Trigonometría en grado décimo (10°). Sin embargo, los maestros no describen los elementos específicos que se deben tratar de cada concepto.

La siguiente imagen corresponde a cuatro fragmentos de las respuestas dadas a la pregunta siete (7):

Respuesta 1 **Respuesta 2** **Respuesta 3** **Respuesta 4**

CONCEPTOS (Definiciones, teorías)	CONCEPTOS (Definiciones, teorías)	CONCEPTOS (Definiciones, teorías)	CONCEPTOS (Definiciones, teorías)
• Sen Razones trigonométricas • Angulos • Radianes	– Identidades trigonometricas – ángulos	✓ número ✓ función ✓ función trigonométrica ✓ Variación ✓ Identidades Trigonometricas	Razón Trigonométrica Función Trigonométrica Dominio y Rango de funciones Propiedades [illegible]

En orden de aparición, el segundo aspecto al que los maestros en formación avanzada atribuyen mayor número de prerrequisitos son los procedimientos, entre los que se encuentran: procedimientos algebraicos, uso de calculadora, despeje y uso de métodos gráficos en la solución de ecuaciones. En particular, es de notar que el uso de calculadora tiene igual relevancia que el despeje de ecuaciones y el uso de métodos gráficos.

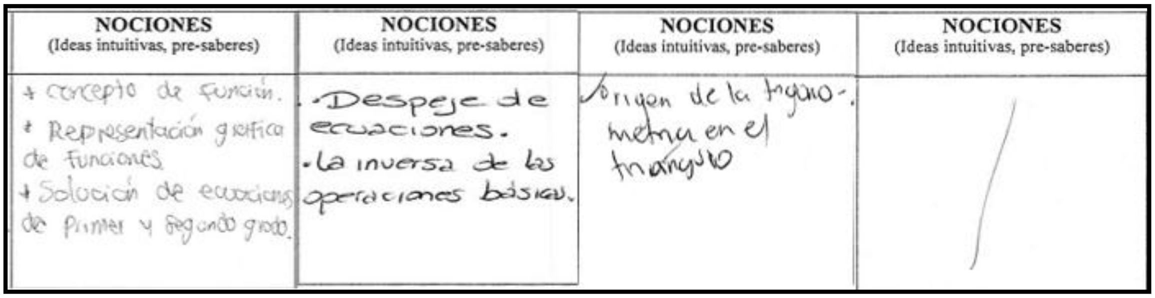
Los siguientes fragmentos corresponden a algunas respuestas dadas por los maestros en formación avanzada a las preguntas 7 y 8 respectivamente. En ellas, se evidencian los procedimientos que consideran pre-requisitos para el estudio de las ET:

$\sin k = x$	$\sin k = x$	$\sin k = x$
Usando la calculadora, queaprovechen el recurso brindado.	→ determinando la relacion entre angulos y segmentos a partir de la tabulación y grafica.	- Por medio de la gráfica del Seno mostraria a los estudiantes el valor para ese K especifico y también se podria utilizar una Calculadora.

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)	PROCEDIMIENTOS (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)	PROCEDIMIENTOS (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)	PROCEDIMIENTOS (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)
• Gráficar funciones • Uso de calculadora	→ determinación grafica.	Despejar ecuaciones factorizar	– Graficar – Manejo calculadora. - Procedimientos algebraicos

Finalmente, son pocos los maestros que hacen alusión a las nociones que deben ser prerrequisito para la enseñanza de las ET. Esto puede ser causa de porque los maestros en formación avanzada: i) consideran que no es necesario tener nociones para el aprendizaje de las ET o ii) no conocen las nociones que son pre-requisito para el estudio de las ET.

La imagen a continuación muestra las respuestas dadas por cuatro (4) maestros en formación avanzada en relación a este sub-código, en estas se evidencian las afirmaciones anteriores:



Respuesta 1	Respuesta 2	Respuesta 3	Respuesta 4
NOCIONES (Ideas intuitivas, pre-saberes)	NOCIONES (Ideas intuitivas, pre-saberes)	NOCIONES (Ideas intuitivas, pre-saberes)	NOCIONES (Ideas intuitivas, pre-saberes)
+ Concepto de función. + Representación gráfica de funciones + Solución de ecuaciones de primer y segundo grado.	· Despeje de ecuaciones. · La inversa de las operaciones básicas.	Origen de la trigonometría en el triángulo	/

El registro de los fragmentos asociados al indicador luego del acercamiento a la Historia de las ET se muestra en la red semántica:

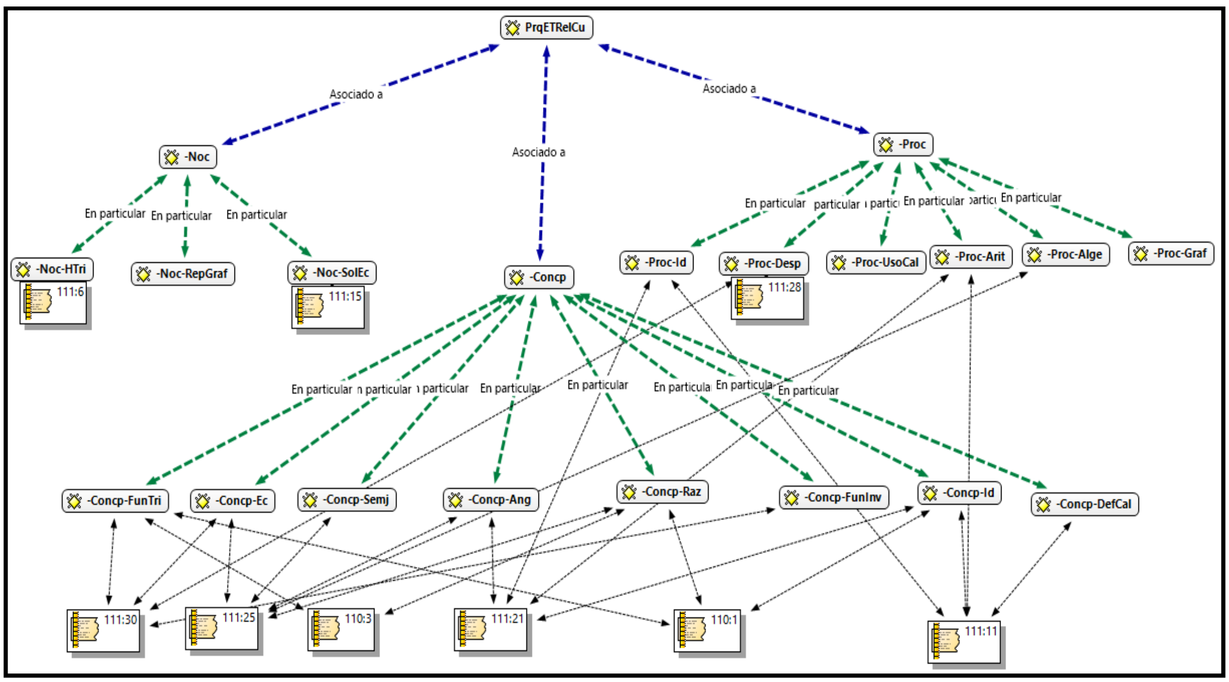


Figura 59. PosteriorHM – Red semántica PrqETRelCu

Fuente propia

Como se evidencia en la red semántica posterior a HM algunos maestros en formación avanzada consideran importante que existan algunos prerrequisitos antes de abordar el estudio de las ET. En particular, estos se asocian a conceptos propios de la geometría (p. e., la semejanza de triángulos, ángulos, entre otros), del álgebra (p. e., ecuación, identidades, entre otros) y del cálculo (p. e., función, razón, entre otros). Ejemplo de lo anterior, se presenta en los siguientes fragmentos:

> **Fragmento 111:30** *(...) y los conocimientos previos que considero se deben tener* [para comprender el método de solución de Viète] *es: **álgebra básica, despejar reemplazar y conocer la función arco seno y arco coseno** porque él* [Viète] *plantea la solución* [de una ET] *en términos de esa función, la arco-coseno.*
>
> **Fragmento 110:3** [Este fragmento corresponde a la respuesta de un maestro en formación avanzada en relación a la pregunta: ¿Cuáles serían los requisitos necesarios para el estudio de las ET?] *Establecer bien las **razones trigonométricas** y luego mostrar que son **funciones,** una vez tenga las **funciones trigonométricas**, ahí si vendrían las ET y después las identidades.*
>
> **Fragmento 110:1** ***Todo esto* [en alusión a identidades, razones, funciones trigonométricas, ecuaciones]** *son los preconceptos para que ellos* [estudiantes] *entiendan en la universidad las ET, porque allá es donde realmente lo van a aplicar* (…)

Cabe resaltar que, en algunos fragmentos codificados, aunque no existen afirmaciones de los maestros en formación avanzada entorno a los prerrequisitos, en la exposición que hacen del método asignado se entrevé el uso de nociones (p. e., historia de la Trigonometría y solución a ecuaciones) y procedimientos (p. e., despejar ecuaciones, entre otras) necesarios para la solución de una ET.

Por otra parte, al comparar la frecuencia de aparición de cada sub-código de este indicador en los dos momentos, resulta la tabla de frecuencias que se muestra a continuación:

	PrqETRelCu	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
	Sub-Código	f_i	%	f_i	%
Concp	Ec	2	3,9	2	10,5
	FunInv	3	5,9	1	5,3
	FunTri	8	15,7	3	15,8
	Semj	0	0,0	1	5,3
	Ang	4	7,8	2	10,5
	Raz	6	11,8	3	15,8
	DefCal	5	9,8	1	5,3
	Id	2	3,9	3	15,8
Noc	RepGraf	1	2,0	0	0,0
	Htri	1	2,0	1	5,3
	SolEc	1	2,0	1	5,3
Proc	UsoCalc	8	15,7	0	0,0
	Arit	0	0,0	0	0,0
	Alge	2	3,9	1	5,3
	Graf	8	15,7	0	0,0
	Id	0	0,0	0	0,0
	Total	51	100,0	19	100,0

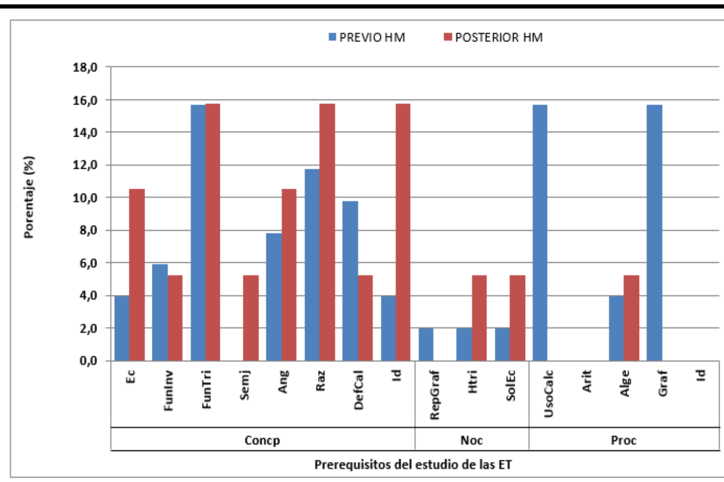


Figura 60. Frecuencia porcentual y gráfica de PrqETRelCu

Fuente propia

Se puede concluir que: i) no hay variación significativa en los conceptos previos que los maestros en formación avanzada consideran necesarios para el estudio de las ET, pues, aunque el número de fragmentos disminuye, se mantienen las ideas iniciales en relación a este aspecto; ii) son pocos los fragmentos codificados con el sub-código de nociones por lo cual no es posible concluir algo contundente al respecto; sin embargo, se puede notar que la noción de representación gráfica de las ET desaparece, lo cual obedece a que los métodos abordados en la intervención no hacen referencia alguna a este asunto y iii) luego del trabajo con la historia de las ET el uso de la calculadora y gráfica como procedimientos de solución a las ET desaparece y se mantiene el uso de estrategias algebraicas. Es de resaltar que en el momento posterior a la HM disminuye el número de fragmentos codificados pues los maestros en formación avanzada se ocuparon de exponer el método asignado y los conceptos asociados a este, sin aludir a las nociones y procedimientos necesarios para dar solución a las ET.

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con la pertinencia de las ET en el currículo desde la perspectiva matemática, se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 17. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConCuMatDM

<table>
<tr><th>Unidad →</th><th colspan="2">CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR [CoMatEns]</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sub-unidad→</td><td colspan="2">Conocimiento sobre el Currículo Matemático [ConCuMatDM]</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudio de los métodos de solución a las ET contribuyó: i) al reconocimiento del potencial de la HM en el proceso de aprendizaje, ii) a ampliar la visión matemática del objeto (ET), iii) a reconocer un conjunto de prerrequisitos no necesariamente producto de la organización curricular de las Matemáticas escolares ni los impuestos por los libros de texto.</td></tr>
<tr><td>Indicador ↓</td><td>PREVIO HM</td><td>POSTERIOR HM</td></tr>
<tr><td>JustApzETEvMat</td><td>No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.</td><td>El aprendizaje de las ET desde su historia permite adquirir una visión amplia y holística del objeto matemático brindándole más herramientas para tratarlo.</td></tr>
</table>

		La HM adquiere valor como un eje articulador del proceso de aprendizaje.
PrqETRelCu	Los conceptos que se asocian como prerrequisitos para abordar las ET, corresponden a un listado de contenidos (p. e., ángulos, razones trigonométricas, funciones, funciones trigonométricas, funciones inversas, identidades, definiciones de Cálculo y ecuaciones) muy similar al conjunto de temas presentados en los libros de texto que se usan para la enseñanza de la Trigonometría en grado décimo (10°). Los procedimientos que se reconocen como previos están asociados con las estrategias de solución a las ET, ellos son: procedimientos algebraicos, uso de calculadora, despeje y uso de métodos gráficos.	Los métodos de solución de ET abordados desde la historia, aportan algunos prerrequisitos que se pueden agrupar en: *conceptos* propios de la geometría (p. e., la semejanza de triángulos, ángulos, entre otros), del álgebra (p. e., ecuación, identidades, entre otros) y del cálculo (p. e., función, razón, entre otros); *nociones* como hitos de la Trigonometría y procedimientos como despeje de ecuaciones.
JustMatCuApzET	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo y posterior en relación a este indicador.	

5.2 UNIDAD: CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS [CoEstRepInst]

Esta unidad está relacionada con: i) la forma en que los maestros enseñan un contenido matemático de manera efectiva, ii) el conocimiento de la didáctica específica, es decir, los métodos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático particular, iii) cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido matemático a los estudiantes, iv) cómo promover el interés y potenciar las habilidades Matemáticas del estudiante, v) los elementos (materiales y representaciones instruccionales) usados por el profesor para ayudar a la generación del conocimiento de los estudiantes, entre otros. Ello se agrupa en cuatro indicadores pre-establecidos a saber: ConRetInst, ConMtrCu y ConCuMaTDD

5.2.1 SUB-UNIDAD: ConRepInst

El *Conocimiento sobre las Representaciones Instruccionales* [ConRepInst] hace referencia al conocimiento de las rutinas instruccionales; esto es, de las estrategias, métodos o técnicas específicas de enseñanza de un contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción. Así, a este sub-unidad se asocia un solo indicador como lo muestra la figura:

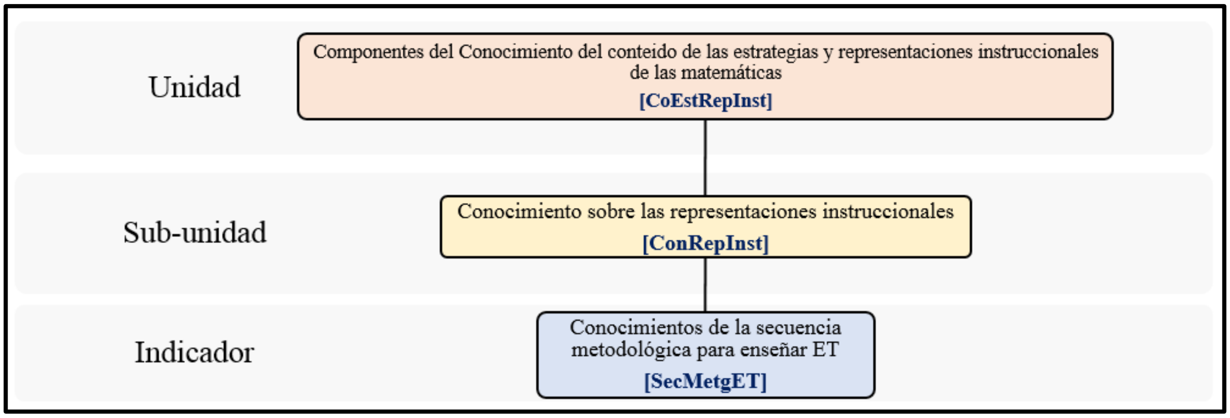


Figura 61. Esquema de indicadores de ConRepInst

Fuente propia

5.2.1.1 Conocimientos de la Secuencia metodológica para enseñar ET [SecMetgET]

El indicador SecMetgET recopila las secuencias metodológicas que los maestros en formación avanzada reportan para la enseñanza de las ET, las cuales se describen con los siguientes sub-códigos:

Tabla 18. Descripción de sub-códigos asociados a la posible secuencia metodología para enseñar ET [SecMetgET]

SUB-CÓDIGO	DESCRIPCIÓN
SecMetgET-Alge SecMetgET-CirRazFun	Estos sub-códigos aluden a secuencias metodológicas que los maestros en formación avanzada sugieren para el

SecMetgET-FunUso SecMetgET-Graf SecMetgET-MetSol SecMetgET-RazFun SecMetgET-TriTri	estudio de las ET en el aula; por ejemplo, trabajar aspectos varios del álgebra y luego ET (Alge), abordar la noción de círculo unitario, razones y funciones trigonométricas y posterior ET (CirRazFun), entre otras.
SecMetgET-RefPracDoc	Este sub-código se refiere a reflexiones realizadas por los maestros que aluden a la complejidad de la enseñanza de las ET.
SecMetgET-NoSec	Este sub-código se refiere al desconocimiento de los maestros en formación avanzada, de secuencias metodológicas para abordar las ET.

La *Figura 62* muestra el registro de los fragmentos asociados a este indicador en el momento previo al estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET:

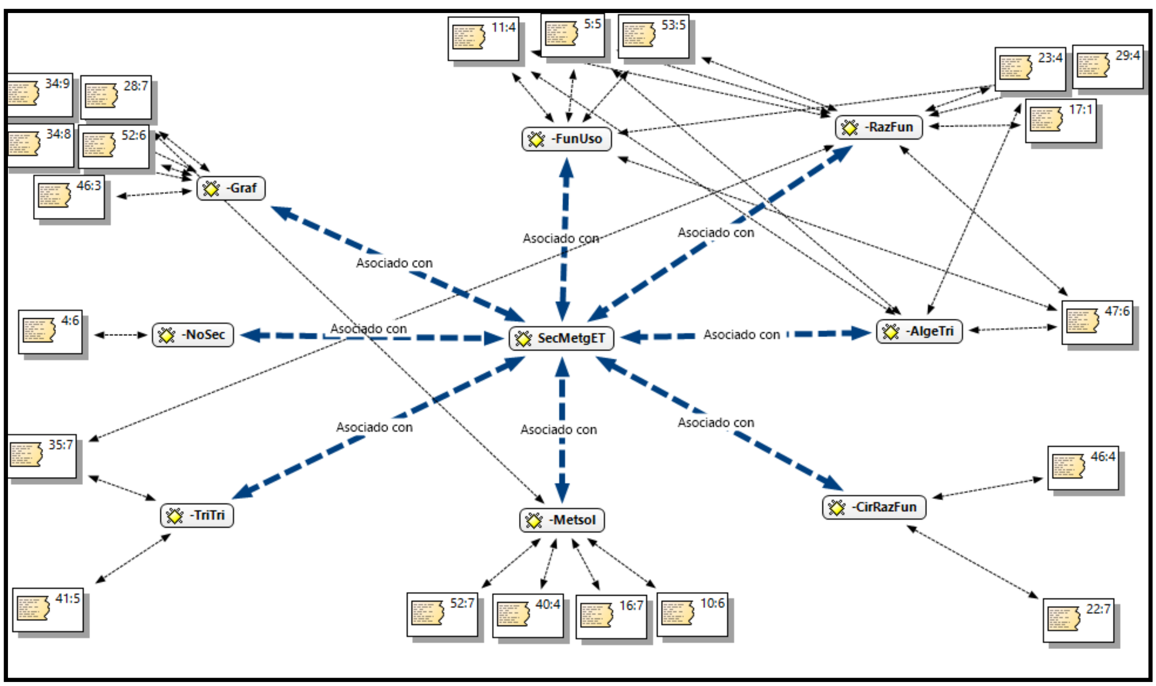


Figura 62. *Red semántica PrevioHM – SecMetgET*

Fuente propia

Las preguntas siete (7) y nueve (9) del cuestionario permitieron indagar por la secuencia metodológica/temática que los maestros en formación avanzada consideran como ruta para el abordaje de las ET en el aula de clase. En la primera pregunta, se presenta un ejemplo de ET y se pide al maestro describir una secuencia para enseñar a solucionarla (ver *Figura 58*):

En la segunda pregunta se lista un conjunto de temas de la Trigonometría que se abordan en grado décimo y se solicita al maestro organizar estos contenidos de acuerdo a la secuencia metodológica que usa o usaría de forma previa para enseñar ET:

9. **A)** Organiza los siguientes temas en la columna de la derecha de acuerdo a la secuencia metodológica previa que usas (o usarías) para enseñar Ecuaciones Trigonométricas, en caso de no abordar alguno de los temas no lo escribas.

TEMAS	SECUENCIA
A. Razones trigonométricas B. Funciones trigonométricas. C. Factorización. D. Ejemplos, problemas y contextos de uso de las ecuaciones trigonométricas E. Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas (solución de ecuaciones de primer y segundo grado). F. Operaciones numéricas con expresiones trigonométricas (p. e., $sin1° + cos30° - 2$). G. Identidades trigonométricas.	

B) ¿Abordas algún otro tema que no se consideró en la lista? Sí ☐ No ☐

¿Cuál? ____

Figura 63. Preguntas 9 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada

Fuente propia

De la red se puede evidenciar que la secuencia previa que más describen los maestros en formación avanzada para enseñar ET es abordar primero el estudio de las razones trigonométricas y luego las funciones trigonométricas, como se evidencia en los siguientes fragmentos:

TEMAS	SECUENCIA
3 A. Razones trigonométricas	A. Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas.
4 B. Funciones trigonométricas.	B. Factorización.
2 C. Factorización.	C. Razones trigonométricas.
7 D. Ejemplos, problemas y contextos de uso de las ecuaciones trigonométricas	D. Funciones trigonométricas.
1 E. Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas (solución de ecuaciones de primer y segundo grado).	E. Identidades trigonométricas
6 F. Operaciones numéricas con expresiones trigonométricas (p. e., $sin1° + cos30° - 2$).	F. Operaciones con expresiones trigonométricas.
5 G. Identidades trigonométricas.	G. Ejemplos, problemas y contexts

TEMAS	SECUENCIA
~~A.~~ Razones trigonométricas	C.
~~B.~~ Funciones trigonométricas	E.
~~C.~~ Factorización.	$\boxed{\text{A.}}$
~~D.~~ Ejemplos, problemas y contextos de uso de las ecuaciones trigonométricas	$\boxed{\text{B.}}$
~~E.~~ Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas (solución de ecuaciones de primer y segundo grado).	F.
~~F.~~ Operaciones numéricas con expresiones trigonométricas (p. e., $sin1° + cos30° - 2$).	G
~~G.~~ Identidades trigonométricas.	D.

Con menos frecuencia que la secuencia anterior, los maestros presentan dos formas de abordaje previo al estudio y solución de las ET, basadas en: i) la representación gráfica de las funciones trigonométricas y el uso de la calculadora; y ii) el conocimiento de las funciones trigonométricas inversas y estrategias numéricas como el uso de tablas de valores. Lo anterior se puede visualizar en los siguientes fragmentos:

$\boldsymbol{sin\, k = x}$	$\boldsymbol{sin\, x = k}$
Uso de función inversa **Uso de calculadora**	En este caso se conoce el valor de Sen x, para un ángulo determinado. Se debe hallar el valor del ángulo, para tal motivo. Se debe despejar la ecuación así: Sen x = K. x = Sen^{-1} K. Posterior a ello, se emplea la calculadora para hallar el resultado.

