ANALISIS DE RESPUESTA ACERCA DE LOS ENFOQUES INTUITIVO, FRECUENCIAL Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO

JOSÉ ALCIDES ROMERO MARTÍNEZ

MÓNICA ANDREA VERGARA CHÁVEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2015

ANALISIS DE RESPUESTA ACERCA DE LOS ENFOQUES INTUITIVO, FRECUENCIAL Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO

JOSÉ ALCIDES ROMERO MARTÍNEZ

MÓNICA ANDREA VERGARA CHÁVEZ

Trabajo de grado para optar al título de Magister en

Docencia de la Matemática

Asesor

FELIPE JORGE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Mg. en Estadística

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2015

Para todos los efectos, declaramos que este trabajo es original y de nuestra autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido de trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **""Análisis de respuesta acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad en un grupo de estudiantes de undécimo grado"** Presentado por los estudiantes:

José Alcides Romero Martinez - 2013185020 - 11443698
Mónica Andrea Vergara Chávez - 2013185026 - 1098611163

Como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 48 Puntos.

Observaciones: Por unanimidad se recomienda otorgar la mención al trabajo como meritoria.

En constancia se firma a los 5 días del mes de marzo de 2015.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

Jurados:

Profesor JUAN CARLOS ÁVILA MAHECHA

Profesora JULIA SANCIJA

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Maestría
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Análisis de respuesta acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad en un grupo de estudiantes de undécimo grado
Autor(es)	Romero Martínez, José Alcides; Vergara Chávez, Mónica Andrea
Director	Fernández Hernández, Felipe Jorge
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 111 páginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas
Palabras Claves	TAXONOMÍA SOLO, INTUITIVO, FRECUENCIAL, CLÁSICO, PROBABILIDAD

2. Descripción

El presente trabajo de profundización propone una exploración de niveles de avance en la estructura de las respuestas de un grupo particular de estudiantes de undécimo grado frente a tareas acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad; para ello, se llevaron a cabo tres momentos: diagnóstico, propuesta de instrucción y evaluativo. Para el diseño de las tareas se tiene en cuenta, los sistemas de representación y el planteamiento de situaciones. En las descripciones se consideran las respuestas de los estudiantes a las pruebas diagnósticas y evaluativas. Los ítems de los cuestionarios se diseñan a partir de algunos ítems liberados de las pruebas saber y de un análisis probabilístico de algunos juegos de un programa de concurso los cuales fueron adaptados para tal fin.

A partir de la estructura conceptual de los enfoques de probabilidad se delimitan las siguientes categorías de análisis: aleatoriedad, espacio muestral, eventos, tablas de frecuencia, interpretación de diagramas de barras, cálculo-comparación de probabilidades y convergencia de las frecuencias relativas; los cuales se relacionan con los niveles de la Taxonomía SOLO – preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional (Biggs & Collis, 1982).

3. Fuentes

- Batanero, C., Ortiz, J. & Serrano, L. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. Suma, 22, 43-50.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación básica. Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática RELIME, 247-263.
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy. New York: Academic Press,Sfard.
- Cañadas, M., & Gómez, P. (2012). Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 del MAD. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, (págs. 1-11). Lleida.
- García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación-problema de probabilidad. Avances de Investigación en Educación Matemática, 6, 5- 23.
- Landín, P. R., & Sánchez, E. (2011). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de

bachillerato frente a tareas de distribución binomial. Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, 12(3).

- Lavalle, A.; Micheli, E.B. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado de matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Revista
- Premisa. Año 5, Número 7, pp. 23-31. Ministerio de Educación nacional [MEN]. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: Corporativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares básicos de Competencias en Matemáticas. Colombia.
- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. España: Universidad de Granada.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J., & Cañizares, J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. Educación Matemática, 10(1), 7-25.
- Way, J. (2003). The development of young children's notions of probability. CERME 3, (págs. 1-8). Italia.

4. Contenidos

El presente trabajo de grado se encuentra organizado en las siguientes capítulos:

En el primer capítulo, titulado *Preliminares*, presenta el marco conceptual, los antecedentes, la justificación, la formulación del problema, los objetivos y la metodología.

En el segundo capítulo, titulado *categorización de los enfoques de probabilidad*, se describen las categorías de análisis, surgidas a partir de la estructura conceptual de los enfoques de probabilidad.

En los capítulos 3 y 5 trata los momentos diagnóstico y evaluativo; allí se describen los ítems diseñados en los instrumentos aplicados en estos momentos los cuales se relacionan con las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad, así como su propósito, y posibles heurísticas y sesgos.

En el capítulo 4 se describen los ítems de la propuesta de instrucción desarrollada en cuatro tareas denominadas “Travesía del Río”, “Laberintos”, “Aparato de Galton” y “Quinielas” además se presenta un reporte de implementación .

El capítulo 6, titulado *tratamiento de la información*, está compuesto por tres apartados: en el primero, se relaciona las categorías de análisis y los enfoques de probabilidad con los ítems de los instrumentos diagnósticos y evaluativos; en el segundo, se presentan descriptores de las categorías de análisis, en cada nivel de la taxonomía SOLO, a partir de las respuestas de los estudiantes en los instrumentos diagnósticos y evaluativos; finalmente, en el tercero, se presenta un informe estadístico descriptivo acerca de la distribución de los niveles de clasificación de las respuestas obtenidas por los estudiantes.

En el capítulo 7 se presenta la caracterización del nivel de avance en la estructura de las respuestas para cada categoría de análisis a partir de los resultados obtenidos en el capítulo tratamiento de la información.

Este el último capítulo se presenta las conclusiones, organizadas en cuatro apartados, respecto a: los objetivos del estudio, al diseño de los instrumentos: diagnóstico y evaluativo, resultados observados en la fase de instrucción y a la categorización de las respuestas.

Finalmente, se presenta *la bibliografía y los anexos* que sustentan el trabajo de grado.