1. Gráfica de las funciones trigonométricas
2. Uso de calculadora

1. Función Trigonométrica
2. Función Trigonométrica Inversa
3. Uso de calculadora

$\boldsymbol{sin\, k = x}$	$\boldsymbol{sin\, x = k}$
Es necesario hallar el valor correspondiente en K en la función seno, así se puede aproximar por medio de la gráfica de la función seno, ✓ Con calculadora	Una vez reconocida la función seno ahora es posible realizar la construcción de la función inversa y así reconocer este tipo de valores ✓ con calculadora

Cabe resaltar que los resultados descritos antes, guardan estrecha relación con los pre-requisitos que los maestros consideran deben poseer los estudiantes para solucionar ET. De allí que cada uno proponga un orden particular, lo cual, evidencia una falta de consenso en relación con la secuencia previa que se debería usar para abordar las ET. No obstante, posterior al estudio de la HM resulta la red semántica que se muestra a continuación:

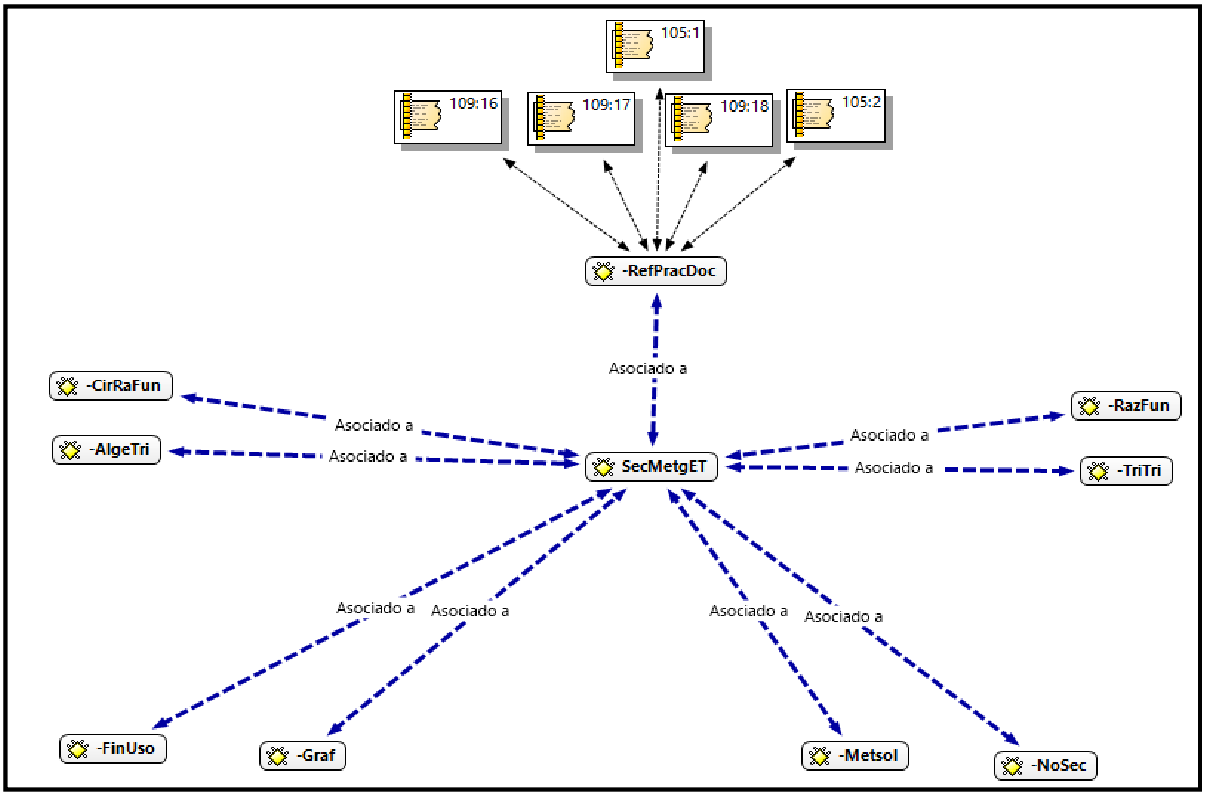


Figura 64. Red semántica PosteriorHM – SecMetgET

Fuente propia

De la red se evidencia la inexistencia de fragmentos que aludan a la descripción de una secuencia previa para abordar las ET. Además, los maestros en formación avanzada presentan reflexiones que aluden a la dificultad de proponer una secuencia específica, pues los elementos estudiados en la historia de las ET les generan cuestionamientos sobre el tratamiento y las potencialidades de este concepto en el aula, así como se muestra en los siguientes fragmentos:

> **Fragmento 105:2** [Respuesta de un maestro en formación avanzada frente a la pregunta ¿qué secuencia metodológica emplearía para abordar las ET en el aula] (…) *Yo no me atrevería a dar una respuesta inmediata como lo hice en el cuestionario si no que tendría que indagar, estudiar y profundizar más.*

> **Fragmento 105:2** [Respuesta de un maestro en formación avanzada frente a la pregunta ¿qué secuencia metodológica emplearía para abordar las ET en el aula] *yo tengo un gran vacío frente a todo esto* [Luego del acercamiento a la Historia de las ET] *y lo que me corresponde ahora es*

ir a estudiar y después de estudiar ahí sí podría responder, lo que me dejo el estudio de las ET que se hizo en el curso fue muchas preguntas.

Por último, el contraste de aparición de cada sub-códigos en el momento previo y posterior al estudio de la HM se muestra en la siguiente tabla de frecuencias:

SecMetgET	PREVIO HM		POSTERIOR HM	
Sub-Código	fi	%	fi	%
Alge	4	12,5	0	0,0
CirRazFun	2	6,3	0	0,0
FunUso	5	15,6	0	0,0
Graf	5	15,6	0	0,0
MetSol	5	15,6	0	0,0
RazFun	8	25,0	0	0,0
TriTri	2	6,3	0	0,0
RefPracDoc	0	0,0	5	100,0
NoSec	1	3,1	0	0,0
Total	32	100	5	100,0

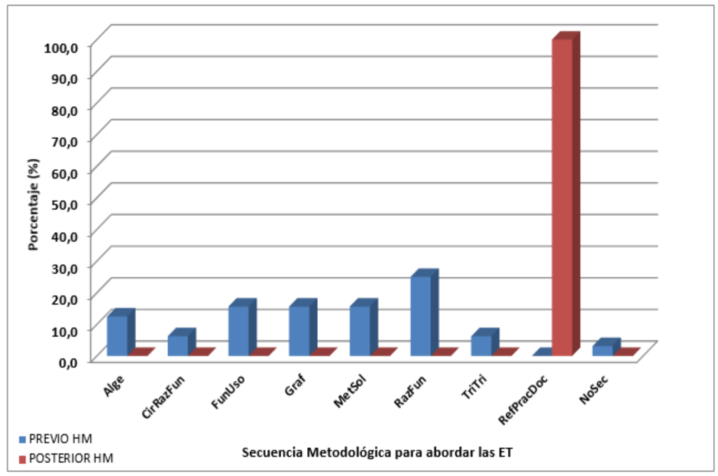


Figura 65. Frecuencia porcentual y gráfica de SecMetgET

Fuente propia

Es evidente que el estudio de la historia de las ET, permite al maestro en formación avanzada reflexionar sobre cuál sería la secuencia previa para abordar las ET, causa de porque el número de fragmentos codificados disminuye notoriamente como se evidencia en la tabla de frecuencias.

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con las representaciones instruccionales de las ET, se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 19. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConRepInst

Unidad →	**CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS [CoEstRepInst]**
Sub-unidad→	**Conocimiento sobre las Representaciones Instruccionales [ConRepInst]**

	La Historia de la Trigonometría y las ET permitió al maestro en formación avanzada reflexionar sobre algunos aspectos relacionados con la enseñanza de las ET y con la forma en que usualmente ellos abordan este tema en clase (reflexión de su práctica docente), en otras palabras, adquirió conocimientos sobre: ¿Cómo del estudio histórico de las ET aporta elementos que permitan secuenciar este tema en el aula de Matemáticas?	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
SecMetgET	Las secuencias metodológicas reportadas se caracterizan por: i) abordar en orden el estudio de razones trigonométricas, funciones trigonométricas, identidades y luego ET, ii) el listado temático secuencial corresponde a un a conjunto de prerrequisitos para el estudio de las ET y iii) el uso de calculadora se reporta como un paso previo al estudio de las ET.	Ya no se presenta un listado temático como secuencia metodológica para el estudio de las ET, sino que se generan algunas reflexiones en torno a la complejidad del concepto y la necesidad de ahondar más en su definición y características desde la HM, con el objetivo de estructurar una ruta de abordaje en el aula.

5.2.2 SUB-UNIDAD: ConMtrCu

Este sub-unidad se refiere al *Conocimiento de los Materiales Curriculares* [ConMtrCu] usados para la instrucción de determinado contenido matemático; para este caso, solo se establece un indicador (*Figura 66*) que alude al conocimiento del maestro en formación avanzada de los materiales que se pueden usar para enseñar ET, por ejemplo, el conocimiento y evaluación de los libros de texto utilizados en grado décimo para abordar las ET.

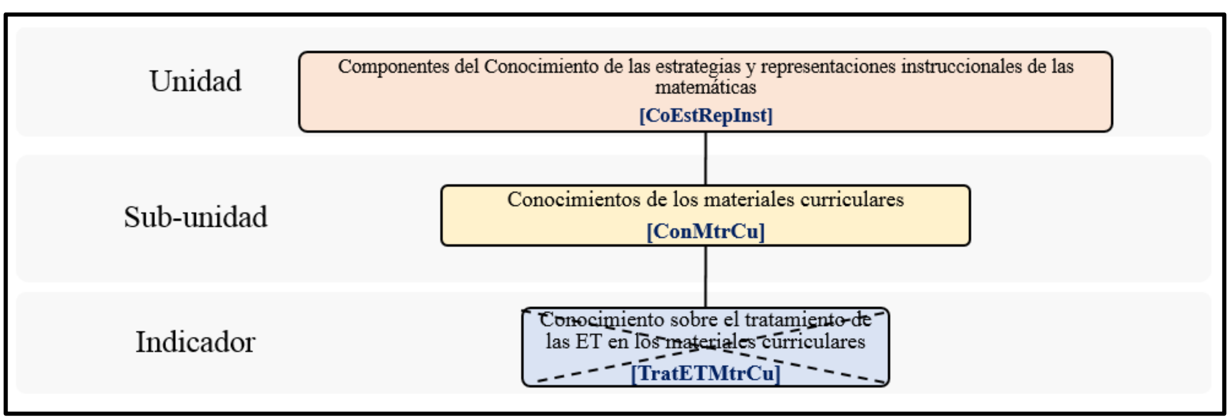


Figura 66. Esquema de indicadores de ConMtrCu

Fuente propia

Al no contar en el cuestionario con una pregunta que permitiera recolectar información sobre este indicador y al no discutir en la sesión posterior al estudio de la Historia de Trigonometría y las ET sobre aspectos relacionados con los materiales curriculares y de enseñanza, no se cuenta con fragmentos para el análisis de este indicador.

5.2.3 SUB-UNIDAD: ConCuMaTDD

La sub-unidad del *Conocimiento sobre el Currículo Matemático* [ConCuMatDD], busca indagar por la pertinencia de las ET en el currículo desde la perspectiva didáctica/instruccional, en particular, por el conocimiento sobre la planificación de la enseñanza de las ET. Así, para esta sub-unidad se establecen dos indicadores (SecHCuTri y JustInsEnsET), tal como se muestra en el siguiente esquema:

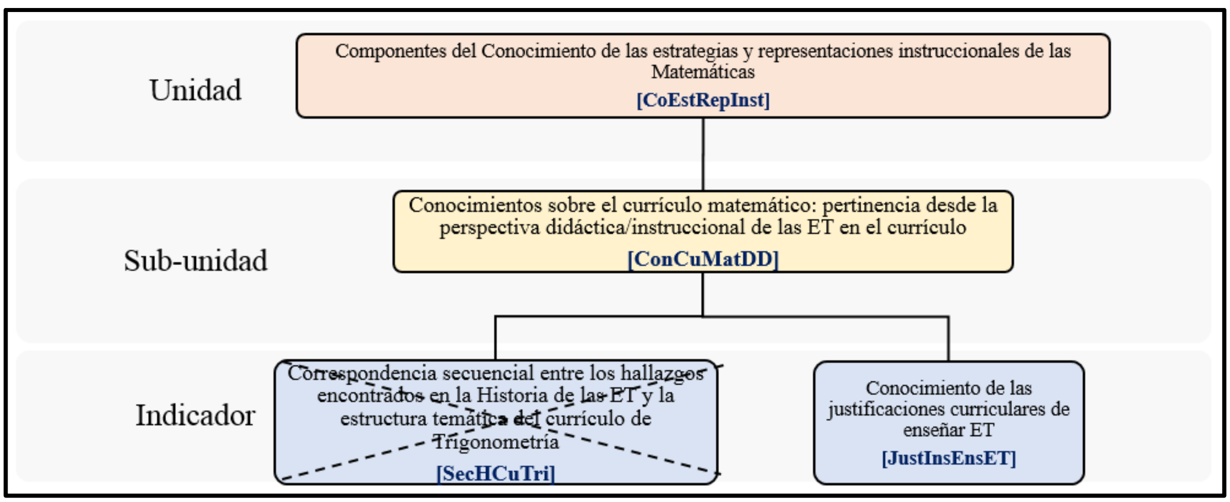


Figura 67. Esquema de indicadores de ConCuMatDD

Fuente propia

Cabe aclarar que, para el indicador SecHCuTri no se cuenta con información que permita hacer un análisis. Se esperaba que los maestros en formación avanzada relacionaran aspectos abordados de la Historia de la Trigonometría y las ET con la estructura curricular propuesta para el área de Trigonometría, lo cual no se evidenció en las intervenciones.

5.2.3.1 Justificaciones curriculares de enseñar ET [JustInsEnsET]

Este indicador permitió identificar las justificaciones que dan los maestros en formación avanzada en relación con la inclusión de las ET en el currículo de Matemáticas y en el plan de estudios de grado décimo. Al respecto, la pregunta seis del cuestionario (*Figura 68*) da cuenta de este asunto:

6. ¿Es importante incluir Ecuaciones Trigonométricas en el currículo escolar? Sí ☐ No ☐

¿Por qué?

Figura 68. Preguntas 6 del cuestionario aplicado a los maestros en formación avanzada

Fuente propia

Luego de la aplicación del cuestionario y la codificación de la información, resulta la siguiente red semántica para el momento previo:

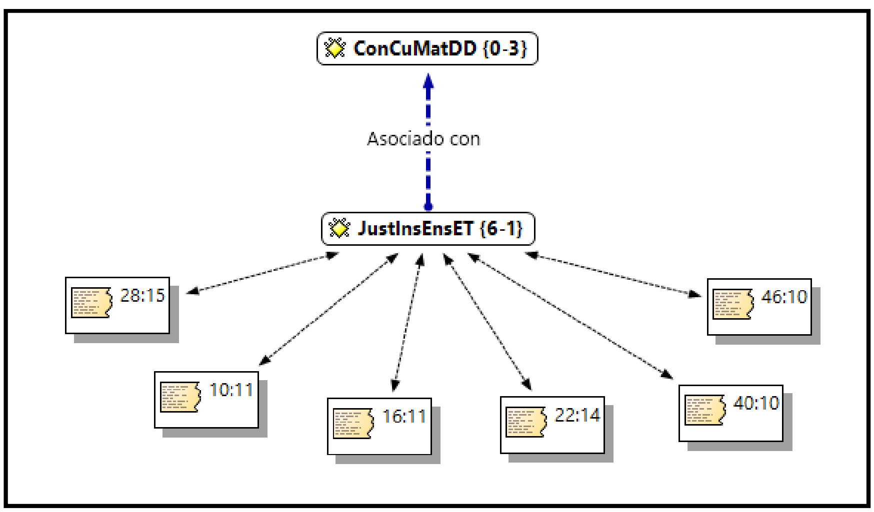


Figura 69. Red semántica PrevioHM – JustInsEnsET

Fuente propia

En el análisis de las respuestas dadas por los maestros a esta pregunta (fragmentos codificados en la red), se reconocen tres razones que justifican la presencia de las ET en el currículo de Matemáticas:

i) son útiles para la modelación de fenómenos de la cotidianidad, lo cual, facilita el desarrollo de procesos matemáticos en los estudiantes:

> ¿Por qué?
> Es una herramienta que facilita la solución de algunas situaciones de la cotidianidad, además son una base fundamental para estudios superiores. ó posteriores.

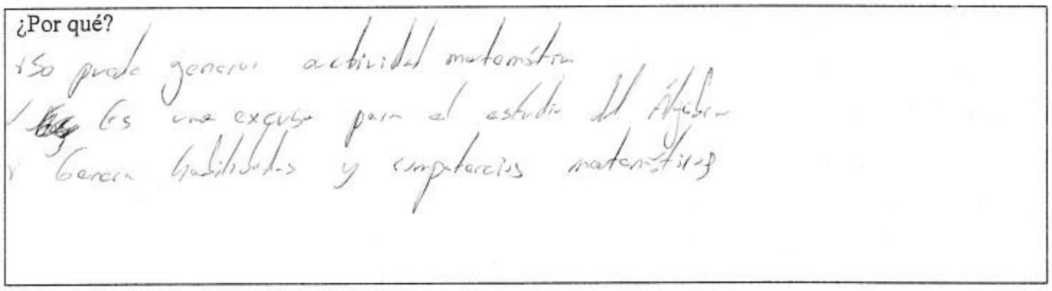
> ¿Por qué?
> Las aplicaciones al resolverlas estan en contextos que no se manejan cotidianamente.

ii) favorece el desarrollo de competencias Matemáticas útiles para los estudios de nivel superior (universitarios):

> ¿Por qué?
> Si porque en distintos oficios o labores requiere a futuro los estudiantes el estudio ó desarrollo de triángulos y las relaciones entre angulos y distancias.

> ¿Por qué?
> Es una herramienta que facilita la solución de algunas situaciones de la cotidianidad, además son una base fundamental para estudios superiores. ó posteriores.

iii) corresponde a una actividad matemática que posibilita la tarea de “hacer Matemáticas” en otras palabras, aporta al avance de las mismas Matemáticas:



¿Por qué?
Eso puede generar actividad matemática
Es una excusa para el estudio del Álgebra
y Generar habilidades y competencias matemáticas

Luego del estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET, se puede observar una reducción de las afirmaciones dadas por los maestros en formación avanzada para este indicador, como se evidencia en el número de fragmentos codificados en la red semántica PosteriorHM (Figura *70*).

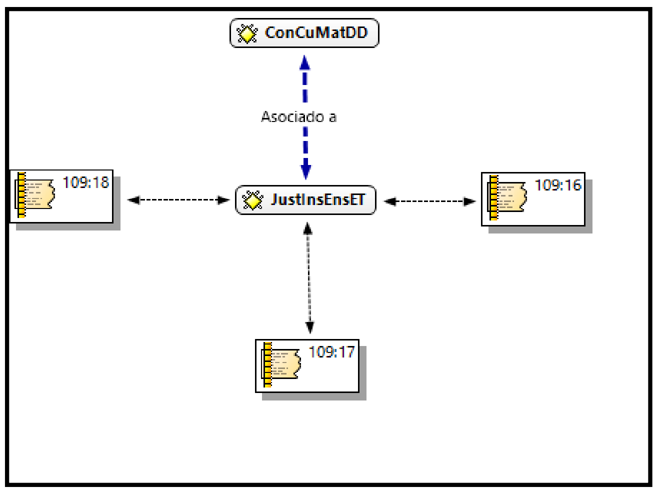


Figura 70. Red semántica PosteriorHM – JustInsEnsET

Fuente propia

En los tres fragmentos presentados, se reconoce la importancia que los maestros otorgan a la HM como escenario de búsqueda de justificaciones curriculares para enseñar ET. Entre las razones que dan los maestros se encuentran: i) la Historia de la Trigonometría y las ET muestra una secuencia que al ser usada por el maestro permite al estudiante observar una evolución de los objetos estudiados; en otros términos, se reafirma la idea de que las Matemáticas no son un producto terminado, sino que constituyen un proceso de continuo cambio; y ii) los métodos de solución de las ET reportados en la HM tienen inmerso el carácter de los pensamientos matemáticos que se definen en la organización del currículo escolar de Matemáticas de Colombia, con lo cual se puede justificar la pertinencia de las ET en grado décimo y el potencial que tiene abordar cada método en pro del desarrollo del pensamiento, como lo afirma un maestro en el siguiente fragmento:

> **Fragmento 109:17** (…) *en lo personal, dentro del currículo de Matemáticas se habla de que el procedimiento, el geométrico, va en todos los años porque es un ente paralelo que sostiene las Matemáticas. Yo lo veo involucrado en la parte de Ptolomeo, esto en el currículo permitiría mostrarle otra cara de la Trigonometría al alumno ¿sí?, sujetándome también de lo geométrico. Pero se ve desde la práctica que no se lleva así, por un lado, esta lo geométrico, por otro lo matemático y nunca se interrelacionan (…)*

Por último, para este indicador no se hace necesario realizar un registro estadístico comparativo, en tanto el número de fragmentos codificados pasa de seis a tres y no se cuenta con sub-códigos asociados.

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con la pertinencia de las ET en el currículo desde la perspectiva didáctica, se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 20. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConCuMatDD

<table>
<tr><th>Unidad →</th><th colspan="2">CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS [CoEstRepInst]</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sub-unidad→</td><td colspan="2">Conocimiento sobre el Currículo Matemático [ConCuMatDD]</td></tr>
<tr><td colspan="2">La Historia de la Trigonometría y las ET permite justificar la inclusión de las ET en el currículo de matemática pues: i) la historia reporta diversos escenarios y actividades culturales que pueden ser útiles para desarrollar las competencias Matemáticas de los estudiantes y ii) los elementos históricos de las ET se relacionan con la organización del currículo de Matemáticas (Pensamientos Matemáticos).</td></tr>
<tr><td>Indicador ↓</td><td>PREVIO HM</td><td>POSTERIOR HM</td></tr>
<tr><td>JustInsEnsET</td><td>La importancia de incluir las ET en el aula se debe a que: i) son útiles para la modelación de fenómenos de la cotidianidad, ii) favorece el desarrollo de competencias Matemáticas útiles para los estudios de nivel superior (universitarios) y iii) corresponde a una actividad</td><td>El estudio histórico de las ET:

i) le permite al maestro determinar una secuencia metodológica en la cual el estudiante aborde el estudio de este objeto desde su evolución y se convierta en un pretexto propicio para el desarrollo de sus</td></tr>
</table>

	matemática que posibilita la tarea de "hacer Matemáticas" en otras palabras, aporta al avance de las mismas Matemáticas.	habilidades Matemáticas. La razón aquí es de tipo histórico – cultural, pues estudiar por ejemplo las estrategias de solución a las ET usadas por los árabes permite abordar procesos como la aproximación, la precisión y la reiteración. ii) los métodos de solución de las ET reportados en la HM tienen inmerso el carácter de los pensamientos matemáticos (geométrico, métrico y numérico) que se definen en la organización del currículo escolar de Matemáticas de Colombia.
SecHCuTri	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo y posterior en relación a este indicador.	

5.3 UNIDAD: CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO [CoApzEConMat]

Esta unidad agrupa dos sub-unidades: ConProcCogEMat y ConEstInst, que se interesan por conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior, incluye el estudio de las creencias y concepciones inadecuadas o errores conceptuales y su influencia sobre el aprendizaje, los saberes previos e intereses de los estudiantes frente al contenido matemático, el conocimiento de técnicas para medir la comprensión de los estudiantes (evaluación), el conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en Matemáticas, entre otros aspectos.