5. Metodología

El presente trabajo es un estudio de tipo cualitativo que pretende describir y categorizar las respuestas

entregadas por un grupo de estudiantes de undécimo grado acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad. En su desarrollo se plantean cuatro momentos:
El primer momento, correspondiente a las pruebas diagnósticas, pretende indagar por las ideas previas de los estudiantes respecto a los enfoques de probabilidad en estudio. Para ello, se diseñan las situaciones, se implementan y analizan las respuestas de las pruebas diagnósticas. El segundo momento, correspondiente al proceso de instrucción, trata el diseño e implementación de la secuencia de tareas que pretende abordar los conceptos básicos probabilísticos a través de la resolución de situaciones. En este momento, se observa las actuaciones de los estudiantes y el profesor durante la realización de las mismas.
El tercer momento, relacionado con la fase evaluativa, contempla el diseño e implementación los cuestionarios evaluativos con el fin de observar los avances en los conceptos básicos de probabilidad de los estudiantes. En el cuarto momento, se da tratamiento a la información a través del análisis de las respuestas de las pruebas diagnósticas y los cuestionarios evaluativos, con el fin de categorizar las respuestas relacionando los niveles de la Taxonomía SOLO con las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad. respaldado por un informe estadístico descriptivo que presenta las tendencias generales del grupo de estudiantes.

6. Conclusiones

En el **enfoque intuitivo**, un estudiante en el *nivel preestructural* asigna probabilidades de manera arbitraria sin tener en cuenta los resultados del experimento; en el *nivel uniestructural* asigna probabilidades, sin realizar cálculos, teniendo en cuenta la información del experimento; en el *nivel multiestructural*, recurre al empleo de estrategias de cálculo (razonamiento proporcional) para determinar el valor de probabilidad; finalmente en el *nivel relacional*, contrasta la distribución de probabilidad obtenida por el enfoque intuitivo con los resultados obtenidos por los enfoques frecuencial y clásico.

En el **enfoque frecuencial**, un estudiante en el *nivel preestructural* muestra dificultad en la lectura de los valores de la tabla de frecuencia, no determina frecuencias al completar tablas, y en un experimento, determina incorrectamente las frecuencias absolutas de los resultados a partir de los registros en tablas de conteo; en el *nivel uniestructural*, completa algunos valores desconocidos de las tablas de frecuencia (el número de observaciones de eventos simples y establece su probabilidad de ocurrencia); en el *nivel multiestructural*, completa todos los valores desconocidos de una tabla de frecuencias y vincula información proveniente de diferentes tablas, establece el número de observaciones en eventos simples como compuestos y obtiene la probabilidad de ocurrencia. Finalmente en el *nivel relacional*, reconoce la convergencia de las frecuencias hacia los resultados obtenidos por la aplicación del enfoque clásico.

En el **enfoque clásico**, un estudiante en el *nivel preestructural* no reconoce el tipo de experimento aleatorio (simple, compuesto) ni determina el espacio muestral; en el *nivel uniestructural* aplica el enfoque clásico únicamente en experimentos simples; en el *nivel multiestructural*, calcula probabilidades en experimentos compuestos a partir de la enumeración de todos los puntos muestrales del experimentos utilizando la Ley de Laplace; por último en el *nivel relacional*, el estudiante cuantifica la probabilidad de eventos en experimentos simples y compuestos a partir de la Ley de Laplace, la regla del producto y la regla de la suma, sin recurrir al listado completo de los puntos muestrales del experimento.

Elaborado por:	Romero Martínez, José Alcides; Vergara Chávez, Mónica Andrea
Revisado por:	Fernández Hernández, Felipe Jorge

Fecha de elaboración del Resumen:	19	02	2015

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTADO DE TABLAS

Pág.

1. PRELIMINARES

1.1. MARCO CONCEPTUAL

En este apartado se presentan los conceptos claves del trabajo de grado, ellos son: Enfoques de probabilidad, heurísticas y sesgos, estructura conceptual, sistemas de representación, situaciones y taxonomía SOLO.

1.1.1. Enfoques de probabilidad

Acerca de los enfoques de probabilidad Gómez & Contreras (2013) afirman: "*La probabilidad, desde su nacimiento ha tenido un doble sentido (Hacking; 1995), como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, dando origen a diferentes definiciones posteriores de probabilidad, que aún coexisten.*" Partiendo del desarrollo histórico de la probabilidad han surgido diversos enfoques, ellos son: Intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (matemático). Sin embargo, en el contexto escolar colombiano (MEN, 2006) los estándares relacionados con el pensamiento aleatorio centran su atención en los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad tal como se muestran en la siguiente tabla.

Nivel Académico	Estándares que deben alcanzar
Al terminar tercer grado	• Explico – desde mi experiencia- la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la del otro.
Al terminar quinto grado	• Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
Al terminar séptimo grado	• Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
Al finalizar noveno grado	• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia).
Al finalizar undécimo grado	• Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad.

Tabla 1. Estándares de probabilidad para undécimo grado (MEN, 2006)

A continuación se presenta la definición de los enfoques de probabilidad tratados en este trabajo.

<u>La probabilidad intuitiva</u> surge de las primeras ideas intuitivas en niños y personas que no han estudiado probabilidades, al usar frases coloquiales para cuantificar sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. Sin embargo, no se precisan dichos argumentos hasta que se asigna un valor numérico para comparar diferentes sucesos. De acuerdo a su naturaleza, la probabilidad es *objetiva* al tratar con la propiedad del suceso y es *subjetiva* como el grado de creencia personal.

<u>La probabilidad Clásica o Laplaciana</u> tiene sus orígenes con los aportes de Pascal y Fermat a los juegos de azar en términos de apuesta equitativa o división de la apuesta. Sin embargo, fue De Moivre quien establece la probabilidad de un suceso en un número finito

de casos *"como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles"* e indica la necesidad de reducir los acontecimientos a cierto número de casos igualmente posibles. Lo anterior muestra un método práctico de calcular probabilidades a sucesos sencillos, pero no muestra la definición de probabilidad. La aplicabilidad de este enfoque se limita a casos finitos y el supuesto de equiprobabilidad no se cumple en la mayoría de las situaciones reales.

La probabilidad frecuencial surgió cuando Bernoulli asignaba probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecían en diversos campos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento. En ese sentido, se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es un valor aproximado. El inconveniente se presenta al nunca obtener el valor exacto de la probabilidad, pues ésta es sólo una estimación.

1.1.2. Intuiciones, Heurísticas y Sesgos

A continuación se describen las heurísticas, sesgos e intuiciones que podrían emplear las personas al momento de enfrentarse con situaciones de incertidumbre.

Intuiciones

La necesidad de tomar decisiones en una realidad regida por las leyes del azar obliga a las personas a recurrir a las intuiciones, consideradas desde la visión de Fishbein como adquisiciones cognitivas que forman parte de la conducta de los individuos al enfrentarse a situaciones de incertidumbre. Este autor distingue dos tipos de intuiciones: Las primarias, surgidas directamente de la experiencia, sin necesidad de ningún proceso de instrucción; y las secundarias, moldeadas por la educación científica, principalmente en el ámbito escolar.