5.3.1 SUB-UNIDAD: ConProcCogEMat

Esta sub-unidad se refiere al *Conocimiento del Proceso Cognitivo del Estudiante en Matemáticas* [ConProCogEMat]. Como se mencionó en la descripción de las unidades de análisis, hace alusión al conocimiento de las necesidades y saberes particulares de los estudiantes, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula. También se refiere al contenido matemático que aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; adicionalmente alude a conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las Matemáticas y con los diferentes tópicos específicos. Lo anterior, se agrupó en el indicador NcsApzETcaractCogE que se muestra en el siguiente esquema:

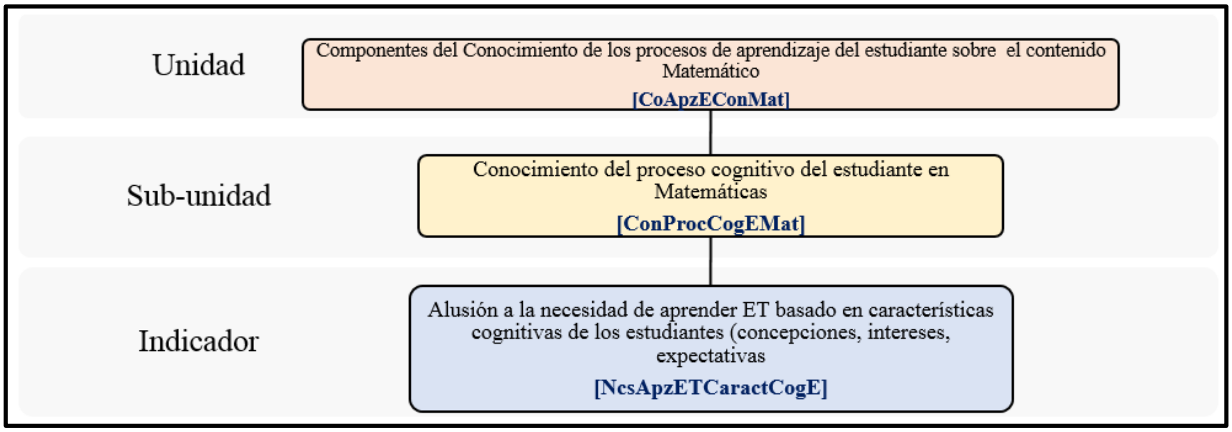


Figura 71. Esquema de indicadores de ConProcCogEMat

Fuente propia

5.3.1.1 Necesidad de aprender ET basadas en las características cognitivas de los estudiantes (NcsApzETcaractCogE)

No se cuenta con una red semántica previa para este indicador, aunque la pregunta seis (ver *Figura 68*) del cuestionario pretendía que los maestros en formación avanzada describieran argumentos del por qué aprender ET basados en las características cognitivas de los estudiantes (concepciones, intereses, expectativas). Sin embargo, las justificaciones que presentaron se relacionan con razones para enseñar ET desde la perspectiva curricular.

Por otra parte, en el momento posterior al estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET un solo maestro en formación avanzada hizo alusión a este indicador como se muestra en la siguiente red semántica y su respectivo análisis:

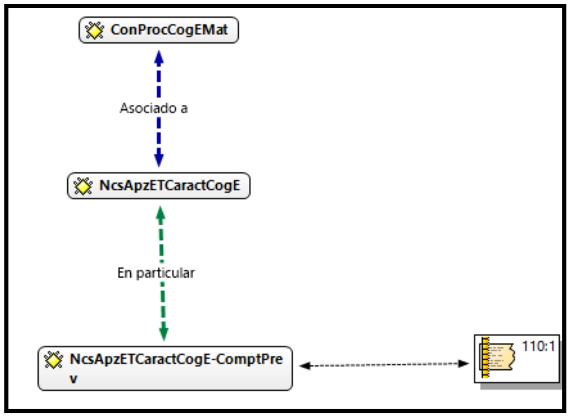


Figura 72. Red semántica PosteriorHM – NcsApzETCaractCogE

Fuente propia

El fragmento codificado fue:

> **Fragmento 110:1** *(…) todo eso* [en relación a los métodos que los maestros en formación avanzada expusieron en la intervención] ***pero no así***, *todos los preconceptos para que ellos entiendan realmente en la universidad porque es allá donde lo van a aplicar, en la carrera que vayan a estudiar.*

La frase subrayada del fragmento, permite evidenciar que para el maestro es importante abordar las ET en el aula, pero no de la forma en que se presentó en las exposiciones. Esto, en tanto que al reflexionar sobre las características cognitivas de los estudiantes se podrían presentan obstáculos y dificultades para entender el tema si se enseña tal cual como se estudió en la intervención. Lo anterior, sugiere de forma implícita la necesidad de una trasposición didáctica de los aspectos de las ET estudiados desde la HM.

El conocimiento de los maestros en formación avanzada en relación con los procesos cognitivos del estudiante en Matemáticas, en especial con las ET, se puede resumir en la siguiente matriz:

Tabla 21. Herramienta Analítica de la sub-unidad ConProCogEMat

Unidad →	**CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO [CoApzEConMat]**
Sub-unidad→	**Conocimiento del Proceso Cognitivo del Estudiante en Matemáticas [ConProCogEMat]**

	No se cuenta con mucha información para describir el conocimiento del maestro en formación avanzada sobre este sub-unidad, sin embargo, se rescata las reflexiones que realizó uno de ellos, en el momento posterior a la HM sobre la complejidad de la enseñanza de las ET pensando en la forma de abordarlas y las características cognitivas de los estudiantes.	
Indicador ↓	**PREVIO HM**	**POSTERIOR HM**
NcsApzETcaractCogE	No se cuenta con información para describir el conocimiento previo en relación a este indicador en tanto que es un elemento que surge luego del estudio histórico sobre la Trigonometría y las ET.	La historia de las ET, evidencia la complejidad de este objeto matemático, lo que conlleva al maestro a reflexionar sobre el cómo abordar este tema en clase teniendo en cuenta las características cognitivas de los estudiantes.

5.3.2 SUB-UNIDAD: ConEstInst

Esta sub-unidad se refiere al *Conocimiento de las Estrategias Curriculares* [ConEstInst] específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades, además de todas aquellas estrategias que permitan que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ya poseen. Lo anterior, se resume en un solo indicador como se muestra en el siguiente esquema:

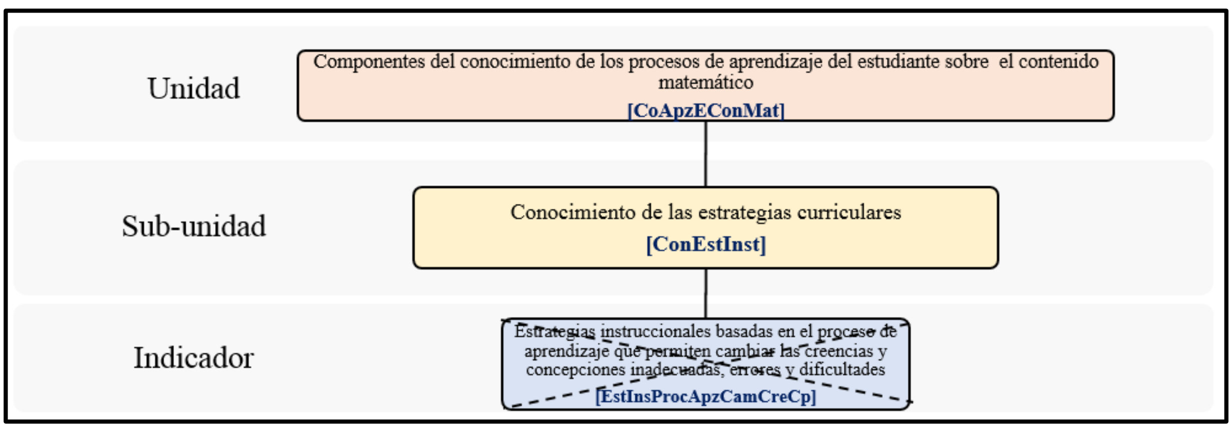


Figura 73. Esquema de indicadores de ConEstInst

Fuente propia

Al no contar en el cuestionario con una pregunta que permitiera recolectar información sobre este indicador y al no discutir en la sesión posterior al estudio de la Historia de Trigonometría y las ET sobre aspectos relacionados con este asunto, no se cuenta con fragmentos para el análisis de este indicador.

En síntesis, del análisis de los datos se puede concluir que:

Tabla 22. Síntesis del análisis de datos

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR
La historia de la Trigonometría y las ET aporto al conocimiento del maestro en formación avanzada en tanto le permitió reconocer otros campos y situaciones donde solucionar una ET tiene sentido, así como las actividades matemáticas que están asociadas a estas soluciones, lo cual es un indicio de los posibles aprendizajes previos que deben poseer los estudiantes al momento de abordar este tipo de ecuaciones. La historia sirvió de insumo para reflexionar sobre el papel de la ET en la cultura, la influencia de los interese culturales cómo modifica la noción y método de solución de las ET, los diferentes cambios de concepciones de la Trigonometría tomando como criterio el objetivo de los objetos trigonométricos y el papel de la rigurosidad y la precisión que lleva implícito la ET y permite pensar en razones del porqué es importante abordar la periodicidad, los procesos variacionales, el cálculo diferencial, las sucesiones y series y los logaritmos. El trabajo con la historia conllevo a que el maestro se cuestionará por la distinción entre las herramientas trigonométricas: razón, identidad, ecuación y función, sus características y posibles relaciones. Además, se identificaron algunos métodos de solución a ET distintos al tratamiento algebraico que usualmente se evidencia en los libros de texto y formación docente.
CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES DE LAS MATEMÁTICAS
La Historia de la Trigonometría y las ET permite justificar la inclusión de las ET en el currículo de matemática pues: i) la historia reporta diversos escenarios y actividades culturales que pueden ser útiles para desarrollar las competencias Matemáticas de los estudiantes y ii) los elementos históricos de las ET se relacionan con la organización del currículo de Matemáticas (Pensamientos Matemáticos). Reflexiona sobre la forma “trivial” de tratar este objeto en los libros de texto, pero que puede ser de un potencial formativo para los estudiantes. El trabajo le aporta elementos que según sus reflexiones le permitirán estructurar mejor sus prácticas de clase y aprovechar por ejemplo el trabajo con los métodos de solución a las ET.

CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO
El maestro luego del acercamiento con la historia de la Trigonometría y las ET, reflexiona sobre la complejidad que tiene la enseñanza de este objeto matemático y por ende el aprendizaje. Reflexiona sobre cuál es el proceso de aprendizaje de los estudiantes en relación a este objeto y cómo puede mejorarlo.

6. CONCLUSIONES

El interés principal de este trabajo era identificar los componentes del CDC a los que se aporta a partir del conocimiento histórico de las ET. Para ello, se realizó en un primer momento una revisión documental en tres focos: i) una búsqueda de antecedentes investigativos, ii) un acercamiento conceptual CPM, iii) un registro de elementos históricos sobre las ET, y iv) una descripción desde la perspectiva curricular y normativa sobre las ET. Ello, llevó a elaborar una serie de instrumentos (encuesta, intervenciones en aula y tareas) con los que, se realizó la recolección de información y posteriormente se constituyó el conjunto de datos que fueron codificados y analizados, lo que generó una serie de resultados de los cuales se obtuvieron las conclusiones de la investigación.

A continuación, se exponen las conclusiones referidas a los objetivos de la investigación, al aporte de la Historia de las ET al CDC y al proceso de investigación y metodología. Por último, se plantean algunas cuestiones abiertas que pueden servir como ideas para futuras investigaciones o como punto de partida para la reflexión en los espacios de formación sobre el quehacer de los profesores de Matemáticas.

6.1 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

Para cumplir con el objetivo general presentado en la sección 1.4 se plantearon cinco objetivos específicos, estos se evalúan a continuación:

- El CPM es una estructura compleja que abarca múltiples elementos, los cuales se pueden intentar caracterizar a través de modelos teóricos, como los que se presentaron en esta investigación (Shulman (1987), Ball (2008), Pinto (2010) y Schonfeld y Kilpatrick (2008)). Sin embargo, realizar la selección de un modelo que se corresponda con los propósitos de este estudio no fue una tarea sencilla. Así, el modelo de Pinto (2010) resultó el más acertado en tanto la descripción detallada mediante indicadores de cada una de las categorías y componentes del CDC permitió definir las unidades de análisis de forma específica. En otras palabras, el modelo contó con una naturaleza descriptiva a tal detalle que fue posible establecer una conexión entre los elementos Históricos de la Trigonometría y las ET y cada uno de los indicadores.

- Aunque se contó con una población relacionada con el objeto matemático de este estudio (ET), bien sea porque han utilizado ET para hacer ciertos procedimientos matemáticos, porque han estudiado el concepto en su formación inicial o porque han tenido que enseñarlo como profesores de grado décimo, disponer de la información acerca de lo que conocen fue una tarea que requirió esfuerzos en tanto: i) aunque son maestros en formación avanzada, dar a conocer sus saberes les implicó reconocer su desconocimiento y ii) expresar aquello que conocen de una manera organizada y cohesionada les costó dificultad.

- Recolectar información mediante los instrumentos propuestos, permitió una clasificación de lo que conocen y no conocen los maestros en formación avanzada sobre las ET; Aun cuando se reconocen las dificultades para expresar o comunicar los conocimientos, los maestros mostraron disponibilidad y apertura para este estudio, pues para ellos constituyó un reto académico.

- La revisión de fuentes secundarias o terciarias en algunos casos conllevó a ubicar un hilo conductor hacia fuentes primarias en relación con la Historia de la Trigonometría y las ET. En estas se identifican hechos que posteriormente permiten establecer hitos históricos que trazaron el desarrollo de esta investigación: i) la Trigonometría al servicio de los intereses griegos en la astronomía y la navegación: las ET en la construcción de tablas de cuerdas, ii) la Trigonometría árabe e hindú como recurso para mejorar la exactitud de tablas trigonométricas: Métodos iterativos y analíticos para solucionar ET iii) Las ET como herramienta para solucionar ecuaciones algebraicas: los aportes de Jayyam y Viète y iv) las ET como objeto matemático de enseñanza: las ET en textos académicos.

- Los hitos seleccionados de la Historia de las Matemáticas en relación con el tema, al ser contrastados con los saberes de los maestros en formación avanzada, permitieron determinar cuáles son los aportes al CDC que el estudio de la HM hace al CPM; es decir, el estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET aportó elementos que contribuyen al Conocimiento del maestro en formación avanzada en relación con: i)métodos de solución de las ET (Geométricos y de perspectiva analítica), contextos de la Trigonometría (Matemáticos, Astronomía y Navegación), actividades (elaboración de tablas trigonométricas mediciones de ángulos y longitudes, construcciones geométricas), cambios en la concepción de la Trigonometría (Herramienta cultural para el cálculo de longitudes, Ciencia independiente, Ciencia analítica, Herramienta para otras ciencias) y los procesos de rigurosidad y aproximación que se desarrollaron en históricamente en la Trigonometría y reflexiones sobre su práctica profesional, entre otros, los cuales se pueden agrupar en la categoría Conocimiento Matemático a enseñar.

6.2 CONCLUSIONES PROPIAS DEL ESTUDIO REALIZADO

En particular el estudio de la Historia de las Matemáticas, sobre las ET aportó, amplió algunos elementos del conocimiento de los maestros en relación con las tres unidades del CDC, *Conocimiento del contenido matemático a enseñar, Conocimiento de las Estrategias y representaciones Instruccionales de las Matemáticas y Conocimiento de los Procesos de Aprendizaje del Estudiante sobre el contenido matemático,* tal como se describe a continuación:

Conocimiento del contenido matemático a enseñar:

- En relación con los contextos donde se desarrolla la Trigonometría, se identificó que a la luz de la Historia de las Matemáticas se contribuyó en: i) mayores apropiaciones de los contextos matemáticos, astronómicos y de navegación; sin embargo, las afirmaciones iniciales de los maestros contemplaron otros contextos ii) alimentar y complementar el discurso en relación a los contextos.

- En torno a la Trigonometría y las ET, la Historia de las Matemáticas permite evidenciar actividades en las cuales se dieron desarrollos que aportan al avance del tema específico y; esto es, se reconoce que una actividad fundamental para el progreso de la Trigonometría fue las construcciones de tablas trigonométricas que se dieron por personajes en momentos distintos en culturas diferentes. Esto generó ampliaciones y reflexiones sobre las caracterizaciones que poseían los maestros sobre ET.

- La HM y su revisión en relación al tema de esta investigación permitió que los maestros en formación avanzada identificaran cambios de concepción en la Trigonometría (Herramienta cultural para el cálculo de longitudes, Ciencia independiente, Ciencia analítica, Herramienta para otras ciencias), lo cual es producto de lo planteado en la primera intervención.

- El rigor es un asunto reconocido por los Maestros en formación avanzada como un potenciador de los desarrollos dados en las Matemáticas. Particularmente, en la Trigonometría, este es un elemento que se reconoció a partir de las reflexiones generadas al momento de estudiar la Historia de la Trigonometría y las ET.

- El estudio de la historia de las Matemáticas enriqueció el conocimiento de los profesores con mayor énfasis en la categoría del conocimiento del tópico específico. En términos particulares de las ET, aportó a prototipos, atributos, métodos de solución, representaciones y relaciones de las ET con otros conceptos.

- En particular, en relación con las representaciones de las ET, los maestros afirman que el estudio de la HM enriquece este tipo aspectos para cualquier objeto matemático, pero no se puntualiza en el tema matemático propio de esta investigación.

- Los métodos de solución de las ET con métodos Geométricos y métodos perspectiva analítica son una ampliación al conocimiento del Profesor de Matemáticas, luego de realizar el estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET.

- Una vez terminadas las intervenciones y la revisión histórica de este trabajo, no se encontró o generó un consenso en relación a una definición de ET. Sin embargo, la HM aportó elementos como características y prototipos que pueden ayudar al maestro en formación avanzada a construir una idea más estructurada de las ET.

Conocimiento de las Estrategias y representaciones Instruccionales de las Matemáticas

- Las afirmaciones que permitían a los profesores definir ET eran aquellas que aparecían en los libros de texto usados en sus prácticas laborales los diferentes estadios de los prototipos de ET que se presentaron en el estudio de la Historia les permitió reflexionar y analizar de forma crítica estas afirmaciones, por ejemplo, la pertinencia de las secuencias de enseñanza, las estrategias de solución y los ejemplos de ET presentados en estos.

- Los maestros en formación avanzada reconocen que el objeto ET ha sufrido transformaciones en sus características a través de la Historia, por ejemplo, *sin* (30º) = *x* actualmente reconocido como un valor, en otra época o periodo histórico correspondió a una ET.

Conocimiento de los Procesos de Aprendizaje del Estudiante sobre el contenido matemático

- El estudio realizado sobre la Historia de la Trigonometría y las ET, generó reflexiones en los maestros en formación avanzada en relación con la complejidad del objeto matemático (ET), la importancia y finalidad de su abordaje en los cursos de bachillerato lo que conlleva al maestro a reflexionar sobre el cómo abordar este tema teniendo en cuenta las características cognitivas de sus estudiantes.

6.3 CONCLUSIONES DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

- Debido a las actividades académicas, laborales y personales de los Maestros en formación avanzada no se contempló, dentro de la metodología, la realización de entrevistas individuales. Sin embargo, los instrumentos y técnicas utilizados, permitieron una ampliación de la información desde una mirada integrada, nutriendo los datos de esta investigación.

- Estructurar las intervenciones y plantear los instrumentos para la recolección de información, no implicó el reconocimiento de todos los escenarios y elementos deseados, pues al disponer de una guía rudimentaria para el diseñó del cuestionario, la cual se preparó con base en los primeros hallazgos históricos, y de las intervenciones, algunos indicadores no se pudieron evidenciar. Este es el caso NcsApzETCaractCogE, referido al conocimiento de las características cognitivas de los estudiantes, aun cuando este se reconoce como un elemento fundamental del CDC que se pone en juego en las prácticas profesionales.

- La aplicación de un cuestionario final habría permitido identificar algunas relaciones emergentes en el CDC de los maestros en formación avanzada y los aportes de la HM sobre ET, ya que algunos de los maestros no realizaron aportes de manera oral en las intervenciones de las sesiones que se desarrollaron, posibilitó la recolección de otro tipo de información. Sin embargo, la creación de un cuestionario de cierre no fue factible por tres razones: i) dificultades para construir preguntas que condensaran toda la información que se quería recolectar, a las luz de los elementos estudiados y los indicadores planteados en las unidades de análisis, ii) la disponibilidad de tiempo para implementar este otro instrumento en el seminario y iii) la recolección de información procuro rastrear progresivamente las afirmaciones de los maestros, lo cual se facilitó al realizar un ejercicio en el cual primó la oralidad.

- Estudiar HM puede llevar a aprender Matemáticas. Sin embargo, desde la posición personal de los autores de este documento, esto es un proceso cíclico en tanto el estudio de la HM no se puede dar sin un conocimiento de las Matemáticas.

- El estudio de la Historia de la Trigonometría y las ET contribuyó a que los autores de esta investigación generaran reflexión en torno a: i) su formación académica inicial y las matemáticas escolares propias de su desempeño profesional ii) sobre diferentes objetos matemáticos y la forma en que son abordados en la escuela, entre ellos: ecuación, función, variable, incógnita, razón y proporción, y iii) las intenciones de la inclusión de ciertos objetos matemáticas en los documentos curriculares y normativos que atañen a la educación escolar colombiana.

- El reconocimiento de diferentes fuentes de consulta (textos escolares, documentos históricos, artículos, investigaciones publicadas, libros diseñados para cursos universitarios, documentos curriculares, entre otros) permitió contrastar las diferentes aproximaciones del concepto de ET que están disponibles para el maestro y sus prácticas.

- Las evidencias sobre el cómo se conciben y tratan las ET en la escuela, revelan que en las matemáticas escolares aún se desconoce el verdadero potencial formativo de algunos objetos que se tratan *porque sí*. El carácter especial de trascendente hace que la solución de estas ecuaciones pueda asociarse a herramientas diferentes a las empleadas en la solución de ecuaciones algebraicas; sin embargo, la insistencia en tratarlas como polinomios y solucionarlas por métodos algebraicos en los que se tiene en cuenta el dominio y el periodo de las funciones trigonométricas involucradas en estas expresiones, las transforma en un tema más del currículo escolar colombiano connotado como "ecuación".

- Estudiar HM nos llevó a aprender sobre Trigonometría y Ecuaciones Trigonométricas, pues tanto para los maestros en formación avanzada como para los investigadores, el conocimiento matemático, curricular y didáctico del tema es escaso. Como se evidencia en el análisis de los datos de investigación, lo cual, pone de manifiesto que: *“(…) el conocimiento de los futuros profesores en las diferentes áreas de la matemática escolar es débil y por debajo de lo que normalmente se espera”.* (Dabiri, 2003, p. V)

- Los resultados encontrados ponen de nuevo una alerta sobre la poca atención investigativa que se le ha dado al tema de la educación en Trigonometría y las ET en el campo de la EM. La no conciencia del profesor de matemáticas sobre las potenciales de la HM en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares; y la necesidad de que en los programas de formación de profesores de matemáticas se incluyan cursos de estudio matemático y didáctico del tema y relacionados con este, por ejemplo, cursos de HM y su aporte al aula, métodos numéricos, entre otros; lo cual, sustenta la idea de Dabiri (2003) cuando menciona que: *"Therefore, understanding preservice secondary mathematics teachers' understanding of trigonometry would enable colleges of education and mathematics departments to better educate the future cadre of secondary school mathematics teachers to be effective teachers of mathematics."* (p. 14).