Fishbein (1987) cree que la instrucción puede mejorar las ideas intuitivas acerca de la probabilidad en los estudiantes. Sin embargo, algunos investigadores del campo de la educación estadística insisten que la instrucción en probabilidad no es suficiente para superar los conceptos e intuiciones erróneas; en particular Shaughnessy (1977) concluye que resulta muy difícil sustituir las intuiciones primarias por intuiciones secundarias, o bien el empleo de una heurística por un procedimiento matemático, y Del Mas y Bart (1998) concluyen que la instrucción tradicional no sólo es insuficiente, sino que ésta puede tener efectos negativos en las ideas probabilísticas presentes en los estudiantes.

Heurísticas y Sesgos

Tomando como referente a Tversky y Kahneman (1984), una heurística es un procedimiento basado en la experiencia personal que no garantiza en todos los casos una solución verdadera. Además, es un procedimiento práctico para resolver problemas, siendo de gran utilidad al simplificar las tareas de comparación y cálculo de probabilidades convirtiéndolas en operaciones de juicio y toma de decisiones, que pueden inducir a las personas a emitir conclusiones erróneas. Asociado a las heurísticas se relacionan los conceptos Error y Sesgo, el primero se refiere a todo juicio o valoración que va en

contravía del criterio que se reconoce como válido y el segundo se refiere a la distorsión que afecta al modo en que las personas perciben la realidad.
Indagar acerca de las heurísticas y sesgos en situaciones probabilísticas remite, en primera medida, a las investigaciones de (Díaz, 2003), (Lavalle, Micheli, & Boché, 2003), (Serrano,1996), (Serrano, Batanero, Ortíz, & Cañizares, 1998); estas investigaciones manifiestan que las personas asumen heurísticas al resolver situaciones de incertidumbre, las cuales según (Lavalle, Micheli, & Boché , 2003) se definen como "*estrategias inconscientes en la que se suprime parte de la información del problema*", y según (Serrano, 1996) "*Son procesos mentales que reducen la complejidad del problema de modo que sea accesible al resolutor*". Se resaltan las heurísticas de **representatividad y disponibilidad,** las cuales son ampliamente utilizadas en los juicios probabilísticos investigadas por Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982).

La Heurística de la representatividad, descrita por Kahneman *et al.* (1982) *"consiste en calcular la probabilidad de un suceso con base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene"*. En primer lugar, se prescinde del tamaño de la muestra, y con ello del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. En segundo lugar, supone que cada repetición del experimento, aunque sea limitada, ha de reproducir todas las características de la población. En este sentido, Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982) muestran los sesgos más comunes surgidos de esta heurística, ellos son:

Insensibilidad al tamaño de la muestra
Ley de los pequeños números
Se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, asumiendo que el valor esperado del estadístico de la muestra es el parámetro de la población y no depende del tamaño de la muestra, aunque la varianza de la muestra cambie proporcionalmente a su tamaño y por ende las probabilidades de los sucesos, creyendo en la existencia de una "Ley de los pequeños números", por la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden.. (Díaz, 2003, p. 3) (Serrano, 1996, p. 36)
Descuido del tamaño de la muestra
Según Lavalle, Micheli, & Boché, (2003) Si bien la proporción es la misma, es más probable obtener esa proporción en una muestra pequeña. La comparación de proporciones que lleva al descuido del tamaño de muestra utiliza un razonamiento de tipo proporcional, el cual es mucho más conocido y aplicado por la mayoría de las personas.
Insensibilidad a las probabilidades a priori
Juicios sobre frecuencias
Según Lichtenstein, Slovic, Fischhoff, Layman y Combs (1978), citado por Díaz (2003), las personas tendemos s sobreestimar la ocurrencia de sucesos pocos probables y a subestimar la ocurrencia de sucesos muy probables (Díaz, 2003, p. 6, 7).
Sesgo de la equiprobabilidad
Describe la creencia de los sujetos en asignar igual probabilidad a todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. (Díaz, 2003, p. 7)(Serrano, 1996, p. 38).
Sesgo del enfoque aislado
La investigación de Konold (1989) apunta a que las personas tienen dificultad de interpretar un experimento como parte de una serie de experimentos repetidos. La dificultad para comprender la probabilidad frecuencial -denominado "enfoque en el resultado aislado"- lleva a considerar cada una de las repeticiones de un experimento como si estuviese aislada, sin guardar relación con las anteriores o posteriores. Las preguntas sobre la probabilidad se interpretan de forma no probabilística, donde el fin de las situaciones de incertidumbre no es llegar a la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple (Díaz, 2003, p. 7). Es la dificultad para comprender la replicabilidad de los experimentos. Se confunde la probabilidad de un suceso con la predicción del suceso.

Concepción errónea de las secuencias aleatorias
"Recencia positiva" o "negativa" (Piaget e Inhelder, 1951).
Las personas conciben que secuencias ordenadas no parecen resultados de un proceso aleatorio (Díaz, 2003, p.4) (Serrano, 1996). Ante ello, existe la **Recencia Negativa** más conocida como la "Falacia del Jugador" en la que, en juegos de azar, al observar una serie larga de rojos o negros, algunas personas creen que el color que aparece con menor frecuencia es el que debe salir; si estas personas creen que el color que aparece con mayor frecuencia es el que debe salir entonces se presenta la **Recencia Positiva.** Cohen (1960) encontró que los adultos tienden hacia la Recencia Negativa

Tabla 2. Sesgos relacionados con la Heurística de la Representatividad

La Heurística de la disponibilidad En ocasiones la gente evalúa la probabilidad de un acontecimiento por la facilidad con que puede recuperarse ejemplos de la misma: "*generalmente se evocan con más facilidad ejemplos de clases grandes que ejemplos de categorías menos frecuentes*" (Tversky y Kahneman, 1974). La accesibilidad puede venir dada por la estructura cognitiva de la persona o por factores situacionales. El uso de este heurístico puede encubrir varios errores y está relacionado con la falta de capacidad combinatoria.

Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos
"Una categoría cuyos ejemplos se recuperan fácilmente aparecerá más numerosa que una categoría de igual frecuencia pero cuyos ejemplos sean menos recuperables."
Sesgos en el razonamiento combinatorio
"*Kahneman, Slovic y Tversky (1982) consideran una serie de sesgos que están muy relacionados con la falta de capacidad de enumeración de todas las posibilidades en una operación combinatoria, dentro de lo que ellos denominan heurística de disponibilidad, y que tiene un efecto pernicioso a la hora de calcular la probabilidad de un suceso aleatorio. Los principales sesgos, en este sentido, son debidos a la mayor o menor facilidad para hallar ejemplos, a la efectividad de patrones de búsqueda, mayor o menor facilidad para imaginar casos, etc." Roa (2000)*

Tabla 3. Sesgos relacionados con la Heurística de la Disponibilidad

1.1.3. Estructura Conceptual

La estructura conceptual, como organizador del currículo, permite analizar el contenido de un tema particular de las matemáticas escolares, facilitando su visualización, ya que permite identificar los conceptos que caracterizan el tema así como la forma en que se relacionan entre sí. Cañadas & Gómez (2012) proponen el empleo del mapa conceptual como herramienta para representar la estructura conceptual de un tema matemático, éste se elabora a partir de los diferentes conceptos identificados, representando de manera gráfica las relaciones entre ellos, resaltando que no existe una única manera de elaborarlos, al respecto consideran:

> *"Podemos tener diferentes mapas conceptuales del mismo tema, a pesar de haber partido de un listado de elementos similar. Esto refleja la posibilidad de organizar de distintas formas válidas la información de la que se dispone. Lo importante es recoger los elementos (tanto del campo conceptual como del procedimental) que se consideren más relevantes para el tema y que se establezcan las relaciones entre ellos de forma adecuada." (p. 10).*

A continuación se propone un mapa conceptual acerca de la temática de probabilidad tratada en el presente estudio, los conceptos resaltados en el mapa corresponden a las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad descritas en el capítulo 2. Los conceptos Cálculo de Probabilidades, Espacio Muestral, Regla de la Suma, Regla del Producto y Convergencia Estocástica fueron tomados de las siguientes ideas estocásticas planteadas por (Heitele,1975) : "*medida de probabilidad*", "*espacio muestral*", "*regla de la adición*", "*regla del producto*" y "*ley de los grandes números*" respectivamente.

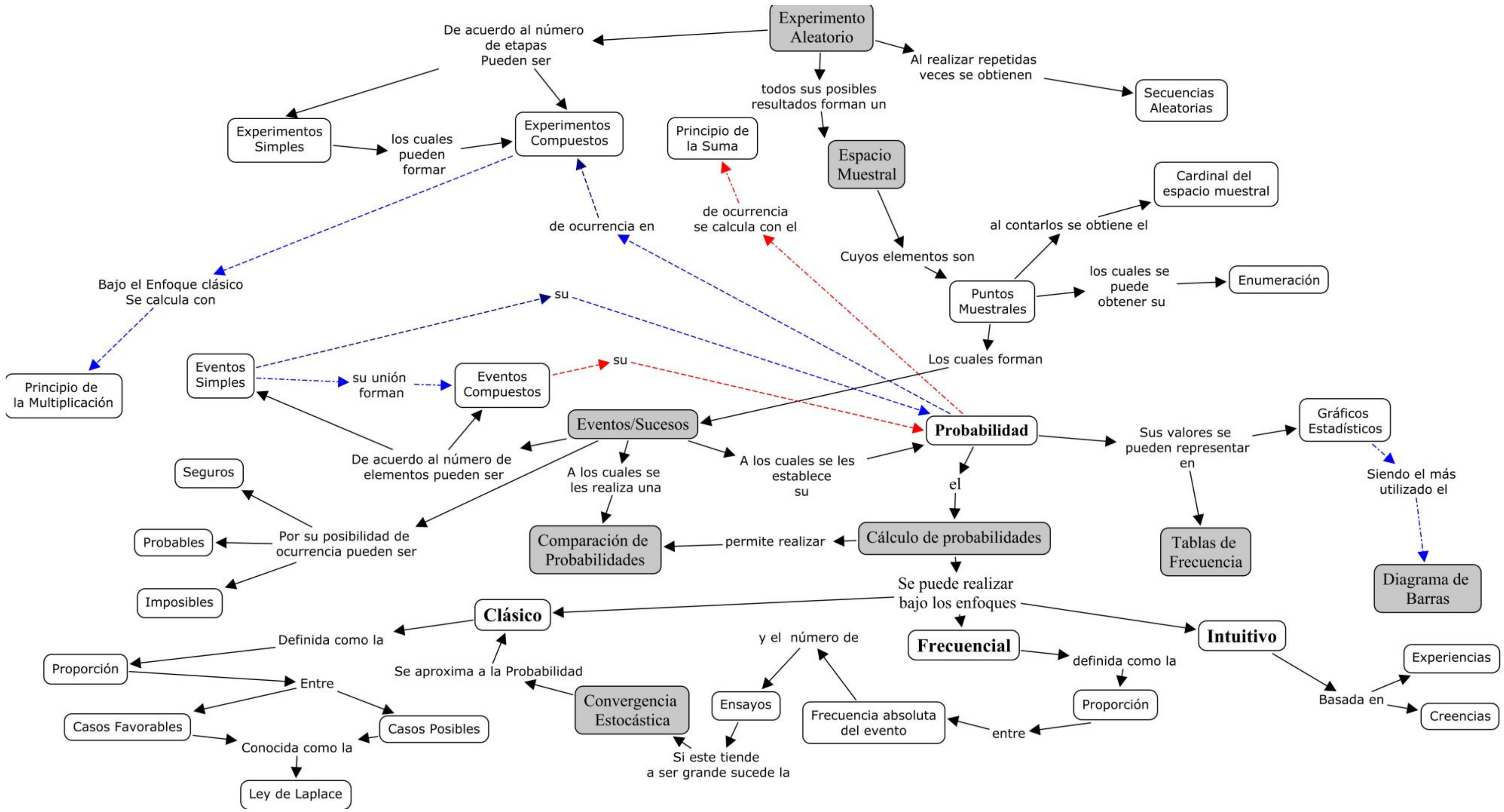


Ilustración 1. Mapa Conceptual de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad

1.1.4. Sistemas de Representación

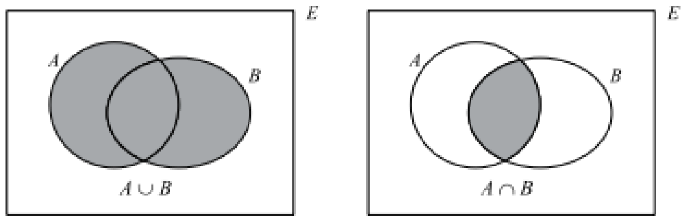
Los sistemas de representación, como organizador del currículo, permiten identificar las representaciones asociadas a un tema matemático específico. Además, (Cañadas & Gómez, 2012, p. 4), manifiestan que los sistemas de representación permiten *"identificar los modos en que el concepto se presenta"*. Algunos sistemas de representación [1] identificados para los enfoques de probabilidad en estudio son:

• *Sistema de representación verbal:* A través del uso del lenguaje oral y escrito para enunciar las situaciones problema.
• *Sistema de representación simbólico:* Por medio del empleo de las fórmulas para el cálculo de las probabilidades, regla de la suma, regla del producto, ley de Laplace.
• *Sistema de representación numérico:* los números en representación decimal, porcentual y racional representan los valores numéricos de las probabilidades de los sucesos.
• *Sistema de representación tabular:* Empleo de tablas de frecuencias para presentar las distribuciones de probabilidad.
• *Sistema de representación gráfico:* Empleo de árboles de probabilidad, tabulares e icónicos para representar experimentos compuestos.
• *Sistema de representación manipulativo:* A través de materiales concretos (ábacos probabilísticos, dados, urnas) y el empleo de software Geogebra, Descartes y de aplicaciones como la hoja de cálculo Excel, para realizar las simulaciones de diferentes experimentos aleatorios para el cálculo de las probabilidades frecuenciales con un número representativo de corridas).

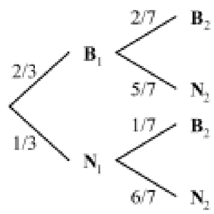
En la siguiente tabla se muestra algunos sistemas de representación identificados por los autores del presente trabajo.

SISTEMA	**EJEMPLOS**
Numérico	• Representación en forma decimal, porcentual y fraccionaria de la probabilidad
Simbólico	• Empleo de la notación de conjuntos para representar sucesos. • Notación de la probabilidad clásica $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{N} M = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)},$ • Notación de la probabilidad Frecuencial $f_a(A) = n_A \qquad f_r(A) = \frac{n_A}{n}$ $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$
Tabular	• Tablas de Frecuencia • Tablas de registro resultados experimento
Gráfico	• Diagramas de Venn para representar sucesos

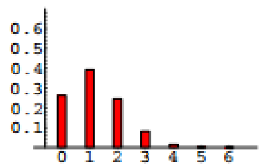
[1] Kaput (1992) considera un sistema de representación como "un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)"

<table>
<tr><td></td><td>


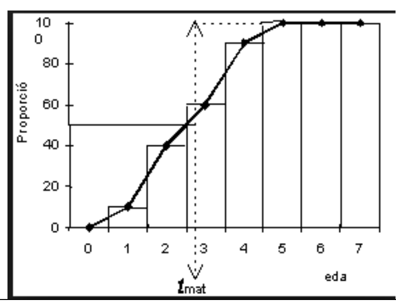
- Diagrama de Árbol (representación gráfica que muestra los resultados posibles de una serie de experimentos y sus respectivas probabilidades.)

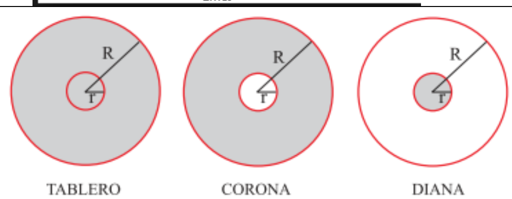


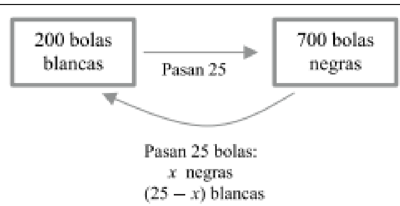
- Histograma – Diagrama de Barras Distribución de Probabilidad



- Ojiva. Representación gráfica de la distribución acumulada de la probabilidad.



</td></tr>
<tr><td>Geométrico</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Pictórico</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>

- Enunciados verbales de los problemas
- Argumentaciones
- Interpretaciones de las respuestas
</td></tr>
<tr><td>Manipulativo</td><td>

- Juegos de mesa
- Urnas, ruletas
</td></tr>
</table>

	• Cartas, dados, monedas, fichas • Juegos de casino, bingo.
Ejecutable	• Hojas de Cálculo (Excel) Applets, Geogebra,Descartes • Aplicaciones (Labazar-Probability Explorer) • Biblioteca Nacional de Manipulativos Virtuales http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_2_t_5.html

Tabla 4. Ejemplos de Sistemas de representación a los enfoques de probabilidad

1.1.5. Situaciones

(Rico, 2005) define Situación como "*la parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea"*. resaltando la conexión existente entre las matemáticas y la realidad de los ciudadanos.

> *"En sus relaciones con el mundo natural y social y en su vida cotidiana, los ciudadanos se enfrentan normalmente a situaciones en las que hacen planes y organizan su tiempo, presupuestan y compran, viajan, hacen estimaciones, cocinan y se alimentan, optimizan sus recursos y gestionan sus finanzas personales, abordan problemas técnicos, juzgan cuestiones políticas, toman decisiones en las que utilizan el razonamiento cuantitativo o espacial u otras nociones matemáticas y ayudan a clarificar, formular y resolver múltiples problemas " (p. 3)*

Respaldados en la anterior afirmación se tiene que el diseño de tareas[2] tanto evaluativas como de instrucción, deben estar enmarcadas en situaciones. En el proceso de instrucción, las situaciones permiten a los estudiantes dar sentido al concepto matemático tratado. Además las pruebas PISA consideran cuatro tipos de situaciones ellas son: personales, educativas y ocupacionales, públicas y científicas, las cuales se describen en la siguiente tabla.

	Tipo de Situaciones			
	Personales	**Educativas, ocupacionales o laborales**	**Públicas**	**Científicas**
Concepto	Son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema	Son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen al alumno una tarea que le impone una actividad matemática para encontrar su respuesta	Se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública	Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático

Tabla 5. Tipos de situaciones según PISA (OECD, 2004)

---

[2] Marín (2010) define tarea como "*una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje*".

Las situaciones se implementan en la prueba de razonamiento cuantitativo Saber 11 (ICFES 2013) a través de situaciones de la vida cotidiana del estudiante, las cuales se clasifican en Sociales, Financieras, Ocupacionales y De divulgación científica. En la siguiente tabla se presenta el concepto y ejemplos de cada tipo de situación.