- En el desarrollo de la investigación, el estudio de los documentos históricos y la construcción del cuestionario, nos retó a intentar construir una definición de ET, sin llegar a un consenso, por la complejidad de la naturaleza de los elementos implicados en este tipo ecuaciones. Además, todo esto conllevó a cuestionarnos por otros objetos matemáticos escolares como la idea de ecuación, función, variable, incógnita, entre otros, que están presentes en esta definición y que se "algebrizan" en el discurso de los libros de texto y en muchos casos del propio profesor de matemáticas cuando enseña ET.

- La revisión de los antecedentes relacionados con el currículo escolar de matemáticas, denotan una "extraña" presencia de las ET y hasta de la misma Trigonometría en la escuela, pues es una tierra de nadie, pues *"Too often trigonometry is taught in school as a collection of definitions and identities which are disjointed, are unmotivated except by some simple-minded applications, and are all supposed to be equally important"* (Wu, 2012, p. 26).

- El abordaje que se da a las ecuaciones trigonométricas en libros de texto escolar revisados se caracteriza en general por: asociar las ET a ecuaciones polinómicas donde la incógnita es una función o una razón trigonométrica; para solucionar una ET es necesario conocer el dominio y la periodicidad de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación; relacionar identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas en ocasiones las primeras como caso particular de las segundas o como herramienta para solucionar ecuaciones trigonométricas complejas; no se discrimina la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones trigonométricas. Es decir, no se sabe si el conjunto solución es un subconjunto de números reales, un conjunto determinado de medidas angulares en grados o radianes, etc.

- Los procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas son similares a los utilizados en la solución de ecuaciones algebraicas, donde se asume que la solución de una ET es una tarea invariante en la cual se ha de encontrar un valor faltante que puede ser un ángulo, un número real o un conjunto de valores que satisfacen la ecuación. No obstante, se evidencia una ruta metodológica que en algunos casos omite pasos o los desarrolla con poco grado de profundidad: i) presentación de una situación problema inicial, ii) solución de la situación y análisis de los resultados, iii) definición de una ET y algunas características; iv) ejemplos de resolución de una ET; v) ejercicios, vi) ET con una incógnita: lineal, cuadrática y racional con una función y trigonométrica y ecuaciones con más de una función trigonométrica: características de la ecuación y métodos de solución, condiciones del conjunto solución, ejemplos de resolución, ejercicios y problemas de aplicación.

6.4 CUESTIONES ABIERTAS

- Como se evidenció en la investigación, es valioso el aporte de la Historia de la Trigonometría al conocimiento del profesor de matemáticas. Además, hay nexos de esta con el Cálculo, el Álgebra y la Geometría. En especial, sería interesante analizar por qué *"(…) the use of trigonometry in calculus sheds light on trigonometry itself."* (Wu, 2012, p. 26). Por ejemplo, se reconoce que el aporte se evidencia también en la ampliación de las visiones sobre el horizonte matemático del contenido que pueda poseer el profesor, esto a su vez se involucra en la articulación de las organizaciones de sus prácticas profesionales.

- Aunque se reconoce la relación de las ET con fenómenos periódicos aún no se explota este componente en el ámbito escolar. Tal vez se esté dejando de lado potencialidades implícitas del concepto de la periodicidad, que permiten enriquecer las prácticas de aula. Por ejemplo, los métodos numéricos o geométricos, podrían ser una razón de peso para incluir en el currículo el trabajo con ciertas ET.

- Objetos matemáticos de la Trigonometría, como las ET, acompañados de adjetivos como “simples” o “sencillas” prevalecen en el currículo escolar de matemáticas, sin fundamento alguno y la revisión preliminar normativa no brinda luces de su presencia en los programas de grado décimo. Por lo tanto, un estudio curricular más detallado que fundamente la pertinencia de los objetos trigonométricos permitiría al profesor de matemáticas reflexionar con más argumentos la enseñanza de estos temas escolares.

7. BIBLIOGRAFÍA

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1°. *Scripta Math*, 20, 24 - 29. Recuperado de http://www.jphogendijk.nl/arabsci/Kashi-Aaboe.pdf

Aguilar, A., et al. (2013). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas: MTSK. VII CIBEM, (págs. 5063-5068). Montevideo, Uruguay.

Araya, A., Monge, A., & Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Actualidades Investigativas en Educación, 7(2).* Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/447/44770207.pdf

Araya, G., & Parraguez, M. (septiembre 2014). Construcciones y mecanismos mentales asociados a las ecuaciones trigonométricas del tipo ab=0. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION), 39*, 57-79. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/39/archivo8.pdf

Arévalo, S., et al. (2008). *Glifos 10 Procesos matemáticos*. Bogotá, Colombia: Libros & libros SA.

Ausejo, E. (1983). Sobre los conocimientos trigonométricos en los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio. *Llull, 6*, pp. 5-36. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62009.pdf

Ball, D., & Bass, H. (2009). *With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures*. Michigan.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-22

Barrios, M., et al. (2012). *Proyecto sé. Matemáticas 10. Redes de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: SM SA.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento Didáctico del Contenido y Didácticas específicas. *Revista de Currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-32. Recuperado de https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART6.pdf

Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad.

Buendía, G y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 1287-1296. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buitrago, L., Romero, J., Ortíz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., y otros. (2013). *Los caminos del saber. Matemáticas 10.* Bogotá: Santillana SA.

Cardeñoso, J. M., Flores, P., & Azcárate, C. (2001). *El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación.* En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.

Carrillo, J., Escudero, D., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de cuerdas. *PNA*, 53-77.

CBMS. (2001). *The Mathematical Education of Teachers: American Mathematical Society* - Mathematical Association of America

Chauvenet, William. (2013). *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry.* London: Forgotten Books. (Original work published 1855)

Cisneros, J., & Hiduara, V. (2013). Conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas. Santo Domingo, República Dominicana: I CEMACYC.

Contreras, L., Liñan, M., & Montes, M. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de. Investigación en Educación Matemática XIX, (págs. 335-341).

D'Ambrosio, U. (2009). *Chapter 3.1 Some Reflections on Education, Mathematics, and Mathematics Education.* En R. Even, & D. Ball (Edits.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. The 15th ICMI Study (págs. 239 - 244). New York: Springer Science+Business Media.

Dabiri, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teacher´s knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy* (Tesis de Doctorado). University of Iowa, Estados Unidos

Espinosa, M. (2014). *La solución de la ecuación de tercer grado según Omar al -khayyām. Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas* (Tesis de Pregrado). Instituto De Educación Y Pedagogía, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia

Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.* The 15th ICMI Study Springer

Fauvel, J., & Van Maanen, j. (2002). *History in Mathematics Education The ICMI study.* New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Garcia, L. (2009). Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas. (Tesis de Doctorado). Universidad Autónoma de Barcelona: España. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2009/tdx-0324110-115352/lago1de1.pdf

Godino, J. (2009). Presente y futuro de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. (E. Matemática, Ed.) Recuperado el 27 de enero de 2014, de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/presente.pdf

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION), 20*, 13-31. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Gómez, A. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano de Matemática en los niveles básico y medio de educación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION), 38*, 155-176. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/38/archivo15.pdf

Gómez, A. (2014). *Matemática Moderna en el Bachillerato Colombiano*. VII CIBEM, (págs. 4014-4018). Montevideo, Uruguay.

Guacaneme, A. & Mora, L. (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. Papeles. *Revista de la Facultad de Educación de la Universidad Antonio Nariño*, *4*(7), 102-109. Recuperado de http://revistas.uan.edu.co/index.php/papeles/article/download/211/181.

Guacaneme, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Ponencia presentada en la Décimo tercera Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (XIII CIAEM-IACME), Recife, Brasil. Recuperado de www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2029/submission/review/2029-5172-1-RV.pdf

Guacaneme, E., & Gómez, H. (2013). Aproximación a la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” en el último quinquenio (documento no publicado). Recuperado de http://www.academia.edu/5503772/Aproximaci%C3%B3n_a_la_relaci%C3%B3n_Historia_de_las_Matem%C3%A1ticas_-_Educaci%C3%B3n_Matem%C3%A1tica_en_el_%C3%BAltimo_quinquenio

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt*, *2*(2). Recuperado de http://www.pedagogica.edu.co/admin/UserFiles/11(1).pdf

Gutierrez, A., Gómez, P., & Rico, L. (2016). Conocimiento Matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XXI, 19*(1), 135-158. Recuperado de http://revistas.uned.es/index.php/educacionXX1/article/view/15581/13550

Jankvist, U. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 67-101.

Martin, O. (2003). *Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón* (Tesis de Pregrado). Universidad de Sonora, México.

Massa, M. (2001). Las relaciones entre el Álgebra y la Geometría en el siglo XVII. Llull, 24, 705-725. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/460376.pdf

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* (pp. 46–95). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional

MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook* (2 ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Mochón, S., & Morales, M. (2010). En que consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y como fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática, 22*(1) 87-113. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n1/v22n1a5.pdf

Montes, M., Liñan, M., Muñoz, M., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 36-59.

Montiel, G. & Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico del profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Mora, E (2001). Las matemáticas del islam. Disponible en http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf.

Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y Matemático.* Madrid, España: Nivola Libros Ediciones

Moreno, V. & Restrepo, M. (2003). *Alfa 10 con estándares.* Bogotá, Colombia: Norma SA

Moyer, R., & Ayres, F. (1991). *Trigonometría, Serie Schaum* (2 ed.). México: McGraw-Hill.

National Council of Teacher of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (M. Fernández, Trad.). Sevilla: SAEM Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Ñancupil, J., Reginaldo, C., & Flores, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNION), 34,* 37 - 46. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/34/archivo6.pdf

Paradís, J., & Malet, A. (1984). *Els orígens i l'ellsenyament de I'algebra simbólica* (*1478-1545)* (Vol. 1). España: Publicacions edicions universitat de Barcelona.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación* (Tesis de Doctorado). Universidad de Salamanca: España.

Paul, N. (1998). *An imaginary tale. The story of the square root of minus one.* United States of America: British Library Cataloging

Rodriguez, A., Picado, M., Espinosa, J., Rojas, N. y Flores, P. (2013). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. UNICIENCIA, 30(1), 1-16. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/7580/7956

Rojas, N. (2010). Conocimiento para la enseñanza y calidad Matemática de la instrucción del concepto de Fracción: Estudio de caso de un profesor chileno (Tesis de Maestría). Universidad de Granada: España. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Nielka_Rojas.pdf

Ruiz, A. (2002). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Editorial EUNED, San José: Costa Rica.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. (El saber y entender de la profesión docente. Estudios Públicos, 99, 95-224.).

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform Harvard Educational Review, 57(1), 1-22. (Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9*(2), 1-30)

Smestad, B. (2008). *Teachers' Conceptions of History of Mathematicas.* Oslo University.

Smith, D. (1925). *History of Mathematics: Volume II, Special topics of elementary mathematics.* Boston, MA: Ginn and Company.

Sosa, L., Flores, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra den bachillerato. Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 173-189. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/293271/381771.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (5ª ed.). Bogotá, Colombia: Thompson.

Swokowski, E. & Cole, J. (2002). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (10ª ed.). Bogotá, Colombia: Thompson.

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: Enseñanza de la proporcionalidad.* Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Usón, C., & Ramírez, Á. (junio de 2002). Un gran matemático. (U. Zaragoza, Ed.) *SUMA* (40), 129 - 132. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/40/129-132.pdf

Vásquez, C. (2015). Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 255-256.

Viète, F. (1970). *Opera mathematica* (Jan Van Schooten, ed.). Olms: Nueva York.

Wu, H. (2002). What is So Difficult About the Preparation of Mathematics Teachers? Recuperado de http://www.math.berkeley.edu/~wu/.

Anexo 1. **Fuentes documentales referidas a la relación HM - EM y asuntos reportados en estas**

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
Aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemáticas" en el último quinquenio Guacaneme y Gómez (2013)	EVENTOS RECIENTES	HPM 2008: integración de la HM en EM, Culturas y Matemáticas, Matemáticas de las Américas.			X	X			
		ESU-6: marcos teóricos o conceptuales para integrar la HM en la educación.				X			
		ESU[34]: Historia y Epistemología implementadas en la EM: experimentos de clase y materiales de enseñanza, considerados desde puntos de vista cognitivos o afectivos: estudios de currículos y libros de texto; fuentes primarias en el aula de clase y sus efectos educativos; Historia y Epistemología como herramientas para una aproximación interdisciplinaria en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias	X						
		ICME 2012: Conversatorios sobre la HM en la escuela.	X						
		ICME 2012: la Historia, aplicaciones y Filosofía de las Matemáticas en Educación Matemática T. Jankvist.				X			
		ICME 2012: El Rol de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática.				X			
		HPM 2012: marcos teóricos o conceptuales sobre la integración de la Historia en la EM.				X			
		HPM 2012: Historia y epistemología implementadas en la educación en Matemáticas: experimentos de clase y materiales de enseñanza; fuentes primarias en el aula de							

[34] Los *EuropeanSummerUniversityonthe History and Epistemology in Mathematics Education*, Encuentros académicos que se realizan desde el año 1993 cada tres años, organizados por HPM exceptuando primero que fue organizado por IREM de Francia.

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
		clase y sus efectos educativos; Matemáticas y sus relaciones con la ciencia, la tecnología y el arte: temas históricos e implicaciones educacionales; Culturas y Matemáticas.	X	X		X			
	LIBROS	*Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (Katz & Tzanakis, 2011). Publicación dedicada principalmente a la relación HM-EM y sobre HM para EM, presenta documentos de investigación en: uso de la HM en la enseñanza de las Matemáticas en varios niveles educativos, perspectivas teóricas actuales en el uso de la HM. Así como HM para profesores; y las relaciones entre HM y el conocimiento del profesor de Matemáticas.	X			X			X
		Mathematical Time Capsules. Historical modules for the mathematical classroom (Jardine & Gellasch, 2011). Presenta artículos de distintos autores sobre el uso de la HM en cursos de Matemáticas presentados en el Joint Mathematics Meeting organizado por los editores en el 2006, módulos para aplicar a la enseñanza en secundaria y pregrado.	X						
		Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education (Sriraman, 2012). Presenta la HM como recurso para fomentar la comprensión de las Matemáticas. Da a conocer siete artículos sobre Historia y Didáctica de las Matemáticas que proporcionan recursos históricos para ser usados en la enseñanza del							

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
		Cálculo. En la segunda sección se encuentran cuatro documentos para el trabajo con la historia de la Geometría y la Teoría de números. [i)]. En la tercera sección, cuatro documentos que buscan discutir y justificar el papel de la HM en la EM.				X			
	ARTÍCULOS DE REVISTAS	*For the learning of mathematics.* (Fried, 2009) habla sobre el significado de la igualdad y la semejanza en las Matemáticas griegas, y se discuten algunas implicaciones en la de la HM en la EM, reseñando que la HM no se debe usar simplemente como una estrategia para atraer la atención de los estudiantes sino, más bien debería llevar a los estudiantes a tomar posiciones con respecto al pasado. Otro documento presentado en tal edición (U. T. Jankvist, 2009) presenta la introducción de la HM en la EM en dos sentidos, como un objetivo y como una herramienta.	X			X			
		Mathematics teacher. (2008,2009 & 2010) presentan algunos documentos sobre la evolución histórica de algunos temas matemáticos. Además, en la edición 2010 se presentan algunas reflexiones históricas en la enseñanza de la Trigonometría.	X	X					
		EducationalStudies in Mathematics. Presenta en su mayoría asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje mediados por el uso de la HM como herramienta y en el volumen 81(1) se muestra cómo el estudio de la HM contribuye al conocimiento	X						X

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
		matemático de un profesor de Matemáticas (Clark, 2012).							
		The Montana Mathematics Enthusiast (TMME): (2008) edición que presenta cómo algunos autores han planeado problemas y soluciones a la inclusión de la HM en las clases de Matemáticas y cómo la perspectiva semiótica de Saussurean puede aportar a la problemática.	X						
		Sigma. (2008) muestra algunas razones para introducir la HM en la educación básica secundaria; desde el uso de la HM como herramienta y concepciones filosóficas y ontológicas acerca del conocimiento matemático.	X			X			
		International Journal of Science and Mathematics Education. Estudio (Liu, 2009) la introducción de la HM en un curso de cálculo de ayuda a cambiar las concepciones epistemológicas de los estudiantes acerca de las Matemáticas.	X						
HPM:*(OT)-TSG 25*	Experimentos de enseñanza.		X						
	Marco teórico o conceptual para integrar la Historia en la EM.					X			
	HM y Epistemología implementada en la EM.					X			
	Surveys en Investigación sobre la HM en EM y La HM que aparece en el currículo o libros de texto.		X						
	Culturas y las Matemáticas que entretejen.				X				
	Material para la enseñanza: libros de texto, material de recursos de cualquier tipo (escrito documentos, guías, lectores, encuestas bibliográficas anotadas, material audiovisual, páginas web sitios web relevantes, etc.)		X						

<table>
<tr><th>INSTRUMENTOS</th><th colspan="2">ASUNTOS REPORTADOS</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th><th>VII</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Fuentes originales en el aula y sus efectos educativos.</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Historia y epistemología como una herramienta para un enfoque interdisciplinario en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">History in Mathematics Education: The ICMI Study, edited byJ. Fauvel & J. vanMaanen (Kluwer 2000).</td><td rowspan="3">CAPÍTULO 1
The political context</td><td>Sección 1.2 experiencias de 16 países de todo el mundo en relación con las directrices políticas que rigen la inclusión de la historia de las Matemáticas en el currículo, con hincapié en el panorama de los libros de texto escritos para presentar el currículo como área critica.</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sección 1.3 Estudio de caso de la dimensión histórica en libros de texto en Polonia, propone la integración de la Historia en la EM como un punto clave, presenta el caso de las escuelas normales y otros programas en los que se ha hecho esta integración.</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Sección 1.4 Presenta una declaración política en torno a introducir una mayor dimensión histórica en el currículo con objetivo de informar a los responsables políticos sobre la incorporación de la H en la EM.</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>CAPÍTULO 2</td><td>Es una mirada filosófica, multicultural e interdisciplinaria de los asuntos de la EM</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Instrumentos	**Asuntos Reportados**		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**
	Philosophical, multicultural and interdisciplinaryissues	y la HM, mencionan elementos como el arte, la musca desde la etnomatemática, hacen una conexión con la cultura y las Matemáticas involucrando aspecto de la religión y la filosofía			X	X			
	Capítulo 3 *Integrating history: research perspectives*	Plantea que la integración de la HM en la enseñanza es un asunto que se juzga a través de la investigación cualitativa. Se presentan algunos asuntos en relación a experimentos de enseñanza en los que la Historia se ha usado de forma implícita o explícita, de manera local o global. Presenta en las secciones 3.3 y 3.4 reflexiones de profesores en relación a sus prácticas y las Matemáticas gracias a la incorporación de la HM en la enseñanza, así como los riesgos de su implementación.	X						X
	Capítulo 4 *History of Mathematics for Trainee Teachers*	Presenta las intenciones de la inclusión de una dimensión histórica en la formación de profesores de Matemáticas, siendo esta una preocupación del último siglo, en las que si incluyen una distinción entre el profesor de Matemáticas y el matemático este último no necesita de un componente histórico mientras que al							X

INSTRUMENTOS	**ASUNTOS REPORTADOS**		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**
		primero la HM se convierte en un núcleo esencial de su formación.							
	CAPÍTULO 5 *Historical formation and student understanding of mathematics*	Reporta asuntos en la relación del desarrollo o evolución de las Matemáticas y el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes, la HM como una fuente para el desarrollo de actividades de clase que suponga en el profesor un equipamiento de asuntos diversos que le permitan estos desarrollos.	X						
	CAPÍTULO 6 *History in support of diverse educational requirements Opportunities for change*	Presenta algunos ensayos sobre la incorporación de la HM en experimentos de clase, experimentos que reportan no por políticas estatales sino más bien reportadas desde los intereses particulares y contextos específicos de algunas poblaciones.	X						
	CAPÍTULO 7 *Integrating history of mathematics in the classroom: ananalytic survey*	Presenta algunas posibilidades para la incorporación de la HM en la EM, presentando razones del porqué de esta incorporación. Con algunas opciones de cómo hacer dicha integración.	X						
	CAPÍTULO 8	En este capítulo se ejemplifican algunos de los asuntos referidos en el capítulo anterior de como la Historia puede							

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
	Historical support for particular subjects	soportar asuntos de distintas disciplinas, mediante experimentos de clase.	X						
	CAPÍTULO 9 *The use of original sources in the mathematics classroom*	Presenta las implicaciones de luso de las fuentes originales en la enseñanza, así como los requerimientos y las exigencias de esta decisión. Se describen algunas experiencias relativas a la utilización de dichas fuentes tanto en secundaria como en la formación de profesor.	X						X
	CAPÍTULO 10 *Non-standard media and other resources*	Este apartado habla precisamente de aquellos recursos adicionales que se pueden integrar en la clase de Matemáticas, presentando una experiencia de uso de medios de comunicación no convencionales en relación con la HM.	X	X					
	CAPÍTULO 11 *Bibliography for further work in the area*	Proporciona en forma sintética trabajos publicados en ocho idiomas sobre el tema del estudio, a saber, las discusiones sobre las relaciones entre la historia de las Matemáticas y de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, sobre las muchas maneras diferentes de incorporación la historia, razones para hacerlo, y los diferentes beneficios para las Matemáticas, el currículo y el							

INSTRUMENTOS	ASUNTOS REPORTADOS		I	II	III	IV	V	VI	VII
		aprendizaje como también experiencias en todo el mundo.							

Anexo 2. Breve reseña de los modelos del conocimiento del profesor

UN MODELO GENERAL: CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO PARA LA ENSEÑANZA O EL CONOCIMIENTO BASE PARA LA ENSEÑANZA (PCK)

Sin lugar a dudas, este modelo tiene gran influencia en el campo de la investigación sobre el conocimiento del profesor, más precisamente sobre la Formación de Profesores y el conocimiento base, desde finales de la década de los 70 e inicios de la década de los 80, incorporando las nuevas perspectivas a raíz de un enfoque cualitativo que procuró estudiar la organización del pensamiento del Profesor.

Para definir el conocimiento del profesor, se debe ir más allá de un conocimiento que requiere habilidades básicas, conocimiento del contenido y habilidades didácticas generales. Como afirma Shulman no se puede evaluar a un profesor y su conocimiento mediante tres pruebas aisladas, la primera que mida el componente de aptitudes básicas, la segunda un test de conocimientos sobre la disciplina y la tercera las observaciones en el aula para verificar ciertos comportamientos deseables, ya que los elementos analizados son de una complejidad superior.

Shulman, et al. (1987) organizan el conocimiento base del profesor a partir de estos componentes: i) *Conocimiento del contenido*, ii)*Conocimiento didáctico (pedagógico) general*, aquello que se refiere a principios y estrategias de manejo y organización en la clase independientes de la materia o contenido, iii) *Conocimiento del currículo* el cual se requiere del dominio de los materiales y los programas que son herramientas del docente, iv) *Conocimiento didáctico(pedagógico) del contenido;* este componente hace un puente entre el objeto de conocimiento y la pedagogía siendo de constitución exclusiva de los docentes y sus comprensiones profesionales, v) *Conocimiento de los alumnos y de sus características* que incluye también el conocimiento de los contextos micro y macro, que moderan e inciden en los funcionamientos de la clase; se incluyen los contextos de gestión y financiamiento de los distritos escolares hasta las comunidades y las culturas, vi) *Conocimiento de los objetivos*, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos y finalmente vii) El conocimiento de los contextos educativos, que van desde trabajos en grupo o aula, la gestión y la financiación de los distritos escolares al carácter de las comunidades y culturas.

Es un compendio complejo de conocimientos que deben ser de dominio del profesor para enriquecer sus prácticas mientras que se enriquecen en la práctica. Por tanto, se reconoce la importancia de este referente en el campo investigativo, como un primer paradigma que planteó nuevas visiones sobre la formación de profesores. Con lo anterior se da paso a la búsqueda de modelos concretos en relación a los PM como lo es la propuesta de Ball y otros colaboradores.