Tipos de Situaciones				
	Financieras	**De divulgación científica**	**Sociales**	**Ocupacionales**
Concepto	Involucran el manejo de cifras relacionadas con dinero	Involucran información o resultados de tipo científico que son de interés general y no requieren de un conocimiento disciplinar avanzado	Involucran situaciones que enfrenta un individuo en su calidad de ciudadano	Involucran actividades propias de un oficio determinado, que no requieran para su realización de conocimientos técnicos específicos
Ejemplos	Flujos de caja, rentabilidad, rendimientos financieros, programas de ahorro, créditos, intereses, evaluación de riesgos y conversión de monedas	Fenómenos Ambientales, climáticos, astronómicos, de salud, dinámicas de poblaciones, desarrollos tecnológicos, telecomunicaciones e informática.	Resultados electorales, impacto de programas políticos, indicadores económicos, flujos demográficos y eventos culturales.	Situaciones propias del ámbito escolar o universitario.

Tabla 6. Tipos de situaciones que aparecen de la prueba de Razonamiento Cuantitativo (ICFES, 2013)

En la siguiente tabla se presentan algunos ejemplos de fenómenos aleatorios, identificados por los autores del presente trabajo, relacionados con los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de probabilidad y a los tipos de situaciones propuestos en el estudio PISA. Se aclara que la asignación de los fenómenos a situaciones no es única.

Ítem	Fenómenos aleatorios	Enfoques de Probabilidad			Tipo de Situación			
		Intuitiva	**Clásica**	**Frecuencial**	**Personal**	**Educativa-Laboral**	**Pública**	**Científica**
1	Lanzamiento de Dados Diferencia entre los resultados de los dados (6 simples, 6 dobles)	X	X	X	X			
2	Extracción de balotas en una urna	X	X	X	X			
3	Lanzamiento de Monedas	X	X	X	X			
4	Juego de Lotería	X	X	X			X	
5	Fumadores en una población determinada.	X	X	X			X	
6	Control de Calidad en una industria La cantidad de errores de mecanografía por página en un libro determinado.	X	X	X		X		
7	Pronóstico de datos meteorológicos	X		X				X
8	Sistemas de Líneas de Espera • La cantidad de llamadas telefónicas a un conmutador en un intervalo de 5 minutos. • La cantidad de carros que llegan a un estacionamiento en una hora determinada. • El número de partículas que pasan a través de un contador en un milisegundo. • Llegadas de clientes a una tienda durante un intervalo de tiempo determinado.	X	X	X		X		
9	Comportamiento de las acciones de una empresa en la bolsa de valores	X		X		X		
10	Juegos de un programa de concurso	X	X	X	X			
11	Genética (Leyes de Mendel)	X	X	X				X
12	Toma de decisiones en una empresa	X		X		X		
13	Acertar un examen con preguntas de selección múltiple sin haber estudiado	X	X	X	X			
14	Diagnóstico de enfermedades	X		X			X	X
15	Sondeos de Opinión	X		X		X	X	
16	Análisis de Accidentalidad	X		X			X	
17	Análisis de Mercadeo	X		X			X	
18	Análisis de riesgo en Pólizas de Seguros	X		X		X		
19	Experimentación con animales	X		X				X
20	Experimentos Psicológicos Estudio Monster (1939), little Albert (1920), el experimento de la prisión de Stanford (1971), experimento con drogas y monos en 1969, landis de las expresiones faciales en 1924, indefensión aprendida (1965),	X		X				X

	experimento de Milgram (1974), pozo de la desesperación (1960)							
21	Análisis de la efectividad de un medicamento o tratamiento para curar una enfermedad	X		X				X
22	Apuestas en juegos (Hipódromo)	X		X	X			
23	Elecciones Presidenciales	X	X	X			X	
24	Inseguridad en una región, ciudad o país	X		X			X	
25	Análisis de Plagas y Enfermedades Cantidad de árboles infectados por ciertos gusanos en un área determinada.	X		X				X
26	Rating de un programa en Radio o Televisión	X	X	X			X	
27	Ganancias obtenidas por la venta de un producto cuya demanda es incierta	X		X		X		
28	Análisis de confiabilidad de una máquina	X		X		X		
29	Duración de un proyecto o actividad	X		X		X		
30	Comportamiento de costos de una empresa	X		X		X		
31	Características físicas de las personas (Estatura, peso)			X	X			
32	Características Físicas de un producto			X		X		
33	Tiempos de producción en una empresa			X		X		
34	Análisis de Paradojas División de las apuestas, Simpson, Condorcet, San Petesburgo La paradoja del cumpleaños, El problema de Monty Hall	X		X		X		
35	Análisis de Problemas históricos de Probabilidad El problema de los dados del caballero de Méré La ruina del jugador Ley de benford La apuesta de Pascal El método d'Hondt MARTINGALAS MÉTODO DE MONTECARLO	X		X		X		
36	Juego la carrera	X	X	X		X		
37	Monedas cargadas	X	X	X	X			
38	Ruletas	X	X	X			X	
38	Tiro al Blanco	X	X	X	X			
40	Análisis de las características de una población (Sexo, estrato, edad)	X		X			X	
41	Análisis de Juegos de Mesa Cazapalabras, dominó, parqués	X	X	X	X			
42	Problemas de probabilidad geométrica J. Arbuthnot (1667–1735), Paradoja de Bertrand La Aguja de Buffon, dados poliédricos	X	X	X				X
43.	Sorteos aleatorios, viaje a la nieve, paseos aleatorios	X	X	X	X			

Tabla 7. Relación de fenómenos aleatorios con los enfoques de probabilidad y los tipos de situación según PISA.

1.1.6. Taxonomía SOLO

La taxonomía SOLO (acrónimo de Structure of the Observed Learning Outcome) es un sistema de categorías planteado por (Biggs y Collis, 1982, 1991) que analiza la estructura de las respuestas de un concepto o determinada tarea, a partir de la cantidad de aspectos relevantes de las respuestas y cómo éstos se integran.

Watson (2006, p. 13) citado por García, Medina y Sánchez (2014) define la taxonomía SOLO como *"un instrumento para clasificar las respuestas de los estudiantes a alguna tarea; enfatiza lo que es observado en dichas respuestas y no en lo que el observador cree que los estudiantes pudieran haber entendido"*.

Este sistema está conformado por cinco niveles que se presentan de manera progresiva.

En el <u>nivel preestructural</u>, las respuestas son erróneas o inexistentes, se evidencia un total desconocimiento del concepto por parte del estudiante.

En el <u>nivel uniestructural</u>, las respuestas dadas, a pesar a ser ciertas, sólo se centran en un determinado aspecto que, por otro lado, no tiene por qué ser relevante.

En el <u>nivel multiestructural</u>, el estudiante es capaz de enumerar una serie de aspectos correctos de manera aislada. Además, se muestra un conocimiento parcial de algunos aspectos del concepto, pero no los aborda en conjunto.