LOS DOMINIOS DEL MKT DE BALL

La imagen presentada a continuación corresponde al modelo de conocimiento que proponen Deborah Ball y otros colaboradores Ball, (2000); Ball, et al. (2001) para el CPM, denominado como el *conocimiento matemático para la enseñanza*. Este diseño toma como referente asuntos de los componentes del modelo de Shulman, pero realiza algunas ampliaciones que son exclusivas del conocimiento del PM.

La propuesta es presentada en un diagrama elíptico como se muestra a continuación. El de la *Figura 74*, corresponde a la versión del modelo original, desarrollado por el equipo de investigadores de Deborah Ball en la Universidad de Michigan, mientras que la *Figura 75* corresponde a la traducción al español tomada de Godino (2009):

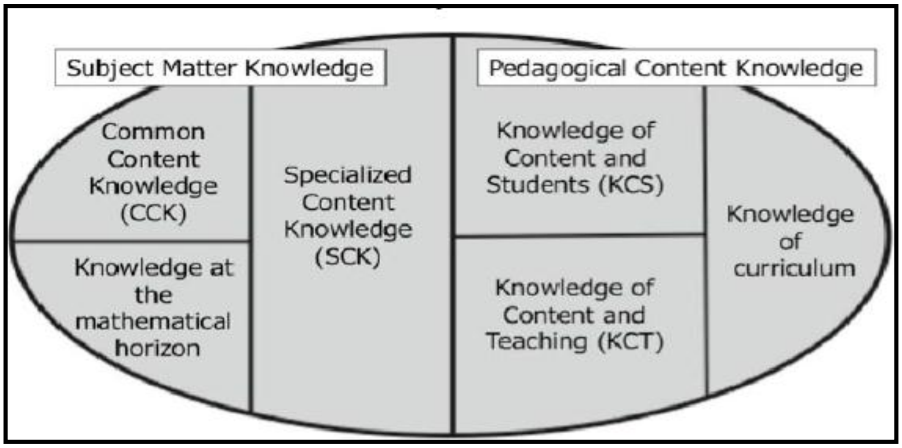


Figura 74. Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

Fuente: Ball, et al. (2009)

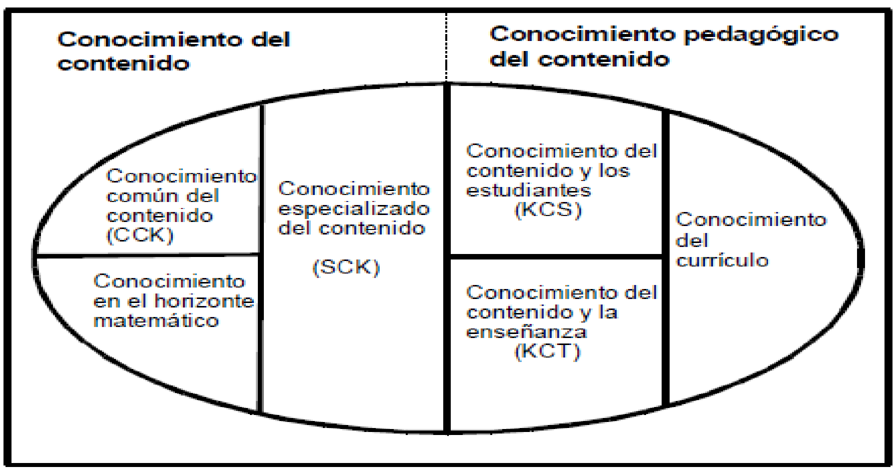


Figura 75. Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

Fuente: Godino (2009, p. 16)

En este esquema se pretende clarificar cuáles son los componentes del CPM que se denomina como el *conocimiento matemático para la enseñanza*, el cual, se define en Hill, Ball, et al. (2008) como "*el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno*."

A partir del diagrama se puede ver la diferenciación entre dos grandes componentes o grupos de conocimientos: el primero, el conocimiento del contenido y el segundo, el conocimiento pedagógico del contenido, este último con la misma denominación del primer conocimiento base planteado por Shulman. En relación con el primer grupo se reconocen tres sub clasificaciones de conocimientos (*CCK, SCK y el Horizonte del contenido Matemático*).

Esta clasificación plantea que el conocimiento del contenido que pone en juego el PM en sus prácticas de enseñanza debe responder a tres (3) asuntos: i) los conocimientos que puede poner en juego cualquier persona que tenga un conocimiento mínimo en Matemáticas para resolver problemas de esta área, sin la necesidad de ser PM; este conocimiento también lo poseen por ejemplo los Matemáticos, es decir un conocimiento común del contenido; ii) los conocimientos del dominio exclusivo del PM sobre las Matemática para la enseñanza, que atiende a competencias y habilidades que son propias de su práctica y sobre contenidos especializados y iii) los conocimientos avanzados sobre los contenidos que le permiten ver panorámicas sobre las dificultades, conflictos, conexiones entre otras, que generan determinados contenidos con otros, un conocimiento que aporta una visión ampliada hacia un horizonte con fines pre definidos sobre las Matemáticas puesto en juego en la práctica.

Para el conocimiento pedagógico del contenido se propone una subdivisión en tres elementos que son: (*KCS, KCT y conocimiento del currículo)*, estas subdivisiones recogen los demás conocimientos base que plantea Shulman, para lo cual los autores definen elementos relacionados con el conocimiento de los estudiantes, del currículo y de la enseñanza.

Este modelo comprende elementos muy importantes en relación con el CPM que se quiere caracterizar en esta investigación, aunque la definición que presentan los autores hace énfasis en el uso de este conocimiento en las prácticas de enseñanza o de instrucción, con la intención de formar un conocimiento en el estudiante. Estas cuestiones son contempladas como uno de los asuntos del CPM que se quiere reportar en este trabajo; sin embargo, hay otros puntos que se pretenden caracterizar, puesto que también es necesario un modelo que ahonde en otros componentes que no son directamente relacionados a la práctica de enseñanza, tal vez un modelo que exprese esos otros elementos en mayor detalle, que se ajuste y sea pertinente con los objetivos de esta investigación y que se pretenden consolidar en la misma.

Para ambos modelos, el PCK y el MKT se han presentado en diversos artículos, ejemplos de situaciones donde se refieren a cada componente; no obstante, aún es complejo llegar a una comprensión de su esencia y como afinar su análisis.

PROFICIENCIA

Adicional a estos modelos, se revisó el modelo de *"proficiencia"* propuesto por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), en el cual se plantea la determinación de las habilidades, competencias, conocimientos y destrezas que necesitan desarrollarse en la profesionalización docente. Por mencionar algunas de ellas: fluencia procedimental, competencias estrategias, comprensión conceptual, etc. En esta propuesta se plantean siete (7) dimensiones para lograr una proficiencia en términos de las competencias del PM. Sin embargo, Schoenfeld y Kilpatrick enfatizan en que esta es una propuesta inicial en torno a la cual deben darse nuevos planteamientos que permitan refinamientos y otras elaboraciones. Las siete dimensiones son: i) *Conocer las Matemáticas escolares con profundidad y amplitud*, ii) *Conocer a los estudiantes como personas que piensan,* iii) *Conocer a los estudiantes como personas que aprenden,* iv) *Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje*, v) *Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión"*, vi) *Construir relaciones que apoyen el aprendizaje* y vii) *Reflexionar sobre la propia práctica*.

Anexo 3. Revisión preliminar del abordaje de las ET en fuentes de consulta

El profesor de matemáticas en su quehacer diario de planeación y ejecución de clase, siempre requiere de fuentes de consulta que le permitan validar, ampliar, gestionar, indagar, recordar, etc., diversos aspectos relacionados con un determinado tema matemático. Entre las muchas fuentes de consulta existentes, las más usuales y disponibles como primer recurso de consulta –tal vez el único que utiliza– del profesor de matemáticas, corresponden a libros de texto escolar, libros especializados de carácter universitario y páginas Web. En cualquier caso, el profesor de matemáticas recurre a lo que conoce del objeto, procedimiento o teoría matemática a estudiar para ampliar, validar o cuestionar lo que estas fuentes dicen.

Un ejemplo de ello, se da cuando el profesor de matemáticas utiliza el libro guía de grado décimo para averiguar cómo solucionar una ecuación trigonométrica y posteriormente enseñarlo. Se generan así, diferentes situaciones referidas al conocimiento del profesor de matemáticas, entre ellas que aprenda los métodos de solución mostrados en el libro ya que no conoce alguno; reconozca la trasposición hecha a los métodos de solución y valide estos caminos de solución; interprete lo planteado en el texto e incorpore lo que sabe para enriquecer la propuesta; esté en desacuerdo con lo planteado y vaya a otras fuentes; identifique elementos en la solución de ecuaciones trigonométricas que no había considerado antes y los aprenda; entre otros. En otras palabras, el profesor de matemáticas acude al libro de texto escolar o portador de saberes legalizados para ser enseñados y aprendidos, como un recurso de aprendizaje (Contreras & Villella, 2006).

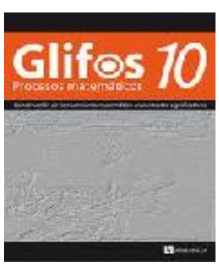
Lo anterior, pone en evidencia la necesidad de hacer una revisión exhaustiva a estas fuentes primarias de consulta con las que cuenta el profesor de matemáticas puesto que la información allí encontrada influye directamente en sus conocimientos. En particular, en este documento, se hace una breve revisión de las definiciones de Ecuación Trigonométrica tomadas de diferentes fuentes primarias de consulta vigentes, con el propósito de brindar un panorama sobre el tratamiento que se da a este objeto matemático y como primera evidencia del asunto problema a investigar.

En cada uno de los casos, se presenta una tabla que consigna la definición o el abordaje que se da a la ecuación trigonométrica y los aspectos de tipo metodológico y matemático que destacan cada una de las fuentes consultadas. Luego, se hace un análisis general de lo encontrado.

LIBROS DE TEXTO ESCOLAR

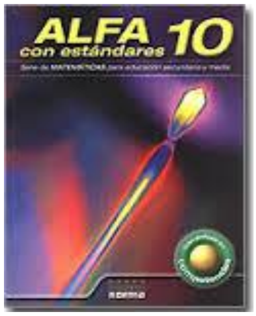
En la siguiente tabla se muestran tres columnas, en la primera de ellas se encuentran cuatro libros de texto escolar de grado décimo de las editoriales SM, Santillana, Libros & Libros y Norma; utilizados como recurso en la práctica docente o de circulación en el aula, la segunda corresponde a las definiciones encontradas sobre el concepto de Ecuación Trigonométrica y la última columna se refiere a los aspectos que se destacan en dicha definición.

TEXTO ESCOLAR	TRATAMIENTO ENCONTRADO	ASPECTO QUE DESTACA
Serie Código de Matemáticas 10 (Alcaide et al, 2010) 	Una ecuación trigonométrica es aquella en la que la incógnita aparece como argumento en una o varias razones trigonométricas. Debido a las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos de diferentes cuadrantes y de los que resultan al añadirles vueltas completas a la circunferencia, estas ecuaciones cuentan habitualmente con infinitas soluciones.	– La incógnita en este tipo de ecuaciones está asociada a una razón trigonométrica, al parecer no es independiente. – La solución de una ecuación trigonométrica corresponde a un conjunto infinito de valores asociado a la razón trigonométrica que involucra la ecuación.

	En las ecuaciones más sencillas aparece únicamente una razón trigonométrica igualada a un número. Para resolver ecuaciones trigonométricas más complejas no hay establecidos métodos de resolución fijos.	– En el libro se asocia la solución de una ecuación trigonométrica al fenómeno de la periodicidad. – Se hace una distinción entre ecuaciones trigonométricas simples y complejas. – El libro resalta la posibilidad de que existen métodos de resolución de ecuaciones trigonométricas diferentes a los algebraicos.
Glifos 10. Procesos Matemáticos (Arévalo et al, 2008) 	Una ecuación trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas y que se satisface para algunos valores de la variable (o para ninguna). Los valores que satisfacen la ecuación se llaman soluciones de la ecuación. Como casos particulares de las ecuaciones trigonométricas están las identidades trigonométricas, cuyas	– En el texto se describe una ecuación trigonométrica en términos de una expresión trigonométrica. – Según la definición existen ecuaciones trigonométricas que no tienen solución. – No se hace distinción de la naturaleza de las soluciones de la

	soluciones corresponden a todo el dominio de definición.	ecuación, se habla de valores, pero no se sabe si son números reales o valores de ángulos en grados o radianes. – Los autores asumen que las identidades trigonométricas son un caso especial de ecuaciones trigonométricas que al parecer se cumple para todo el dominio de la expresión trigonométrica involucrada en la ecuación.
Los caminos del Saber Matemáticas 10 (Buitrago et al, 2013)  	Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la cual intervienen funciones trigonométricas de un ángulo *x* y se satisface solo para algunos valores de *x*. Las soluciones de una ecuación trigonométrica son los valores del ángulo para los cuales se cumple la igualdad. Resolver una ecuación trigonométrica es determinar todos	– Los autores asocian las ecuaciones trigonométricas a funciones trigonométricas. – El conjunto solución de la ecuación trigonométrica es un subconjunto del dominio de las funciones trigonométricas involucradas.

	los posibles valores de la variable para los cuales se cumple la igualdad. Algunos aspectos que se deben tener en cuenta al resolver una ecuación trigonométrica: – Los procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas son similares a los utilizados en la solución de ecuaciones algebraicas. – Las ecuaciones trigonométricas tienen infinitas soluciones, debido a que las funciones trigonométricas son periódicas y su solución se puede expresar en grados o radianes. – Las soluciones básicas de una ecuación trigonométrica se hallan en el periodo T de la función respectiva.	– La naturaleza de las soluciones de las ecuaciones trigonométricas son medidas de regiones angulares. – El conjunto solución de una ecuación trigonométrica está relacionado con la periodicidad de las funciones trigonométricas. – Los métodos de solución de ecuaciones trigonométricas se restringen a métodos algebraicos. – Esta definición diferencia entre soluciones básicas asociadas al periodo de las funciones trigonométricas y a otro tipo de soluciones.
Nuevo Alfa 10 (Moreno & Restrepo, 2002)	En una ecuación trigonométrica el trabajo consiste en encontrar los valores del ángulo que hacen verdadera la igualdad.	– La naturaleza de las soluciones de una ecuación trigonométrica son medidas de regiones

	**Ecuaciones simples** Llamaremos una ecuación simple a una expresión de la forma f(x)= c, donde f(x) es una función trigonométrica y c es una constante.	angulares que hacen verdadera la igualdad. – La defunción presentada tiene conexión con la prueba lógica. – Se hace una distinción al hablar de ecuaciones trigonométricas simples.

El abordaje que se da a las ecuaciones trigonométricas en estos libros de texto escolar se caracteriza en general por:

- Asociar las ecuaciones trigonométricas a ecuaciones polinómicas donde la incógnita es una función o una razón trigonométrica.
- Para solucionar una ecuación trigonométrica es necesario conocer el dominio y la periodicidad de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación.
- Relacionar identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas en ocasiones las primeras como caso particular de las segundas o como herramienta para solucionar ecuaciones trigonométricas complejas.
- No se discrimina la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones trigonométricas. Es decir, no se sabe si el conjunto solución es un subconjunto de números reales, un conjunto determinado de medidas angulares en grados o radianes, etc.
- Los procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas son similares a los utilizados en la solución de ecuaciones algebraicas.
- Asumir que la solución de una ecuación trigonométrica es una tarea invariante de encontrar un valor faltante que puede ser un ángulo, un número real o un conjunto de valores que satisfacen la ecuación.

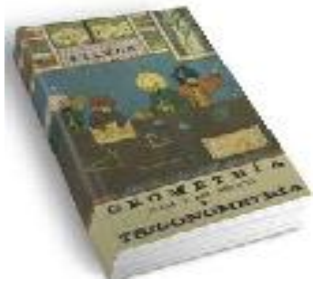
No obstante, se evidencia una ruta metodológica que en algunos casos omite pasos o los desarrolla con poco grado de profundidad:

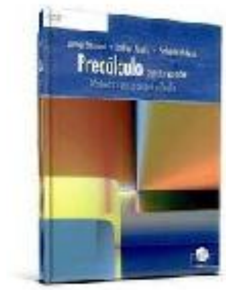
8. Presentación de una situación problema inicial.
9. Solución de la situación y análisis de los resultados.
10. Definición de ecuación trigonométrica y algunas características.
11. Ejemplos de resolución de una ecuación trigonométrica.
12. Ejercicios de resolución de ecuaciones trigonométricas.
13. Ecuaciones trigonométricas con una variable: Lineal, cuadrática y racional con una función y trigonométrica; y ecuaciones con más de una función trigonométrica:
    e) Características de la ecuación y métodos de solución
    f) Condiciones del conjunto solución
    g) Ejemplos de resolución
    h) Ejercicios y problemas de aplicación

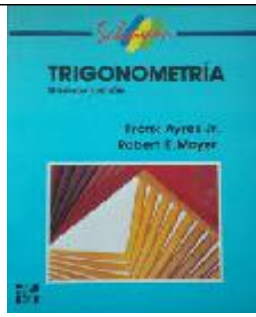
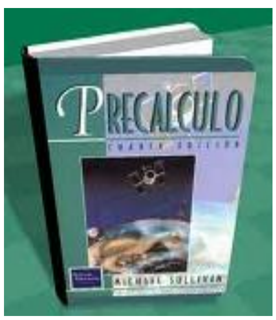
LIBROS ESPECIALIZADOS

En la siguiente tabla se presentan tres columnas la primera hace referencia a cuatro libros de matemáticas especializados en las prácticas formativas de los docentes o de circulación académica universitaria, en la segunda columna las definiciones encontradas sobre el concepto de Ecuación Trigonométrica y los aspectos que se destacan en dicha definición:

TEXTO ACADEMICO	DEFINICIÓN ENCONTRDA	ASPECTO QUE DESTACA
Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría (Baldor, J.A, XX impresión, 2004)	Son aquellas en las cuales la incógnita aparece como un ángulo de funciones trigonométricas.	– Las ecuaciones trigonométricas son “transformadas” por medio de

	No existe un método general para resolver una ecuación trigonométrica generalmente se transforma toda la ecuación de manera que quede expresada en una sola función trigonométrica y entonces se resuelve como una ecuación algebraica cualquiera. La única diferencia es que la incógnita es *una función trigonométrica* en vez de *x*, *y* o *z*.	identidades trigonométricas con esto se busca asociarla a una expresión algebraica con una sola incógnita. – El autor deja de lado cualquier potencialidad que aporte la función trigonométrica a la ecuación, las trata haciendo una transformación explicita a ecuaciones algebraicas. – No se deja en claro alguna sub-categoría dentro de las posibles asociaciones dentro de las ecuaciones algebraicas.
Precálculo de Stewart 5ta Edición (Stewart, J, 2007)	Una ecuación que contienen funciones trigonométricas se denomina ecuación trigonométrica. Por ejemplo, las	En esta definición existen dos particularidades:

	expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas: $sen^2x + cos^2x = 1$ $2senx - 1 = 0$ $tan^2 2x - 1 = 0$. La primera ecuación es una identidad, es decir es cierta para todo valor de la variable x . Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x. Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que la ecuación sea cierta. Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.	1. La mayor diferencia con otro tipo de ecuaciones es la existencia de funciones trigonométricas. En lugar de asociar a la ecuación letras como *x*, *y*, etc. 2. Existe una conexión entre identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas lo cual es utilizado por el autor para crear una idea de soluciones infinitas.
Trigonometry Fourth Edition 6 fully solved Problems. Robert E. Moyer, Ph.D. Frank Ayers, Jr., Ph. D.	Trigonometric equations, ie., equations involving trigonometry functions of unknown angles, are called: Identical equations, or identities, if they are satisfied by all values of the unknown angles for which the functions are defined.	Al igual que otros autores se asocia la idea de ecuación trigonométrica a igualdades que contienen funciones trigonométricas, sin embargo el concepto es definido por una categorización lo cual

	Conditional equations, or simply equations, if they are satisfied only by particular values of the unknown angles.	da la idea de soluciones finitas o infinitas. En la categorización no se asocia potencialidades de las funciones trigonométricas al tipo de solución.
Precálculo. Cuarta Edición (Sullivan, m, Pearson educación 1997) 	Las secciones anteriores de este capítulo trataron acerca de identidades trigonométricas, -esto es, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen para todo valor en el dominio de la variable. En esta sección analizaremos ecuaciones trigonométricas- esto es, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen sólo para algunos valores de la variable (o, tal vez, no se satisfacen para ningún valor de la variable). Los valores que satisfacen la ecuación son llamados soluciones de la sección.	A diferencia de los anteriores textos el autor realiza una distinción entre ecuaciones que involucran funciones trigonométricas (identidades) y ecuaciones trigonométricas identificando estas segundas como ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. El autor admite un conjunto de soluciones infinitas o un conjunto vacío.

El tratamiento utilizado por los autores del texto para la solución de ecuaciones trigonométricas está sujeto a reglas algebraicas las cuales aplica a diferentes situaciones:

entre las sugerencias explicitas en el texto para hallar solución a una ecuación trigonométrica están:

CASO 1:

- Aislar la función trigonométrica en un lado de la igualdad, cabe notar que las ecuaciones a las cuales se remiten los textos en primer lugar solo implican una función trigonométrica.

- Hallar la solución a ó b a la ecuación en el intervalo de $[0, 2\pi]$ para el caso en el de seno y coseno y de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en el caso de tangente. Con lo anterior el resultado general de la ecuación se expresa $a + np$ ó $b + np$ donde p corresponde al periodo de la función trigonométrica involucrada.

CASO 2: Si el texto se remite a ecuaciones que involucran dos funciones trigonométricas para hallar su solución se sugiere dividir a ambos lados de la ecuación por alguna de las funciones trigonométricas, luego de esto se espera que la solución de la ecuación se remita al caso 1.

CASO 3: En las situaciones en las cuales el caso 2 no remita al caso 1, el autor sugiere hacer uso de las identidades trigonométricas y reglas de factorización. Para este tercer caso se idéntica una asociación clara entre el algoritmo de solución de una ecuación trigonométrica y una ecuación cuadrática.

En conclusión aunque en los anteriores textos los autores utilizan como parte de la definición de ecuaciones trigonométricas identidades trigonométricas. Esta condición solo se usa como un paso previo al uso de reglas algebraicas que llevan al conjunto solución de la ecuación. Es decir se propone como algoritmo de solución: transformación de la ecuación mediante el uso de identidades trigonométricas y el uso de reglas algebraicas entre las que se encuentran: aislar la función trigonométrica en un lado del igual, dividir a ambos lados de la ecuación por alguna de las funciones trigonométricas o hacer uso de la factorización.

En los textos anteriores la periodicidad de las funciones trigonométricas es la única propiedad utilizada de forma recurrente para dar solución a una ecuación trigonométrica. No obstante esta se utiliza como un “agregado” al conjunto solución y no como una herramienta de análisis en las respuestas.

SITIOS WEB

En la siguiente tabla se presentan tres columnas la primera hace referencia a cinco sitios Web de consulta, seleccionados al criterio de los autores de este trabajo de investigación como confiables, que reportan definiciones acerca las Ecuaciones Trigonométricas, en la segunda columna las definiciones encontradas y la tercera columna presenta los aspectos que destaca en dicha definición:

SITIO WEB	DEFINICIÓN ENCONTRDA	ASPECTO QUE DESTACA
Universidad Nacional de Colombia http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/fundamentacion/uv00009/lecciones_html/cap5/trigo12.html	Cuando se propone una igualdad de expresiones trigonométricas que no es una identidad, el objetivo es determinar valores que la hacen verdadera, para ello se requiere resolver una ecuación. La ecuación puede no tener solución y si existe no necesariamente es única, puede haber infinitas soluciones en un intervalo, por esto es muy importante tener en cuenta el intervalo en donde se va a resolver la ecuación.	– La ecuación como igualdad de expresiones trigonométricas que no sean identidades – Restringe el intervalo para hallar la solución – El método de solución es algebraico – No se identifica cual es la incógnita o de que tipo es

Sector Matemática http://www.sectormatematica.cl/proyectos/ecuaciones.htm	La ecuación trigonométrica es una igualdad que se cumple para ciertos valores del argumento. Resolver una de estas ecuaciones, significa encontrar el valor del ángulo que satisface dicha ecuación (a veces es más de un valor).	– La ecuación como igualdad, pero no aclara entre que elementos – Habla de argumento, y de encontrar el valor – No muestra método de solución
Descartes http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/razones_trigonometricas_bcnt/ecua2.htm	Son aquellas en las que aparece alguna razón trigonométrica de la incógnita. Para resolverlas es conveniente: 1º Expresar todas las razones que aparezcan en función de un mismo ángulo. 2º Expresar todas las razones en función de una sola razón trigonométrica. Estos dos pasos se consiguen utilizando las fórmulas trigonométricas estudiadas anteriormente.	– Aquella donde aparecen razones trigonométricas de la incógnita – El método propone dejar la ecuación en términos de un solo ángulo y de una sola razón, usando “formulas trigonométricas” es decir identidades trigonométricas – No expresa una forma de encontrar dicha solución.

	Las ecuaciones trigonométricas suelen tener múltiples soluciones que pueden expresarse en grados o en radianes. Aunque también es cierto que hay ecuaciones trigonométricas que no tienen solución.	
Vitutor http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_4.html	En las ecuaciones trigonométricas intervienen funciones trigonométricas, que son periódicas y por tanto sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y además se repiten en todas las vueltas. Para resolver una ecuación trigonométrica haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, para ello utilizaremos las identidades trigonométricas fundamentales.	– Donde intervienen funciones trigonométricas – Reconoce periodicidad en las funciones y en las soluciones – Método de solución hacer uso de las identidades trigonométricas
Universidad de Antioquia – Colombia http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moo	Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida solo para determinados valores desconocidos de los ángulos	– Se resalta la ecuación como igualdad entre expresiones formadas por funciones trigonométricas – Se cumplen solo para algunos valores.

dle/mod/resource/view.php?id=87555		

Las definiciones encontradas en sitios WEB presentan menos rigor a la hora de ser presentadas, en relación a los otros dos tipos de documentos consultados, todas ellas se corresponden a definiciones simplificadas del término Ecuación Trigonométrica.

En cuanto a lo que se puede deducir de los métodos de solución se encuentra una gran influencia de los métodos algebraicos para solucionar dichas ecuaciones, ninguna de ellas hace alusión a métodos diferentes. Con respecto a esto algunas aclaran que primero debe hacerse tratamiento con identidades trigonométricas para luego proceder de manera algebraica. Esta afirmación se ve evidente por ejemplo en las definiciones III y IV. Sólo la definición I enfatiza en el hecho de que las ecuaciones trigonométricas son distintas a las identidades trigonométricas.

En general, se evidencia que las diferentes fuentes primarias de consulta con las que cuenta el profesor de matemáticas, trabajan las ecuaciones trigonométricas como ecuaciones algebraicas, dejando de lado su carácter trascendente y con ello todas sus posibles potencialidades en el desarrollo del análisis matemático (p. e., series de funciones, métodos numéricos, etc.) a nivel escolar.

Lo anterior, significa que se hace uso de procedimientos algebraicos para determinar los valores que satisfacen este tipo de igualdades. Razón por la que se discrimina en muchos casos la naturaleza del conjunto solución, es decir, no se conoce si la solución es un subconjunto de números reales, un conjunto de medidas de regiones angulares expresadas en grados o radianes u otro tipo de conjunto numérico. Además, se advierte siempre que para dar solución a una ecuación trigonométrica es necesario tener en cuenta el dominio y la longitud del intervalo del periodo de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación. Esto último, conlleva a que no se ahonde por ejemplo en el estudio de los fenómenos periódicos y los procesos de cálculo infinitos.

En conclusión, las fuentes primarias de consulta, no constituyen del todo un referente optimo que aporte al desarrollo formal de los conocimientos del profesor de matemáticas sobre las ecuaciones trigonométricas; en tanto limita el estudio de este tipo de ecuaciones al campo algebraico y deja de lado caminos analíticos, gráficos, numéricos, entre otros; que podrían contribuir a su conocimiento profesional.

CONOCIMIENTOS DE UN GRUPO DE DOCENTES SOBRE LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La siguiente tabla muestra un breve análisis clasificatorio de la información recopilada a través de un cuestionario de pregunta abierta[35] aplicado a un grupo de tres profesores de matemáticas (autores de este trabajo de investigación) que laboran en instituciones educativas de carácter privado, orientando la asignatura de Trigonometría de Grado Décimo durante los dos últimos años. En particular, han abordado el tema de ecuaciones trigonométricas atendiendo a la normativa establecida por los estándares nacionales para el área de matemáticas y la malla curricular de cada institución.

El propósito del cuestionario era reconocer los conocimientos del grupo de profesores de matemáticas de media vocacional sobre el significado de una ecuación trigonométrica y los métodos y/o estrategias de solución.

En este orden de ideas, los resultados del cuestionario se presentan en una tabla clasificatoria, la cual, se divide en cuatro secciones verticales, la primera de ellas hace alusión a la definición presentada por cada docente. La segunda sección recopila la información referida a los aspectos históricos que reporta el docente. La sección tipos de solución registra los métodos que el docente reconoce ayudan a encontrar la solución de una ecuación trigonométrica. La última sección se refiere a los diferentes contextos en los cuales el docente reconoce se aplica el concepto de ecuación trigonométrica.

DEFINICIÓN	**ASPECTO HISTÓRICO**	**MÉTODOS Y ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN**	**APLICACIONES**

[35] Según Baptista, Fernández y Hernández (1991) corresponde a uno de los instrumentos de recolección de datos más utilizados en investigación y consiste en *"(…) un conjunto de preguntas [abiertas o cerradas] respecto a una o más variables a medir."* (p. 321).

<table>
<tr>
<td>Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre expresiones formadas por funciones trigonométricas, donde la incógnita es el ángulo para el cual se satisface dicha igualdad, la solución no es única sino que es un conjunto de valores de ángulos.</td>
<td>NO PRESENTA</td>
<td>Para solucionar este tipo de ecuaciones, se realizan sustituciones de variable y manejos de identidades trigonométricas, para luego realizar manejos algebraicos de tal manera que se pueda despejar la incógnita de la ecuación como se realizaría en una ecuación netamente algebraica</td>
<td>NO PRESENTA</td>
</tr>
<tr>
<td>Igualdad entre expresiones que involucran funciones trigonométricas.</td>
<td>NO PRESENTA</td>
<td>
<table>
<tr><th>TIPO DE ECUACIÓN</th><th>SOLUCIÓN ALGEBRAICA</th><th>SOLUCIÓN GRAFICA</th></tr>
<tr><td>$a = sinx$
$b = cosx$
$c = tanx$</td><td>Se despeja la función trigonométrica y luego se halla el valor del ángulo de la función utilizando $sin^{-1}a$ ó $cos^{-1}b$ ó $tan^{-1}c$</td><td>Graficar la función trigonométrica involucrada y hallar los valores solución en el</td></tr>
</table>
</td>
<td>Aplicaciones en la física el caso de las ondas, conocimiento superficial.</td>
</tr>
</table>

				según corresponda, el resultado se debe analizar en un intervalo correspondiente al periodo de la función involucrada.	intervalo conveniente.	Situaciones a las cuales se les asocia ecuaciones trigonométricas “lineales” o “cuadráticas”.
			$g(x) = h(x)$ Donde $g(x)\ y\ h(x)$ son funciones trigonométricas.	Hacer uso de identidades trigonométricas para hacer una conversión.	Se grafican las dos funciones en un mismo plano y se hallan los puntos de intersección que corresponden a la solución de la ecuación.	
			Ecuaciones trigonométricas asociadas a ecuaciones cuadráticas.	Si es necesario se utilizan identidades trigonométricas y luego se asocia la ecuación trigonométrica a una ecuación cuadrática, se	Hallar la gráfica de la ecuación cuadrática asociada.	

				da solución con el procedimiento conocido para estas dos últimas ecuaciones.		
Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre dos expresiones que involucran funciones trigonométricas como variables.	NO PRESENTA	Solucionar una ecuación trigonométrica es encontrar los valores – números reales – para los cuales la ecuación se convierte en igualdad numérica, para ello se debe tener en cuenta el periodo de las funciones trigonométricas involucradas en la ecuación. Cabe notar, que si el conjunto solución de la ecuación trigonométrica corresponde a todo el dominio de la función trigonométrica involucrada en la ecuación, se dice que la ecuación trigonométrica es una identidad. Para poder solucionar una ecuación trigonométrica acudimos a procedimientos algebraicos, es decir, toda ecuación trigonométrica esta expresada como una ecuación polinómica y lo que hay que hacer es despejar las funciones. Cuando la ecuación trigonométrica involucra más de una función trigonométrica se debe utilizar las identidades conocidas para				Las ecuaciones trigonométricas se utilizan en física para expresar el movimiento parabólico de un objeto, el movimiento armónico simple, profundidad aparente, intensidad de luz, entre otras.

		transformar la ecuación y reescribirla en términos de una sola función trigonométrica, en caso contrario se debe utilizar el método de tanteo para encontrar la solución.	

En general, se logra identificar que:

- Las ecuaciones trigonométricas se conciben como igualdades que involucran funciones trigonométricas, pero no existe una definición estándar para este objeto matemático.
- No hay una distinción clara de la naturaleza de las soluciones.
- No se evidencia una conexión entre las propiedades de las funciones trigonométricas y las ecuaciones trigonométricas.
- Hay ausencia de aspectos históricos sobre las ecuaciones trigonométricas.
- Los métodos de solución de ecuaciones se reducen a procedimientos de tipo algebraicos propios de las ecuaciones polinomiales.
- Las identidades trigonométricas son una herramienta que permite solucionar ecuaciones trigonométricas que involucran más de función trigonométrica.
- Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas la solución de este tipo de ecuaciones corresponde a un conjunto de valores que satisfacen la igualdad, sin distinguir el cardinal de este conjunto.
- En las definiciones se alude al uso de métodos geométricos, gráficos y tanteo para solucionar ecuaciones trigonométricas.
- Se identifica que las principales aplicaciones de las ecuaciones trigonométricas están relacionadas al campo de la física.

Anexo 4. **Programa del curso Historia y Epistemología de las Matemáticas**

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Maestría en Docencia de la Matemática
2015-II

IDENTIFICACIÓN DEL ESPACIO ACADÉMICO

Nombre: Historia y Epistemología de las Matemáticas	Código: 402945
Número de créditos: 3	Tipo de créditos: Electivos
Horas presenciales: 3	Horas de trabajo independiente: 9
Nombre del profesor: Edgar Alberto Guacaneme Suárez	
Horario sesiones presenciales: Sesión 1 07-08 10:00 a 13:00 Sesión 2 07-08 14:00 a 17:00 Sesión 3 21-08 17:00 a 20:00 Sesión 4 22-08 7:00 a 10:00 Sesión 5 22-08 10:00 a 13:00 Sesión 6 18/09 17:00 a 20:00	Sesión 7 19/09 7:00 a 10:00 Sesión 8 19/09 10:00 a 13:00 Sesión 9 09/10 10:00 a 13:00 Sesión 10 09/10 14:00 a 17:00 Sesión 11 21/11 7:00 a 10:00 Sesión 12 21/11 10:00 a 13:00
Grupo o línea que ofrece el seminario: *Research on Mathematics Teacher Education* (RE-MATE)	Correo electrónico del profesor: guacaneme@pedagogica.edu.co

DESCRIPCIÓN DEL ESPACIO ACADÉMICO Y JUSTIFICACIÓN EN EL MARCO DEL PROGRAMA

El Seminario que se propone no pretende ser ni un curso de Historia de las Matemáticas ni uno de Filosofía de las Matemáticas, aunque las temáticas seleccionadas sí se abordan desde los tratamientos y resultados de estas dos disciplinas. No lo es por cuanto el contenido mínimo o básico de estas dos disciplinas desborda ampliamente el tiempo de un curso. En este sentido, el seminario solo aborda algunos pocos temas de estas.

Las temáticas propuestas se derivan de una versión anterior del seminario, desarrollada en el segundo semestre de 2009, del trabajo de tesis doctoral del profesor a cargo del seminario y de una encuesta a los estudiantes realizada de manera previa a la primera sesión del mismo. Las mismas se presentan a través de las siguientes preguntas: ¿de qué depende la verdad en Matemáticas?, ¿cuáles son los criterios de rigor en Matemáticas?, ¿cómo se organizan los conceptos y resultados en Matemáticas?, ¿cuáles son las características de la actividad matemática? y ¿qué caracteriza la historia de un objeto matemático? Estas preguntas se articulan a través de tres temáticas centrales, a saber: Historia de la demostración, Historia de la proporcionalidad e Historia de la Trigonometría.

El seminario se justifica en tanto que los estudiantes de la Maestría en Docencia de las Matemáticas manifiestan no haber realizado estudios de Filosofía de las Matemáticas y, en general, haber cursado un solo espacio académico de Historia de las Matemáticas en su formación de pregrado. Así, se reconoce la necesidad de que exista al menos una aproximación inicial a las temáticas de las que se ocupa la Historia y la Epistemología de las Matemáticas, entendidas como componentes fundamentales del conocimiento del profesor de Matemáticas. Por lo anterior, se considera oportuno y pertinente que un seminario en estas temáticas exista como parte de las opciones formativas generales o trasversales para los estudiantes.

Por otra parte, algunos de los estudiantes están desarrollando sus trabajos de grado y tesis en relación con estas disciplinas metaMatemáticas y reconocen en el seminario la posibilidad de discutir las aproximaciones a problemas y temáticas específicas relacionadas con estas.

PROPÓSITOS DEL ESPACIO ACADÉMICO

Con este seminario se espera contribuir a la constitución del conocimiento de los profesores de Matemáticas e investigadores en Educación Matemática, incorporando en este una reflexión histórico-epistemológica de sus creencias y concepciones sobre las Matemáticas, y promoviendo una conciencia sobre el uso y las implicaciones de la Historia y la Filosofía de las Matemáticas en el ejercicio docente e investigativo. Colateralmente, se espera favorecer la reflexión y participación de la Historia y la Epistemología de las Matemáticas en los proyectos de tesis en que estas sean pertinentes.

COMPETENCIAS INNOVATIVAS E INVESTIGATIVAS QUE IMPULSA EL ESPACIO ACADÉMICO

La incorporación de los discursos históricos y epistemológicos sobre las Matemáticas a la formación de profesionales que casi exclusivamente han estado en contacto con discursos matemáticos, didácticos específicos y pedagógicos exige y promueve una forma particular de pensamiento determinado por la especificidad y naturaleza de las metaMatemáticas. Así mismo genera una sensibilidad y comprensión particular sobre la actividad matemática, los matemáticos, la matemática como legado de la humanidad, el pensamiento matemático, etc. Desde estas formas de pensamiento, sensibilidad y comprensión se ofrece la posibilidad de “ver” y “hacer” de manera diferente la docencia y, en cierto sentido, de percibirla como potencialmente innovadora.

Más allá de ello, el hecho indiscutible de que para estudiar Historia y Filosofía de las Matemáticas sea inextricable el estudio de las Matemáticas de los contextos y épocas específicos, ofrece una posibilidad de comprensión de la interdisciplinariedad tan característica de la Educación Matemática, entendida como campo de investigación. En este sentido, se promueve la lectura de hechos matemáticos, compresiones Matemáticas, ideologías Matemáticas, formas Matemáticas de razonar, etc. de manera integral, aspecto tan necesario en la actividad investigativa en Educación Matemática.

NÚCLEOS TEMÁTICOS O PREGUNTAS FUNDAMENTALES

En el numeral 1 de este programa se reportaron varias preguntas que son objeto de estudio en el seminario y tres temáticas centrales del mismo. Todas estas constituyen el contenido que se esperaría encontrar en este numeral. No obstante, la anterior consideración, a continuación, se presenta una cierta manera de entender la articulación entre temáticas y preguntas.

La historia de la demostración ofrece una hermosa oportunidad para discutir las preguntas: ¿de qué depende la verdad en Matemáticas? y ¿cuáles son los criterios de rigor en Matemáticas? Así mismo, brinda la opción de discutir características de la actividad matemática dentro y fuera de las versiones teóricas de las Matemáticas.

Por su parte, la historia de la proporcionalidad y la historia de la Trigonometría constituyen ámbitos de ilustración para aproximar respuestas a las preguntas: ¿cómo se organizan los conceptos y resultados en Matemáticas? y ¿qué caracteriza la historia de un objeto matemático? Además, permiten reconocer ámbitos teóricos y fácticos de la actividad matemática de matemáticos y otros científicos.

METODOLOGÍA (ESTRATEGIAS PEDAGÓGICAS Y RESPONSABILIDADES DE LOS ESTUDIANTES PARA LAS ACTIVIDADES PRESENCIALES Y EL TRABAJO INDEPENDIENTE).

La aproximación a las respuestas a las preguntas se abordará desde al menos dos tipos de trabajo. De un lado se realizará el estudio de documentos que presentan respuestas a estas; de otro, este estudio se alimentará, complementará y cuestionará con el estudio de hechos y análisis históricos específicos. Esta actividad estará a cargo de los estudiantes y se espera que se realice de manera previa y posterior a las sesiones presenciales.

La discusión de los resultados de los dos tipos de estudios citados se realizará en las sesiones presenciales y su orientación estará a cargo del profesor, pero con la activa participación de los estudiantes.

Eventualmente, una de las actividades relacionadas con el estudio de documentos implicaría la lectura de los documentos teóricos y elaboración de sendas reseñas bibliográficas en un formato que exige: referencia del documento, palabras clave (de acuerdo a la clasificación del ZDM), idea central, estructura del documento e ideas centrales de cada sección o apartado. También, se espera que los estudiantes preparen y presenten exposiciones a través de las cuales se discutan aspectos centrales tratados en conjunto de documentos que refieren a hitos de la historia de un objeto matemático y que preparen y desarrollen talleres o actividades colectivas para la discusión de las ideas que elaboren a partir del estudio de los documentos.

EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Para determinar la calificación final de los estudiantes se tendrán en cuenta de manera ponderada la calificación relativa a:
La entrega y calidad de las tareas propuestas como trabajo independiente. Esta calificación corresponde al 50% de la calificación final y es establecida como el promedio aritmético de las calificaciones de las tareas.

La entrega y calidad de un ensayo de finalización y cierre del seminario. Corresponde al 25% de la calificación total.

La participación y asistencia a las sesiones del seminario. Equivale al 25% de la calificación final. Será establecida por el profesor, pero podrá atender a la valoración que hagan los estudiantes de su propio trabajo y del de los demás. Se incluirá acá la calificación de las exposiciones y demás actividades presenciales a cargo de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía se irá precisando a lo largo del semestre y surgirá del trabajo que se desarrolle y de los documentos que profesor y estudiantes vayan acopiando como material de estudio. Sin embargo, a continuación, se presentan algunos títulos que se podrían estudiar en relación con la historia de la demostración.

1. Aberdein, A. (2007). The Informal Logic of Mathematical Proof. En B. Van Kerkhove & J. P. van Bendengem (eds.) *Perspectives on Mathematical Practices*, pp. 131-151.
2. Arsac, O. (1987). El origen de la Demostración. Ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *8*(3), 267-312.
3. Bagni, G. T. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(3), 217-232.
4. Bkouche, R. (sf). La démonstration: du réalisme au formalisme. Documento recuperado de http://michel.delord.free.fr/rb/rb-demrealform.pdf
5. Chelma, K. (2012). *The History of Mathematical Proof In Ancient Traditions*. New York: Cambridge University Press.
6. Dieudonné, J. (1996). The Concept of ‘Rigorous Proof’. *The Mathematical Gazette*, *80*(487), 204-206.
7. Kitcher, P. (1981). Mathematical Rigor – Who need it? *Noûs, 15*(4), 469-493.

8. Kleiner, I. & Movshovitz-Hadar, N. (1997). Proof: A many-Splendored Thing. *The Mathematical Intelligencer 19*(3), 16-26.
9. Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in Mathematics. A Historical Perspective. *Mathematics Magazine*, *64*(5), 291-314.
10. Krantz, S. G. (2007). The Proof is in the Pudding. A look at the Changing Nature of Mathematical Proof. Documento recuperado de http://www.math.wustl.edu/~sk/books/proof.pdf
11. Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society 30*(2), 161-177.
12. Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine if an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431-459.

ANEXOS (OPCIONAL) PROGRAMACIÓN

Las sesiones 1, 2, 3, 4 y 5 se dedicarán al trabajo sobre la historia de la demostración. En las sesiones 6, 7, 8 y 9 se trabajará el estudio de la historia de la proporcionalidad. Finalmente, las sesiones 10, 11 y 12 se dedicarán al estudio de la historia de la Trigonometría. Se espera que los estudiantes del seminario asistan de la Quinta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, evento a realizarse en Bogotá del 4 al 6 de noviembre de 2015, coorganizado por la Universidad Pedagógica Nacional.

Anexo 5. Cuestionario versión inicial

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
2015 – II

CUESTIONARIO Nº 1

INSTRUCCIONES:

A continuación, se enuncian un conjunto de 20 preguntas referidas a sus conocimientos sobre las *"Ecuaciones Trigonométricas"*, estructuradas de la siguiente manera:

a) Preguntas de selección múltiple: se componen de un enunciado y varias opciones de respuesta, en estas debe marcar con una X la(s) opción(es) que considere adecuada(s).

b) Preguntas abiertas: se debe dar respuesta a una cuestión propuesta, describiendo de la *forma más detallada y clara posible* sus apreciaciones y opiniones.

DATOS GENERALES

Marque con una X o complete los espacios según corresponda:

1. Nombres y apellidos: ____
2. Sexo: M ☐ F ☐
3. Años de experiencia en aula: ______________
4. Nivel educativo en el que se desempeña profesionalmente:

   Educación inicial ☐
   Básica primaria ☐
   Básica secundaria ☐
   Media vocacional ☐
   Técnica o tecnológica ☐
   Profesional (pregrado, postgrado y doctorado) ☐
   Informal (club, clases personalizadas, investigación, etc.) ☐ ¿Cuál? _________________________

5. Título de pregrado / Universidad: ____

   Otros estudios: Sí ☐ No ☐
   ¿Cuáles? ____

6. Durante su formación profesional ha participado en otros seminarios relacionados con Historia de las Matemáticas:
   Sí ☐ No ☐
   ¿Cuáles?
   ____

PREGUNTAS

1. Describe dos estrategias distintas para hallar el valor de *x* en las siguientes igualdades:

$sin 1° = x$	$sin\ x = 0{,}31$
Si conoces otras estrategias, enúncialas	

2. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación trigonométrica:

    a. $sin^2x + \cos^2x = 1$ ☐
    b. $sin 18 = x$ ☐
    c. $y = A sin(ax+\alpha)$ ☐
    d. $sin\ x = 1/2$ ☐
    e. $2\text{tg}x - 3\cot x - 1 = 0$ ☐
    f. $\text{Cos}^2x - 3sin^2x = 0$ ☐
    g. $\text{Cos}3\alpha = \frac{-4q}{k^3}$ ☐

3. Describe el(los) criterio(s) que tuviste en cuenta para decidir que las expresiones del ítem anterior correspondían a Ecuaciones Trigonométricas:

4. Escribe una posible definición de Ecuación Trigonométrica, incluye ejemplos, no ejemplos en la definición.

Definición	
Ejemplos	**No ejemplos**

5. ¿Es importante incluir Ecuaciones Trigonométricas en el currículo escolar? Sí ☐ No ☐

¿Por qué?

6. Conoces contextos o usos donde dar solución a las Ecuaciones Trigonométricas tenga significado.

   Sí ☐

   Enúncialos:

   No ☐

¿Qué tipo de literatura considera le permitiría dar solución a este interrogante? Marque solo una opción.

Matemáticas puras	☐	Navegación	☐
Astronomía	☐	Física	☐
Historia de las Matemáticas	☐	Otro	☐
Cartografía	☐	¿Cuál? ______________________	

¿Por qué?