En el <u>nivel relacional</u>, el estudiante identifica varios aspectos correctos y es capaz de relacionarlos entre sí, en este nivel todas las partes relevantes e importantes se conjugan en un conjunto coherente.

En el <u>nivel abstracción expandida</u>, el nivel más complejo, el estudiante es capaz de ir más allá de lo preguntado relacionando su respuesta con otros sistemas ajenos a la tarea.

Teniendo en cuenta la anterior descripción de los niveles de la taxonomía SOLO, los niveles elevados corresponden a una interpretación personal del contenido que relaciona la tarea con situaciones alejadas del contexto inmediato, estableciendo relaciones con otros conocimientos relevantes y con materiales procedentes de diferentes fuentes de información; mientras que los niveles inferiores corresponden al tratamiento de la información de manera aislada y reproductiva.

El siguiente gráfico muestra la evolución de los niveles en la Taxonomía SOLO, donde el eje horizontal corresponden progresivamente a los niveles preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracción expandida, junto con algunos verbos que indican algunas acciones características en cada uno de ellos. Además cada uno de los niveles se representa con un ícono que muestra la cantidad de aspectos tratados de la tarea y la manera como están relacionados.

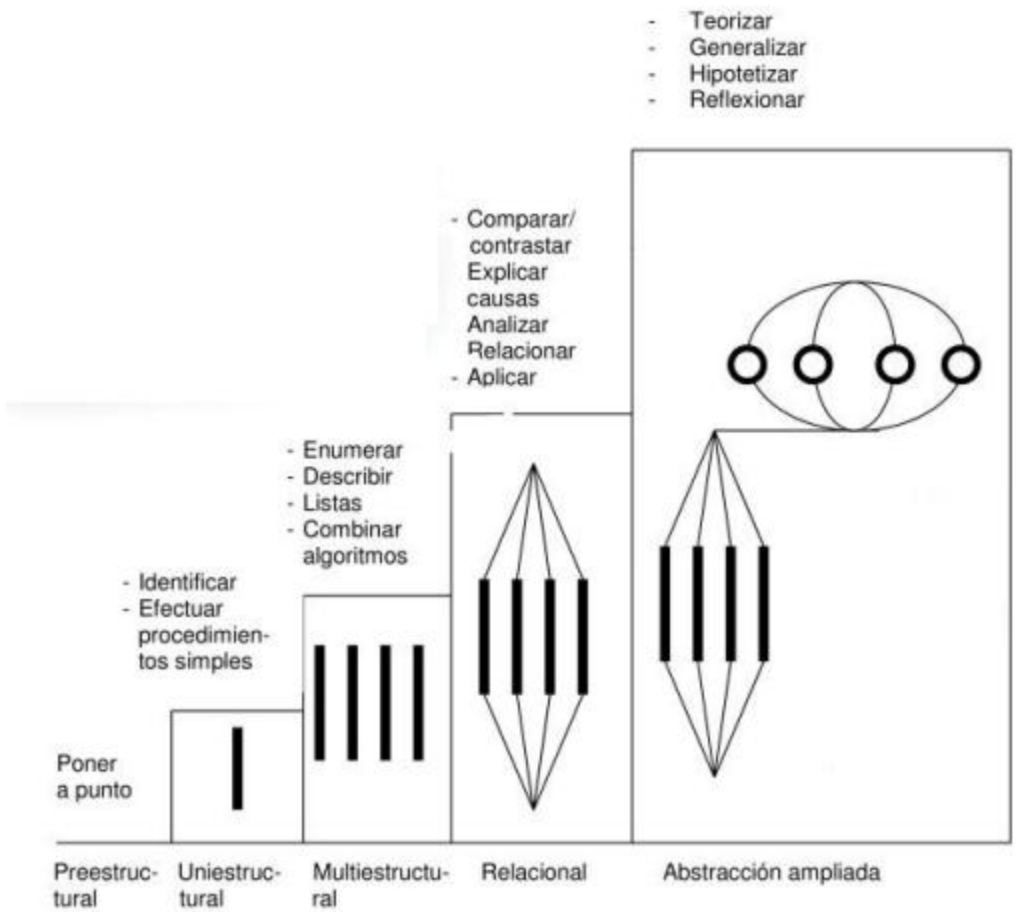


Ilustración 2. Niveles en la Taxonomía SOLO, tomado y traducido de Biggs (1999).

1.2. ANTECEDENTES

En este apartado se citan algunos trabajos de investigación en el campo de la probabilidad escolar relacionados con la temática tratada en este estudio. Se tiene como referente las ideas de Serrano (1996), Way (2003) y Landín & Sánchez, (2011) las cuales se detallan a continuación.

Serrano (1996), en su trabajo, analiza las respuestas de los estudiantes acerca de temáticas de probabilidad observando dificultades como el uso de heurísticas, la existencia de sesgos en la asignación de probabilidades a los sucesos, la falta de apreciación de características básicas de las secuencias aleatorias y la interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial.

A raíz de las dificultades mencionadas, Serrano (1996) propone situaciones problemas con enfoque frecuencial de la probabilidad en diferentes contextos; utiliza la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, el registro de los resultados obtenidos y el estudio de las propiedades de las frecuencias relativas de los sucesos asociados a los experimentos reales o simulados. Así mismo, hace un contraste del enfoque frecuencial con el clásico de la probabilidad e identifica dificultades como: el empleo de heurísticas incorrectas y la aplicación inadecuada de propiedades. Finalmente, hace una categorización de las actuaciones de los estudiantes frente a las situaciones planteadas y contrasta las acciones consideradas válidas desde el punto de vista probabilístico.

Way (2003) manifiesta que la evolución de las nociones de probabilidad está relacionado con el desarrollo cognitivo del niño, iniciando con juicios matemáticos en situaciones que involucre el azar. Para realizar la categorización, las respuestas de los estudiantes a las tareas se clasificaron acorde a características comunes para establecer las etapas de evolución en el pensamiento probabilístico, ellas son: pensamiento no probabilístico, pensamiento probabilístico emergente, y cuantificación de la probabilidad. En la tabla 3 se detallan las características comunes en cada etapa.