7. Dadas las expresiones $sin\, k = x$ y $sin\, x = k$ para las cuales k es un valor conocido y x desconocido, escribe una posible y breve secuencia didáctica para enseñarlas en la escuela. Si consideras que ambas expresiones se pueden enseñar usando una misma secuencia didáctica completa solo una de las columnas y argumenta en la parte de Justificación el porqué de tu decisión.

$\boldsymbol{sin\, k = x}$	$\boldsymbol{sin\, x = k}$
Justificación:	

8. Lista los conceptos, nociones y procedimientos que, a tu juicio, necesita un estudiante para resolver una ecuación trigonométrica.

CONCEPTOS	NOCIONES	PROCEDIMIENTOS

9. **A)** Organiza las siguientes temáticas en la columna de la derecha de acuerdo a la secuencia metodológica previa que usas (o usarías) para enseñar Ecuaciones Trigonométricas, en caso de no abordar alguno de los temas no lo escribas.

TEMAS	SECUENCIA
A. Razones trigonométricas B. Funciones trigonométricas. C. Factorización. D. Ejemplos, problemas y contextos de uso de las ecuaciones trigonométricas E. Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas (solución de ecuaciones de primer y segundo grado). F. Operaciones numéricas con expresiones trigonométricas (p. e., *sin*1 + cos30 – 2). G. Identidades trigonométricas.	

B) ¿Abordas algún otro tema que no se consideró en la lista? Sí ☐ No ☐

¿Cuál? ____

10. Argumente si las siguientes afirmaciones son verdaderas V o falsas F:

AFIRMACIÓN	V	F	JUSTIFICACIÓN
La naturaleza de la solución de una ecuación algebraica es la misma de una ecuación trigonométrica (uno o varios números reales).			
Toda ecuación trigonométrica es una ecuación algebraica.			
La solución a una ecuación trigonométrica corresponde a un conjunto de valores que representan medidas de regiones angulares			
Toda ecuación trigonométrica tiene una única solución, un conjunto.			

Anexo 6. Cuestionario versión final

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
2015 – II

CUESTIONARIO Nº 1

IDENTIFICACIÓN

Grupo de Investigación: RE-MATE (Research on Mathematics Teacher Education).
Línea de investigación: Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.
Proyecto de Investigación: ¿Aporta la Historia de las Matemáticas al conocimiento que posee el profesor de Matemáticas de secundaria sobre Ecuaciones Trigonométricas?
Maestros en formación: Cindy Indaburo, Mayerly Sarmiento y Jojhan Jiménez
Asesora: Prof. Lyda Mora Mendieta

PROPÓSITO

El objetivo de este cuestionario mixto es reconocer los saberes previos sobre las ecuaciones trigonométricas que posee el grupo de profesores de Matemáticas del seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas ofertado para el segundo semestre de 2015 en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

INSTRUCCIONES:

A continuación se enuncian 10 preguntas que indagan sobre SUS conocimientos en relación con las *"Ecuaciones Trigonométricas"*, estructuradas de la siguiente manera:
a) Preguntas de selección múltiple: se componen de un enunciado y varias opciones de respuesta, en estas debe marcar con una X la(s) opción(es) que considere adecuada(s).
b) Preguntas abiertas: se debe dar respuesta a una cuestión propuesta, describiendo de la *forma más detallada y clara posible* sus apreciaciones y opiniones.

POR FAVOR, NO SE CUESTIONE SOBRE EL CONOCIMIENTO DE SUS ESTUDIANTES

DATOS GENERALES

Marque con una X o complete los espacios según corresponda:

1. Nombres y apellidos: ____
2. Sexo: M ☐ F ☐
3. Años de experiencia en aula: ______________
4. Nivel educativo en el que se desempeña profesionalmente:

Educación inicial	☐
Básica primaria	☐
Básica secundaria	☐
Media vocacional	☐
Técnica o tecnológica	☐
Profesional (pregrado, postgrado y doctorado)	☐
Informal (club, clases personalizadas, investigación, etc.)	☐ ¿Cuál? _________________________

5. Título de pregrado / Universidad: ____

   Otros estudios: Sí ☐ No ☐

¿Cuáles? ____

6. Durante su formación profesional ha participado en otros seminarios relacionados con Historia de las Matemáticas:
   Sí ☐ No ☐
   ¿Cuáles?
   ____

PREGUNTAS

POR FAVOR, NO DUDE EN REGISTRAR EN LOS ESPACIOS CUALQUIER DUDA U OBSERVACIÓN RESPECTO A CADA UNA DE LAS PREGUNTAS PROPUESTAS, AÚN CUANDO NO TENGA ALGUNA RESPUESTA

7. Marca una X en el recuadro frente a aquellas expresiones que consideres corresponde(n) a una Ecuación Trigonométrica:

h.	$sin^2x + \cos^2 x = 1$	☐	¿Por qué?____________________
i.	$sin 18º = x$	☐	¿Por qué?____________________
j.	$y = A sin(ax+\alpha)$	☐	¿Por qué?____________________
k.	$sin\ x = 1/2$	☐	¿Por qué?____________________
l.	$2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$	☐	¿Por qué?____________________
m.	$f(x) = sin\ x$	☐	¿Por qué?____________________
n.	$y = cos\ x$	☐	¿Por qué?____________________
o.	$sin\ x = 3$	☐	¿Por qué?____________________
p.	$sin\ x + 5 > -2$	☐	¿Por qué?____________________
q.	$2 = 1 + 1$	☐	¿Por qué?____________________
r.	$2x^2 + 3x - 7 = 12$	☐	¿Por qué?____________________
s.	$\text{Cos}3\alpha = \frac{-4q}{k^3}$	☐	¿Por qué?____________________
t.	$sin\ x + 7i = 3$	☐	¿Por qué?____________________
u.	$sin^{-1}x = 4$	☐	¿Por qué?____________________

8. Escribe una posible definición de Ecuación Trigonométrica, presenta ejemplos y no ejemplos.

<table>
<tr><td colspan="2">Definición</td></tr>
<tr><td colspan="2">

</td></tr>
<tr><td>Ejemplos</td><td>No ejemplos</td></tr>
</table>

9. Describe dos estrategias distintas para hallar el valor de x en las siguientes igualdades:

$sin 1° = x$	$sin\ x = 0{,}31$
Si conoces otras estrategias, enúncialas	

10. Enuncia contextos o usos donde dar solución a las Ecuaciones Trigonométricas tenga significado.

11. ¿Cuáles de las siguientes opciones, consideras que te permitirían identificar contextos asociados a las Ecuaciones Trigonométricas?

Matemáticas puras	☐	Navegación	☐
Astronomía	☐	Física	☐
Historia de las Matemáticas	☐	Otro	☐
Cartografía	☐	¿Cuál?	

____

____

¿Por qué?

12. ¿Es importante incluir Ecuaciones Trigonométricas en el currículo escolar? Sí ☐ No ☐

¿Por qué?

13. Dadas las expresiones $sin\, k = x$ y $sin\, x = k$ para las cuales k es un valor conocido y x un valor desconocido, escribe una posible y breve secuencia para enseñarlas en la escuela. Si consideras que ambas expresiones se pueden enseñar usando una misma secuencia completa solo una de las columnas y argumenta en la parte de Justificación el porqué de tu decisión.

$\boldsymbol{sin\, k = x}$	$\boldsymbol{sin\, x = k}$

Justificación:	

14. Lista los conceptos, nociones y procedimientos que, a tu juicio, necesita un estudiante para resolver una Ecuación Trigonométrica.

CONCEPTOS (Definiciones, teorías)	**NOCIONES** (Ideas intuitivas, pre-saberes)	**PROCEDIMIENTOS** (Técnicas, estrategias de solución a algún problema)

15. **A)** Organiza los siguientes temas en la columna de la derecha de acuerdo a la secuencia metodológica previa que usas (o usarías) para enseñar Ecuaciones Trigonométricas, en caso de no abordar alguno de los temas no lo escribas.

TEMAS	**SECUENCIA**
H. Razones trigonométricas I. Funciones trigonométricas. J. Factorización.	

K. Ejemplos, problemas y contextos de uso de las ecuaciones trigonométricas L. Ideas sobre solución de ecuaciones algebraicas (solución de ecuaciones de primer y segundo grado). M. Operaciones numéricas con expresiones trigonométricas (p. e., $sin 1^{o} + cos 30^{o} - 2$). N. Identidades trigonométricas.	

B) ¿Abordas algún otro tema que no se consideró en la lista? Sí ☐ No ☐

¿Cuál? ____

16. Argumente si las siguientes afirmaciones son verdaderas V o falsas F:

AFIRMACIÓN	V	F	JUSTIFICACIÓN
La naturaleza de la solución de una ecuación algebraica (en R) es la misma que la de una ecuación trigonométrica (ninguno, uno, varios o infinitos números reales).			
Toda ecuación trigonométrica es una ecuación algebraica.			
La solución de una ecuación trigonométrica corresponde a un conjunto de valores que representan medidas de regiones angulares.			

¡GRACIAS POR TU COLABORACIÓN!

Anexo 7. Intervención 1. Hitos de la Trigonometría

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Cindy Indaburo 2014185008
Jojhan Jiménez 2014185009
Claudia Sarmiento 2014185021

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA

1. IDENTIFICACIÓN

FECHA DE IMPLEMENTACIÓN: 10 OCTUBRE DE 2015
TIEMPO REQUERIDO: 6 HORAS
TEMA A TRATAR: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

2. OBJETIVOS DE ENSEÑANZA

- Realizar una intervención pedagógica a estudiantes del seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas con el fin de contextualizarlos en aspectos relacionados con la Historia de la Trigonometría.
- Contextualizar a los estudiantes en el desarrollo histórico de la Trigonometría.

3. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Con el desarrollo de la sesión, el estudiante debe:

- Reconocer los principales elementos y hechos que originaron a lo largo de la historia un cambio de concepción en la idea de Trigonometría (hitos).
- Establecer comparaciones entre el abordaje curricular que se da a la Trigonometría en la escuela y su desarrollo histórico.
- Identifica los avances que tuvo la Trigonometría por cultura, periodo, hito y personaje, los cuales, sustentan de forma histórico – matemática el trabajo que desarrolla en el aula.

4. INTRODUCCIÓN

Luego de un análisis preliminar del cuestionario implementado a los estudiantes del Seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas – ofertado en para el segundo semestre de 2015 en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática – se reconoce una ausencia o poco conocimiento (matemático, histórico y pedagógico) en relación con los asuntos que se abordan en la Trigonometría escolar, en especial, cuando se habla del estudio de las Ecuaciones Trigonométricas. Así, esta intervención en el aula pretende mostrar a los estudiantes algunos hitos históricos relacionados con el estudio de la Trigonometría a partir del estudio de documentos históricos como el de Smith (1925), discusiones grupales y actividades escritas, que le brinden un panorama más amplio acerca de las necesidades que dieron origen a las ideas trigonométricas y las herramientas usadas a lo largo de la historia para dar solución a problemas particulares de contextos geográficos, culturales y matemáticos determinados.

No obstante, se intenta describir y analizar los principales avances de la Trigonometría como un fundamento histórico – matemático al trabajo que se realiza en el aula y que permite a cada profesor reflexionar sobre los diferentes aspectos pedagógicos, didácticos y curriculares que atañen a la pertinencia de la Trigonometría en los planes curriculares de grado décimo de las instituciones escolares.

5. IDEAS MATEMÁTICAS QUE SE ABORDARAN CON LOS ESTUDIANTES

El origen de la Trigonometría como ciencia analítica data aproximadamente del siglo XVII, luego del satisfactorio desarrollo del simbolismo algebraico. Sin embargo, si se considera desde el punto de vista de complemento geométrico – métrico a la astronomía, en la que se utilizan ciertas funciones asociada a los ángulos, entonces el punto de inicio puede situarse en los trabajos de Hiparco (aprox. 140 a.C.) aunque existieron vestigios anteriores de su uso en otras culturas. Por último, si se alude al significado etimológico del término Trigonometría como el estudio de la medición de triángulos, esta concepción puede situarse en el segundo o tercer siglo a.C.

De acuerdo con lo anterior y retomando las ideas presentadas en el documento de Smith (1925), quien realiza un breve recorrido histórico del desarrollo de la Trigonometría, se pueden identificar tres hitos en los cuales se reconoce una transformación en la concepción de la idea de Trigonometría, estos se describen a continuación:

a) LA TRIGONOMETRÍA COMO UNA HERRAMIENTA CULTURAL PARA EL CÁLCULO DE LONGITUDES: Este hito comprende el trabajo desarrollado por las culturas, árabe, hindú, babilónica, egipcia y el trabajo de personajes como Ptolomeo, Hiparco, Alkashi, Ulug Beg y Heródoto, en los que la Trigonometría se consideraba una herramienta matemática que permitía encontrar medidas de longitud para la altura de las pirámides, la distancia a la meca, latitudes, aproximación a la distancia entre astros, etc.; aquí no se definían los conceptos y nociones trigonométricas sino que utilizaban de forma indistinta para la elaboración de tablas con el fin de obtener una precisión en la medición de longitudes.

b) LA TRIGONOMETRÍA COMO CIENCIA INDEPENDIENTE

Se reconoce en este hito el trabajo realizado por Abu'l-Wefa (c. 980), quien comenzó un registro sistemático de teoremas y pruebas de Trigonometría y el astrónomo persa Nair ed-din Al-tusi (c. 1250) el primero en escribir una obra de Trigonometría, que muestran como la Trigonometría tiene objetos de estudio propio, emerge una comunidad académica interesada en los avances de este campo, se inicia con la estructuración de un lenguaje propio, hay una producción científica (primeros textos escritos de

Trigonometría), entre otras cosas que posicionan a la Trigonometría como una ciencia independiente.

c) **LA TRIGONOMETRÍA COMO CIENCIA ANALÍTICA:** Con el surgimiento del simbolismo y el lenguaje propio del álgebra, la Trigonometría da un giro hacia el siglo XVII, pues se intenta sistematizar las ideas hasta aquí construidas en un lenguaje simbólico y abstracto que permita hacer demostraciones y darle un sentido lógico a la Trigonometría, razón por la uno de sus principales intereses es encontrar relaciones simbólicas entre ángulos y lados de un triángulo y poder expresarlas mediante lo que hoy conocemos como identidades trigonométricas.

d) **LA TRIGONOMETRÍA COMO HERRAMIENTA PARA OTRAS CIENCIAS:** comprende el desarrollo de las seis funciones trigonométricas, incluye aspectos como las forma de representar o escribir los nombres de las razones trigonométricas, personajes a los cuales se les atribuye estas notaciones y la construcción de funciones inversas. Se considera un hito pues los avances de ciencias como la física vieron la necesidad de utilizar modelos matemáticos que les permitieran analizar con mayor eficacia las diferentes situaciones problema que iban surgiendo y así los desarrollos de la Trigonometría con el concepto de función fueron de gran utilidad.

6. METODOLOGÍA

La estrategia metodológica usada para la implementación en el aula varía de acuerdo a los momentos que se describen más adelante, sin embargo, en general se utiliza el trabajo en grupo, la discusión y reflexión, la exposición temática y el análisis de bibliografía sugerida previamente a la sesión.

7. **MOMENTOS:** A continuación, se describe los momentos de la sesión:

Momento 1. Lectura del documento de trabajo

Previo a la sesión presencial los estudiantes deberán realizar la lectura de Smith (1952), con esto se busca contextualizar a los participantes del seminario en el desarrollo histórico de la Trigonometría. La socialización del documento se realizará de forma grupal, con el fin de identificar hechos históricos que han permitido el cambio de concepción en el desarrollo de la Trigonometría.

Momento 2. Introducción

Se entrega a cada estudiante tres tiras de papel y un marcador y se pide que escriban en cada tira un hecho, avance o idea que considera fue importante en el recorrido histórico que presenta Smith (1925) en relación con la Trigonometría. Luego, debe pasar al tablero e intentar ubicarlo en la línea cronológica que presenta el docente y mencionar el porqué de esta ubicación.

Momento 3. Trabajo en grupo

En grupos discutir que concepciones se identifican en la historia acerca de la Trigonometría, a partir de los hechos ubicados en el momento anterior y teniendo en cuenta los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles fueron las motivaciones para estos cambios de concepción?
- ¿Cuáles fueron los principales avances en la Trigonometría?
- ¿Cuál considera es el recorrido de la Trigonometría en el aula?
- ¿Cuál es el contexto principal en el cual se ha dado uso a la Trigonometría?
- ¿En qué momento se habla de Trigonometría como una ciencia autónoma?

Momento 4. Socialización

Se genera un espacio de discusión en el curso con el objetivo de organizar los hechos presentados en el tablero e identificar los principales hitos que han permitido el cambio de concepción de la Trigonometría. Luego de ello, los investigadores formalizan el trabajo con la siguiente presentación de los hitos que se mencionaron el apartado 5 de este documento, mediante la siguiente presentación:

Momento 5. Actividad de aprendizaje

De acuerdo a lo discutido en la sesión de clase se solicitará a los estudiantes realizar un escrito de una página en el cual expongan los principales hitos que a su criterio han permitido el cambio de concepción de la Trigonometría. Además, se asignarán varios documentos históricos que describen algunos métodos de solución de ET para su estudio.

BIBLIOGRAFÍA

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1. Scripta Math, 20, 24 - 29.

Smith, D. (1925). History of Mathematics: Volume II, Special topics of elementary mathematics. Boston, MA: Ginn and Company.

Anexo 8. Intervención 2. Historia de las ET

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Cindy Indaburo 2014185008
Jojhan Jiménez 2014185009
Claudia Sarmiento 2014185021

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN Nº 2

1. IDENTIFICACIÓN

FECHA DE IMPLEMENTACIÓN: 21 DE NOVIEMBRE DE 2015
ASIGNATURA: SEMINARIO HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS
TIEMPO REQUERIDO: 6 HORAS
TEMA A ESTUDIAR: MOMENTOS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS QUE SE RELACIONAN CON LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2. OBJETIVOS DE ENSEÑANZA

1. Contribuir a la reflexión del profesor de Matemáticas en ejercicio sobre su quehacer pedagógico.
2. Realizar una intervención pedagógica a estudiantes del seminario de Historia y Epistemología de las Matemáticas que aporte a sus conocimientos sobre los distintos contextos en que se percibe la aparición de Ecuaciones Trigonométricas desde la Historia de las Matemáticas.
3. Caracterizar algunos procedimientos de solución de Ecuaciones Trigonométricas hallados en la Historia de las Matemáticas.

3. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Con el desarrollo de la sesión, el estudiante debe asumir una posición reflexiva sobre: i) su quehacer pedagógico en el aula cuando enseña Ecuaciones Trigonométricas, ii) sus conocimientos sobre el tema, y iii) el aporte que hace la Historia de las Matemáticas a su formación profesional. Además, se pretende que el estudiante:

e) Identifique distintos momentos en los cuales se percibe la aparición de la idea de ecuación trigonométrica.
f) Reconozca diferentes estrategias para abordar el estudio de la solución de las Ecuaciones Trigonométricas usando los elementos que le aporta la Historia de las Matemáticas.
g) Analice diferentes procedimientos de solución de una ecuación trigonométrica.
h) Establezca comparaciones entre los procedimientos estudiados.
i) Reflexione sobre la pertinencia y coherencia de este tema en el currículo de Matemáticas del ciclo V

j) Reflexione sobre su propia formación inicial como profesor de Matemáticas, en relación con las Matemáticas escolares para el caso de las Ecuaciones Trigonométricas.

4. INTRODUCCIÓN

Posterior a la intervención sobre los hitos históricos de la Trigonometría, los cuales, permitieron realizar una clasificación de algunas de las concepciones de la Trigonometría que tienen los maestros en formación que participan del curso de Historia y Epistemología de las Matemáticas, se plantea una segunda intervención en la que se pretende abordar aspectos específicos referidos a las Ecuaciones Trigonométricas. Para ello, el estudio de algunos documentos históricos que al criterio de los investigadores contienen elementos que dan cuenta de la idea de ecuación trigonométrica, que permitan posteriormente generar un espacio de reflexión en torno a la práctica docente y los elementos curriculares que caracterizan las Matemáticas escolares, en especial, cuando se enseña este tema en grado décimo. Además, lo anterior, pretende dar cuenta de los componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas que se modifican o amplían cuando estudia Historia de las Matemáticas.

5. METODOLOGÍA

Para dar alcance a los objetivos propuestos se plantean a continuación los momentos que organizan la intervención.

MOMENTO 1: Cada estudiante recibirá uno de los siguientes documentos, en estos se registran los procedimientos que hasta el momento los investigadores han identificado en la Historia de las Matemáticas, los cuales se refieren a la solución de Ecuaciones Trigonométricas:

A. ***Estudio socio epistemológico de la Función Trigonométrica,*** **Montiel (2005) y el sitio web *http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#equivalence.***

Describe el método empleado por Claudio Ptolomeo en la construcción de las Tablas de cuerdas, en este documento se evidencia un tratamiento geométrico que permita hallar la solución de la Ecuación Trigonométrica $\frac{crd(2\alpha)}{120} = sen\alpha$.

B. ***Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1*°. Aaboe (1954)**

Describe un método numérico analítico en el cual se resuelve ecuaciones del tipo $sen\theta = x$, usando la idea de sucesiones.

C. ***Els orígens i I'ensenyament de I'algebra simbólica*. Malet (1984).**

Describe un método numérico analítico en el cual se resuelve ecuaciones del tipo $sen\theta = x$ usando los residuos.

D. ***An imaginary tale. The story of*** $\sqrt{-1}$**. Nahin (1998)**

Se presenta el trabajo realizado por el matemático francés François Viéta para hallar la solución de ecuaciones cúbicas a través de sustituciones trigonométricas.

E. ***Omar Jayyam Poeta y Matemático Moreno (2002)***

Se retoman las paginas finales del libro que describen un método geométrico (usando la idea de razón y proporción) para dar solución a una ecuación cubica obtenida de una ecuación trigonométrica.

F. *Chapter X. Solution of certain trigonometric equations and of numerical equations of the second and third degrees, Chauvenet (1855)*

El profesor de Matemáticas, astronomía y navegación de la Academia Naval de los Estados Unidos y de la Universidad de Washington William Chauvenet (1820 – 1870) describe en el capítulo X de su libro titulado *A treatise on plane and spherical trigonometry (1855)*, un método netamente algebraico para solucionar ecuaciones trigonométricas que a su criterio considera de gran relevancia en el campo de la astronomía y la navegación. Para ello intenta hallar una expresión general que le permita solucionar una ecuación trigonométrica solo sustituyendo valores.

TAREA EVALUABLE:

Se propondrá a los estudiantes responder a las siguientes preguntas a partir del documento correspondiente, las respuestas a estas deben ser entregadas el día 22 de noviembre del 2015 en un documento word.

1. ¿Qué expresión trigonométrica se aborda en este documento?
2. Describa el contexto en el cual surge o se desarrolla el procedimiento presentado. En caso de que lo requiera, puede consultar otros documentos para ampliar lo expuesto en la lectura.
3. ¿A qué personaje(s) se le atribuye ese procedimiento?
4. ¿Cuáles son los elementos fundamentales que caracterizan el procedimiento expuesto?
5. ¿Qué conocimientos previos se utilizan para desarrollar el procedimiento presentado en la lectura?
6. En el documento leído, ¿Percibe la existencia de Ecuaciones Trigonométricas?, ¿Por qué?
7. En que hito de los abordados en clase sobre Historia de la Trigonometría se ubica la propuesta de presentada en el documento.

En el anexo se describe en detalle el taller con la tarea para los estudiantes y la distribución de los documentos para su estudio. Además, en este taller se solicita a los estudiantes que para la sesión lleven consigo el libro de texto guía que usan normalmente para dar su cátedra en grado 10º o el que se utilice en la institución educativa en la cual trabaja.

MOMENTO 2: COMPARACIÓN DE MÉTODOS

Se solicitará a los estudiantes trabajar en parejas, estas serán establecidas por los maestros/investigadores, el fin principal es la socialización a las respuestas dadas en el momento 1 y el conocimiento de los estudiantes por lo menos de otro procedimiento diferente al estudiado. En este trabajo cada pareja de estudiantes recibirá la siguiente matriz de comparación para completar:

	ESTUDIANTE 1	ESTUDIANTE 2
PERSONAJE A QUIEN SE LE ATRIBUYE EL PROCEDIMIENTO		
EXPRESIÓN TRIGONOMÉTRICA ASOCIADA		

DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO		
CONTEXTO DONDE SURGE EL PROCEDIMIENTO		

Tabla 1. Socialización grupal de procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas.

MOMENTO 3: Cada pareja expondrá lo realizado en el momento 2, para apoyar este trabajo los maestros/investigadores entregarán un documento que recoge los métodos expuestos en todas las lecturas, este servirá de complemento a las presentaciones de los demás compañeros. Se buscará la construcción grupal de la siguiente matriz de comparación:

PERSONAJE A QUIEN SE LE ATRIBUYE EL PROCEDIMIENTO / FECHA						
CONTEXTO DONDE SURGE EL PROCEDIMIENTO						
EXPRESIÓN TRIGONOMÉTRICA ASOCIADA						
DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO						
CONOCIMIENTOS PREVIOS QUE SE REQUIEREN						

Tabla 2. Socialización general de procedimientos para resolver ecuaciones trigonométricas.

NOTA: Los materiales para la construcción de esta tabla son papel craff y marcadores de colores.

Al finalizar las presentaciones, se propone el desarrollo de una plenaria en torno a las siguientes preguntas:

1. ¿Se reconoce en la Historia de las Matemáticas la existencia de Ecuaciones Trigonométricas?
2. ¿Se reconoce en la Historia de las Matemáticas distintos procedimientos para la solución de Ecuaciones Trigonométricas?
3. ¿De qué depende el surgimiento de este tipo de métodos?
4. Los contextos referidos en la matriz, ¿A qué tipo de actividades corresponden?
5. ¿cuáles son los contextos que se logran identificar para el desarrollo de las Ecuaciones Trigonométricas?
6. ¿Qué tipos de tipos de procedimientos para la solución de Ecuaciones trigonométricas se pueden caracterizar a lo largo de la Historia de las Matemáticas?

7. ¿En relación con los elementos estudiados en los métodos existe alguna coherencia en relación con lo curricular?
8. ¿Qué potencialidades en cuanto a lo matemático ofrecen estos procedimientos estudiados?
9. ¿Qué potencialidades ofrecen en relación a lo didáctico?

MOMENTO 4: Cada estudiante revisara detenidamente el libro de Matemáticas de grado décimo que trajo a la clase, con el objetivo de que en este indague sobre: la idea de Ecuación Trigonométrica que se presenta en el texto, los contextos que se emplean para el tratamiento de las Ecuaciones Trigonométricas, los tipos de Ecuaciones Trigonométricas que son trabajadas, los saberes previos para el abordaje de Ecuaciones Trigonométricas, el(los) procedimiento(s) presentado(s) o propuesto(s) para la solución de Ecuaciones Trigonométricas.

Luego, se socializará lo encontrado en los textos mediante una plenaria que pretende discutir diferentes puntos de vista en relación con:

1. De acuerdo con lo abordado en los momentos anteriores, ¿Considera viable que las ecuaciones trigonométricas aparezcan en el currículo escolar colombiano?
2. ¿Qué tipo de procedimientos podría emplear en su aula para la solución de ecuaciones trigonométricas?
3. ¿Lo que se propone para grado décimo sobre ecuaciones Trigonométricas es lo que realmente se debe abordar?
4. ¿Qué secuencia de enseñanza utilizaría para enseñar ecuaciones trigonométricas?
5. ¿Llevaría alguno de los procedimientos abordados en el momento 2, al trabajo en su aula con estudiantes de grado décimo?

MOMENTO 5: Se presentarán algunas de las preguntas del cuestionario aplicado inicialmente para debatir sobre las soluciones y transformaciones que han sufrido sus respuestas a partir de las dos intervenciones realizadas.

6. DISTRIBUCIÓN DE TIEMPOS

La siguiente es la gestión de tiempos que se propone para la sesión:

HORA	ACTIVIDAD
7:00 a 7:30 am	Institucionalización de hitos. Exposición por parte de los investigadores consolidando la actividad de la sesión anterior y las tareas enviadas por los estudiantes.
7:30 a 8:30 am	Socialización por grupos de los procedimientos de solución de ecuaciones trigonométricas estudiados en los documentos. Diligenciamiento de tablas 1
8:30 a 9:30 am	Socialización general de las respuestas a la tabla 1 y diligenciamiento de la tabla 2
9:30 a 10:00 am	Receso
10:00 a 10:30	Conclusiones de la actividad inicial de la mañana
10:30 a 11:00	Revisión de libros de Matemáticas de grado décimo

11:00 a 12:00	Plenaria sobre aspectos didácticos y curriculares de las ecuaciones trigonométricas
12:00 a 1:00	Espacio de cierre del seminario a cargo del profesor Edgar Guacaneme

7. BIBLIOGRAFÍA

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1. *Scripta Math , 20*, 24 - 29.

Chauvenet, William. (2013). *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*. London: Forgotten Books. (Original work published 1855)

Paul, N. (1998). An imaginary tale. The story of the square root of minus one. United States of America: British Library Cataloging

Smith, D. (1925). *History of Mathematics : Volume II*, *Special topics of elementary mathematics.* Boston, MA: Ginn and Company.

Anexo 9. Tareas propuestas a los maestros en formación avanzada

Las siguientes tareas fueron propuestas a los estudiantes vía correo electrónico previo a las sesiones de trabajo presencial:

TAREA 7: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

En el Dropbox he alojado un archivo sobre la historia de la Trigonometría (Historia de la Trigonometría – Smith.pdf). La idea es que, para la sesión del viernes 9 en la tarde, lean este o encuentren, carguen al Dropbox y lean otro(s) similar(es) que identifiquen en la red.

TAREA EMERGENTE 7.1: ESCRITO DE HITOS DE LA TRIGONOMETRÍA

A partir de la discusión en clase, realizar un escrito de una página en el cual se exponga los hitos que han generado cambios de concepción en la evolución de la Trigonometría.

TAREA 8: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para dar continuidad al estudio del tercer componente planteado para el seminario (*Historia de la Trigonometría*) y retomando el trabajo realizado en la última sesión por el grupo de Indaburo, Jiménez y Sarmiento sobre los hitos, previo a las sesiones del 21 de noviembre desarrolle individualmente las tareas enunciadas en las siguientes consignas:

1. Ubique el(los) documento(s) que le asigno, descárguelo de la carpeta compartida del Dropbox y estúdielo detenidamente.

ESTUDIANTE	DOCUMENTO
Jhon Fredy Erazo Castro Natalia Morales Rozo	Al-Kashi´s iteration method for the determination of sin 1°. (Aaboe, 1954).
Pablo Andrés Córdoba Barbosa Laura Alejandra Prieto Contreras	Estudio socio epistemológico de la Función Trigonométrica. (Montiel, 2005). Ptolemy's Table of Chords Trigonometry in the Second Century. (Elert, 1994). http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#equivalence
Jaison Fernando Ariza Angie Milena Martínez Cobos	Chapter X. Solution of certain trigonometric equations and of numerical equations of the second and third degrees. (Chauvenet, 1855, pp. 85-91).
Jeimmy Lizeth Bernal Calcetero Claudia Mayerly Sarmiento Martin	Els orígens i I'ensenyament de I'algebra simbólica. (Malet, 1984).
Jenny Marcela Umaña Gómez Jojhan Gonzalo Jiménez Bello	An imaginary tale. The story of . (Nahin, 1998).
Gina Isabel Torres Walteros Cindy Yesenia Indaburo Moreno	Omar Jayyam Poeta y Matemático. (Moreno, 2002).

2. Responda las siguientes preguntas (o enunciados) y remítame sus respuestas en un documento Word, el cual deberá llevar impreso a la sesión.

- ¿Qué expresión trigonométrica se aborda en este documento?
- Describa el contexto en el cual surge o se desarrolla el procedimiento presentado. En caso de que lo requiera, puede consultar otros documentos para ampliar lo expuesto en la lectura.
- ¿A qué personaje(s) se le atribuye ese procedimiento?
- ¿Cuáles son los elementos fundamentales que caracterizan el procedimiento expuesto?
- ¿Qué conocimientos previos se utilizan para desarrollar el procedimiento presentado en la lectura?
- En el documento leído, ¿percibe la existencia de ecuaciones trigonométricas?, ¿por qué?
- ¿En qué hito de los abordados en clase sobre Historia de la Trigonometría se ubica la propuesta de presentada en el documento?

3. Consiga y lleve a la sesión de clase un libro de texto de grado décimo o undécimo en el que se traten temas de Trigonometría (preferiblemente lleve el que se utiliza o se ha utilizado en la enseñanza de la Trigonometría en la institución donde labora o ha laborado).

***Anexo 10.* Unidades de análisis vs instrumentos**

				ANTES HM	DESPUÉS HM			
					INTERVENCIÓN 1		INTERVENCIÓN 2	
UNIDAD	**SUB-UNIDAD**	**SUSTENTO TEÓRICO (Pinto, 2010)**	**INDICADOR**	**CI**	**GS1**	**T1**	**T2**	**GS2**
Conocimiento del contenido matemático a enseñar **CoMatEns**	Conocimiento sobre la actividad matemática general: Historia de la Trigonometría y las ET **ConAcMatG**	– *Conocimiento de la historia de la disciplina*, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos. – *Conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas* en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico.	Contextos donde se desarrolló la Trigonometría o las ET (p. e., navegación, Astronomía, entre otras.) – **CtxTriET**	P4, P5	M1, M2	SI	P3.2	M2, M3P4, M3P5
			Principales actividades Matemáticas asociadas a la Trigonometría (p. e., mejorar la aproximación de tablas, hacer mediciones, entre otras.) – **AcTri**	P4	M2	SI	P3.5	M2, M3P4
			Evolución en los métodos para dar solución a algunas ET (p. e., geométricos, numéricos y analíticos) – **EvMetET**	NO	NO	NO	P3.4	M2, M3P2
			Cambios en las concepciones de la Trigonometría (objetos y usos) – **CamCpTri**	NO	M2	SI	P3.7	M2

			Influencia de los intereses culturales y creencias filosóficas para mejorar cálculos y procedimientos trigonométricos – **InfCultCreF**	NO	M2	SI	P3.7	M2, M3P1, M3P3
			El tratamiento de las ET que se dio en las culturas o civilizaciones más representativas (p. e., griega, árabe, hindú, etc.) – **CulTraET**	NO	NO	NO	P3.3	M2, M3P3
			La búsqueda de la rigurosidad en la precisión de las aproximaciones – **RiguApx**	NO	M2	SI	NO	M3P3
	Conocimiento por tópico especifico matemático: Ideas Matemáticas de las ET **ConTopEsp**	– *Características esenciales* (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos prototipos, distinción entre ejemplos concretos y	Atributos de las ET (p. e., definición, tipos de ET, características de las ET, etc.) – **AtrET**	P1, P2, P10	NO	NO	P3.1 , P3.7	M2
			Ejemplos de prototipos de ET – **ProtET**	P1, P2	NO	NO	P3.1	M2

		no-ejemplos, actualización del cambio en el concepto). – *Diferentes representaciones* (comprender los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre éstos). – *Conocimiento y comprensión del concepto*, (conocimiento conceptual y procedimental del concepto, y las relaciones de éstos).	Relaciones de las ET con otros conceptos matemáticos (p. e., funciones, periodicidad, etc.) dadas sus relaciones Matemáticas– **RelConcp**	P1-P7	NO	NO	P3.5, P3.6	M2, M3P4, M3P8
			Métodos y estrategias de solución de ET – **MetSolET**	P3-P7	NO	NO	P3.4	M2, M3P2
			Diferentes representaciones de las ET (p. e., numérica en tablas de valores, algebraica o gráfica) – **RepET**	NO	NO	NO	NO	PUEDE SER
	Conocimiento sobre el currículo matemático: pertinencia desde la perspectiva matemática de las ET en el currículo **ConCuMatDM**	– *Conocimiento de las justificaciones para aprender un tópico dado*, que consiste en conocer y utilizar una variedad de formas específicas para la materia, para justificar los tópicos específicos y con ello motivar a los estudiantes para aprender.	Conocimiento de las justificaciones para aprender ET desde las Matemáticas y su evolución – **JustApzETEvMat**	P6	NO	NO	NO	M3P7,M3P8
			Conceptos, nociones y procedimientos matemáticos necesarios para el estudio de las ET dadas sus relaciones	P7-P8	NO	NO	P3.6	M2, M4P2

		– *Conocimiento de las ideas importantes para enseñar un tópico dado*, que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos tópicos, como son los procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros. – *Conocimiento de los prerrequisitos de conocimiento para un tópico dado*, en los diferentes momentos del ciclo didáctico y estudio del tópico (ej. tópico dentro del mismo currículo, tópico y herramientas conceptuales y procedimentales previas, experiencia en el manejo del tópico o concepto y experiencia en procesos de pensamiento similares).	curriculares. – **PrqETRelCu**					
			Conocimiento de las justificaciones Matemáticas para aprender ET desde los documentos normativos curriculares (p. e., la relación de las ET con los procesos de estimación, modelación, fenómenos periódicos, etc.) – **JustMatCuApzET**	P6	NO	NO	NO	M3P7, M3P8, M4P1
Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las Matemáticas **CoEstRepInst**	Conocimiento sobre las representaciones instruccionales **ConRepInst**	– *Conocimiento sobre las rutinas instruccionales, que implica, estrategias, métodos o técnicas específicas al contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción y el* conocimiento de las	Conocimientos de la secuencia metodológica para enseñar ET – **SecMetgET**	P7, P9	M2	NO	P3.6	M2, M4P2, M4P3, M4P4

		características de las interacciones didácticas, así como de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje y las alternativas para afrontarlas.						
	Conocimientos de los materiales Curriculares **ConMtrCu**	– *De los materiales para la instrucción del contenido matemático o para una determinación noción*, sus características, los textos y materiales básicos y alternativos, software, calculadoras, programas específicos, problemas, ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas de y sobre conceptos o tópicos, demostraciones en laboratorios, programas o simuladores on-line, recursos en Internet, etc., y de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias. – *Del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión*, su organización razonada de tópicos, las	Conocimiento sobre el tratamiento de las ET en los materiales curriculares (p. e., libros de texto) - **TratETMtrCu**	NO	NO	NO	NO	M4P3 PREGUNTAS EMERGENTES

		actividades y problemas que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las estrategias instruccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático.						
	Conocimientos sobre el currículo matemático: pertinencia desde la perspectiva didáctica/instruccional de las ET en el currículo **ConCuMatDD**	– *Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático*, que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático (según el grado y nivel de enseñanza), de las relaciones con otros contenidos matemáticos y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática.	Correspondencia secuencial entre los hallazgos encontrados en la Historia de las ET y la estructura temática del currículo de Trigonometría – **SecHCuTri**	NO	M2	NO	NO	M3P7
			Conocimiento de las justificaciones curriculares de enseñar ET (p. e., razones del porqué las ET están en el currículo y en el plan de estudios de grado décimo) – **JustInsEnsET**	P6	NO	NO	NO	M3P7, M3P8, M4P1

Conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático **CoApzEConMat**	Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en Matemáticas **ConProcCogEMat**	– *conocer las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes*, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula, sobre el contenido matemático que aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las Matemáticas y con los diferentes tópicos específicos.	Alusión a la necesidad de aprender ET basado en características cognitivas de los estudiantes (concepciones, intereses, expectativas) – **NcsApzETCaractCogE**	P6				
	Conocimiento de las estrategias curriculares **ConEstInst**	– *conocer las estrategias instruccionales específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades*, así como conocer las estrategias instruccionales específicas que pueden ser usadas para permitir	Estrategias instruccionales basadas en el proceso de aprendizaje que permiten cambiar las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades. –	P7				

		que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ellos ya poseen.	**EstInsProcApzCamCreCp**						

Anexo 11. Nomenclatura para codificación

Las siguientes son las abreviaturas que se usaran para algunas palabras presentes en las unidades de análisis y la codificación.

NO	ABREVIATURAS	PALABRA
1	Co	componente
2	G	General
3	Ens	Enseñar
4	Con	Conocimiento
5	Ac	Actividad
6	Mat	Matemáticas
7	Ctx	Contexto
8	Tri	Trigonometría
9	ET	Ecuación Trigonométrica
10	Ev	Evolución
11	Met	Método
12	Cam	Cambio
13	Cp	Concepción
14	Inf	Influencia
15	Cult	Cultura
16	Cre	Creencias
17	F	Filosofía
18	Tra	Tratamiento
19	Rigu	Rigurosidad
20	Apx	Aproximación
21	Prot	Prototipo
22	Atr	Atributo
23	Rel	Relaciones
24	Concp	Conceptos
25	Sol	Solución
26	Rep	Representación
27	Just	Justificación
28	Apz	Aprendizaje
29	Prq	Prerrequisito
30	Cu	Currículo
31	Sec	Secuencia
32	Metg	Metodología
33	Mtr	Materiales
34	H	Historia
35	Inst	Institucionales
36	Est	Estrategia
37	E	Estudiante
38	Proc	Proceso
39	Cog	Cognitivo
40	Ncs	Necesidad
41	Caract	Características
42	Ins	Instruccionales

43	Top	Tópico
44	Esp	Especifico
45	Trat	Tratamiento

Para las unidades, sub-unidades e indicadores se tiene la siguiente nomenclatura:

<table>
<tr><th>UNIDAD</th><th>SUB-UNIDAD</th><th>INDICADOR</th></tr>
<tr><td rowspan="15">CoMatEns</td><td rowspan="7">ConAcMatG</td><td>CtxTriET</td></tr>
<tr><td>AcTri</td></tr>
<tr><td>EvMetET</td></tr>
<tr><td>CamCpTri</td></tr>
<tr><td>InfCultCreF</td></tr>
<tr><td>CultTraET</td></tr>
<tr><td>RiguApx</td></tr>
<tr><td rowspan="5">ConTopEsp</td><td>AtrET</td></tr>
<tr><td>ProtET</td></tr>
<tr><td>RelConcp</td></tr>
<tr><td>MetSolET</td></tr>
<tr><td>RepET</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ConCuMatDM</td><td>JustApzETEvMat</td></tr>
<tr><td>PrqETRelCu</td></tr>
<tr><td>JustMatCuApzET</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CoEstRepInst</td><td>ConRepInst</td><td>SecMetgET</td></tr>
<tr><td>ConMtrCu</td><td>TratETMtrCu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ConCuMatDD</td><td>SecHCuTri</td></tr>
<tr><td>JustInsEnsET</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CoApzEConMat</td><td>ConProcCogEMat</td><td>NcsApzETCaractCogE</td></tr>
<tr><td>ConEstInst</td><td>EstInsProcApzCamCreCP</td></tr>
</table>

Anexo 12. **Cálculo de sin(3°) con métodos analíticos y algebraicos**

El método consiste en hallar a través de la identidad de diferencia de ángulos el valor del sin 3°, con los ángulos de 18° y 15°, con la identidad

$$sin\,3° = sin(18° - 15°) = sin\,18°\,cos\,15° - sin\,15°\,cos\,18°$$

Se propone la identidad de ángulo doble:

$$\sin 72° = 2\sin 36° \cos 36°$$

Ya que los ángulos de 18° y 72° son complementarios y con la identidad de seno y coseno del ángulo doble, para el ángulo de 36°, se puede reescribir esta expresión como:

$$\cos 18° = 2(2\sin 18° \cos 18°)(\cos^2 18° - \sin^2 18°)$$

Al simplificar, usar operaciones algebraicas y manipular de nuevo identidades trigonométricas se obtiene

$$\cos 18° = (4\sin 18° \cos 18°)(1 - \sin^2 18° - \sin^2 18°)$$
$$1 = (4\sin 18°)(1 - 2\sin^2 18°)$$
$$1 = 4\sin 18° - 8\sin^3 18°$$
$$8\sin^3 18° - 4\sin 18° + 1 = 0$$

Lo que corresponde a resolver la ecuación de tercer grado: $8x^3 - 4x + 1=0$, si se considera como incógnita o como valor desconocido el $\sin 18°$, En este caso utilizaremos el algoritmo de la división sintética para encontrar una factorización del polinomio y las raíces del mismo. Procedemos a buscar los divisores del coeficiente que acompaña a la variable con mayor exponente, y los divisores del termino independiente; es decir los divisores de ocho y uno, div (8) y div(1), y luego relacionar estos divisores mediante un cociente, y así resultan las posibles raíces del polinomio, que posteriormente serán comprobadas.

$$div(8): \{1,2,4,8\}$$

$$div(1): \{1\}$$

Posibles Raíces del Polinomio: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}\right\}$

Aplicando división sintética con raíz $\frac{1}{2}$ se obtiene como solución que $8x^3 - 4x + 1 = (x - \frac{1}{2})(8x^2 + 4x - 2)$, sin embargo, la factorización no está terminada, deben buscarse las dos raíces del polinomio de grado dos, para esto utilizamos la formula general para resolver cuadráticas.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Y así obtener la factorización completa y las raíces del polinomio

$$8x^3 - 4x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right]\right)\left(x - \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right]\right)$$

El $\sin 18°$ no puede ser $\frac{1}{2}$, ya que este corresponde al $\sin 30°$, un resultado conocido por los árabes, por lo tanto, se deduce que el valor que satisface debe ser $\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Conocidos los valores $\sin 18°$ y $\sin 15°$ se puede calcular sin3°, utilizando las relaciones trigonométricas, ya que sin 15° se calcula al aplicar la identidad de ángulo mitad para el sin 30°.

De la identidad trigonométrica para la diferencia de ángulos, expresando el $\sin 3°$ en términos de los ángulos de 18° y 15° se tiene que

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \sin 15° \cos 18°$$

Expresión de la cual solo se tiene el valor correspondiente al $\sin 18°$, por lo cual se debe hacer uso de otras identidades que permitan encontrar los demás valores. Previamente se tiene los valores de las razones de seno y coseno para el ángulo de 30°, así que al hacer uso de la identidad para el ángulo mitad es posible calcular esas identidades, para el ángulo de 15°, como se muestra.

$$\sin 15° = \sin\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Para hallar el $\cos 15°$ el procedimiento es similar, y así se obtiene $\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Para hallar cos 18° utilizamos la identidad, que nos permitirá en un primer momento hallar cos32° y luego por la identidad de ángulo mitad el cos18°

$$2\cos 36° = 2\cos 72° + 1 \ \ (I)$$

Lo cual es equivalente a escribir

$$2\cos 36° = 2(2\cos^2 36° - 1) + 1 \ \ (II)$$

Puesto que por la identidad del ángulo medio se tiene que

$$\cos\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 72°}{2}}$$

$$\cos(36°) = \sqrt{\frac{1+\cos 72°}{2}}$$

$$\cos^2 36° = \frac{1 + \cos 72°}{2}$$

$$2\cos^2 36° = 1 + \cos 72°$$

$$\cos 72° = 2\cos^2 36° - 1$$

Ahora bien, si suponemos $x = \cos 36°$ tenemos que (II) es

$$2x = 2(2x^2 - 1) + 1$$

Que corresponde a la ecuación de segundo grado

$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$

Con el uso reiterado de la formula general de la cuadrática se tiene

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Por lo que se concluye $x = \cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, resultado que junto a la identidad de ángulo medio permite encontrar el $\cos 18°$, como sigue:

$$\cos\left(\frac{36°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 36°}{2}}$$

$$\cos(18°) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}$$

$$\cos(18°) = \sqrt{\frac{\frac{4+1+\sqrt{5}}{4}}{2}}$$

$$\cos(18°) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Con estos datos ya es posible calcular de forma sencilla y con el uso dela identidad de resta de ángulos el $\sin 3°$, al reemplazar cada uno de los valores correspondientes por las razones trigonométricas así:

$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $\cos(18°) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$; $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \sin 15° \cos 18°$$

$$\sin 3° = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\text{-}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)$$

$$\sin 3° = 0{,}052335956$$