ETAPA	CARACTERÍSTICAS
No Probabilístico	• Se observa entendimiento mínimo de aleatoriedad. • Existe dependencia de la comparación visual. • Existe la incapacidad para ordenar probabilidades. • No hay clara conexión entre la estructura del espacio muestral simple y la probabilidad de eventos particulares. • Las razones para justificar su elección son inapropiadas.
Probabilístico Emergente	• Reconocimiento de la estructura de un espacio muestral simple. • Ordenación de la probabilidad a través de la comparación visual o estimación numérica. • Estrategias de adición y sustracción usando comparaciones. • Se observa conceptos de igualdad de probabilidades e imposibilidad. • Exhiben reconocimiento de aleatoriedad y su relación con la probabilidad. • Reconocimiento de la composición del espacio muestral en forma inconsistente para probar las razones de las decisiones tomadas. • Comienza a manipular números para soportar juicios probabilísticos
Cuantificación de la Probabilidad.	• Comparación numérica • Cuantificación de la probabilidad emergente o presente • Pensamiento proporcional • Vinculación entre el espacio muestral y la probabilidad

Tabla 8. Etapas del Pensamiento Aleatorio según Way (2003)

Landín & Sánchez, (2011) describen la función de distribución binomial e investiga sobre la influencia de sesgos en su uso; para ello, diseña y aplica un cuestionario de ocho preguntas. A partir de la clasificación de las respuestas al cuestionario, realiza una jerarquización de cinco niveles siguiendo el modelo de la Taxonomía SOLO. A continuación se presenta la descripción de los niveles propuestos por Landín & Sánchez, (2011) para la distribución binomial.

NIVEL	DESCRIPCIÓN
Nivel 1	Las respuestas son influenciadas por los sesgos sin coherencia o con grandes errores (representatividad, linealidad, suposición incorrecta de equiprobabilidad).
Nivel 2	Las respuestas están basadas en una descripción del espacio muestral, posiblemente incompleto, y

	el uso de la definición clásica de probabilidad. Se puede usar la regla del producto pero con errores u omisión de cálculos. Calcula el número de combinaciones a partir de listas o usa la fórmula pero con omisión de cálculos
Nivel 3	Las respuestas correctas están caracterizadas por el uso de la definición clásica de probabilidad o procedimientos combinatorios, en cualquier caso respaldados por diagramas de árbol. Se puede usar la regla del producto para obtener respuestas parciales y correctas. El número de combinaciones se puede obtener mediante el Triángulo de Pascal; también la fórmula de los coeficientes binomiales puede ser usada con cálculos incorrectos. La fórmula de probabilidad binomial se usa con omisión de cálculos.
Nivel 4	Las respuestas correctas son caracterizadas por el uso de la regla del producto y procedimientos combinatorios, acompañados o no por diagramas de árbol. La fórmula de combinaciones es usada para calcular, al menos parcialmente, coeficientes binomiales. El uso de la fórmula de probabilidad binomial puede generar respuestas con algunos errores de cálculo o respuestas parciales y correctas.
Nivel 5	El uso correcto de la fórmula de la distribución binomial es mostrado en este nivel. Los valores de los parámetros (n, p, k) son identificados, sustituidos en la fórmula y los cálculos son bien hechos.

Tabla 9. Niveles de razonamiento para la distribución binomial según Ladín (2013)

De igual forma, los estudios de García, Medina y Sánchez (2014) muestran la aplicabilidad de la taxonomía SOLO para analizar las respuestas de los estudiantes y realizar una clasificación de los conceptos de variable aleatoria, distribución de probabilidad respectivamente. Además, Ruiz (2006) realiza una clasificación de las respuestas sobre las nociones básicas de probabilidad a estudiantes universitarios utilizando la taxonomía SOLO.

Observaciones acerca de los antecedentes a tener en cuenta en el estudio.

De acuerdo a los antecedentes anteriormente descritos, se identifican diversas dificultades e ideas importantes que soportan el presente estudio:

Los estudiantes recurren al uso de heurísticas y sesgos al asignar probabilidades a los sucesos, aun llevando a cabo procesos de instrucción persiste el sesgo de equiprobabilidad y la interpretación incorrecta de enunciados probabilísticos en términos frecuenciales (Serrano, 1996).

La evolución de las nociones de probabilidad están acordes al desarrollo cognitivo del niños (Way, 2003) a través del paso de la etapa no probabilística, probabilística emergentes hasta llegar a la cuantificación de la probabilidad.

Landín & Sánchez, (2011), a través de la descripción de los niveles de razonamiento bajo la taxonomía SOLO sobre problemas binomiales, concluyen que las respuestas de los estudiantes son influenciadas, en principio, por sesgos hasta llegar al uso correcto de la formalización de la probabilidad.

Las etapas de evolución (Way, 2003) y los niveles de razonamiento de la taxonomía SOLO asumido por (Ladín, 2013) pueden no llevarse a cabo en su totalidad en las personas. Los autores manifiestan que la instrucción favorece el paso a un nivel o etapa superior.

La experimentación y la simulación de los experimentos aleatorios favorece la visualización de las propiedades de las frecuencias relativas (Serrano, 1996), en especial, la asociada a la convergencia de las frecuencias para establecer el valor aproximado de la probabilidad al realizar el experimentos gran cantidad de veces.

1.3. JUSTIFICACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este apartado se presenta el panorama del estudio enmarcado en el ámbito de la educación estadística, junto con las razones consideradas para justificar la temática escogida, para llegar finalmente a la pregunta de indagación que guía su desarrollo.

El concepto de probabilidad se ha construido a lo largo de la historia y en esta evolución se han desarrollado diferentes enfoques (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) para abordarlo. Desde el ámbito escolar, Batanero (2005) analiza estos enfoques y la manera como éstos han sido tratados en la enseñanza secundaria.

Kahneman y Tversky (1982), a través de sus trabajos de investigación sobre heurísticas y sesgos en situaciones probabilísticas, analizan la manera como las personas emiten juicios y toman decisiones. Dichos estudios, Batanero (2005) los aborda con temas de probabilidad tratados en la escuela.

Así mismo, Shaughnessy (1977), DelMas y Bart (1998) y Konold (1989) analizan el efecto de la instrucción en relación a las heurísticas y sesgos presentes en estudiantes. A partir de los estudios anteriores, Batanero, Ortiz, & Serrano (1996) presentan un trabajo acerca de la interpretación de enunciados probabilísticos desde el punto de vista frecuencial por parte de un grupo de alumnos de bachillerato.

Por otro lado, Biggs & Collins (1982) desarrollan la Taxonomía SOLO como estructura de clasificación de respuestas que ha servido de referencia en investigaciones para categorizar las respuestas de los estudiantes, en diferentes niveles educativos y para diversas temáticas. Con respecto a la probabilidad se destacan los trabajos de autores como Jones, et al. (1997), Ladín (2013), Ruíz (2006) y García, Medina, & Sánchez (2014).

En relación a la normatividad educativa colombiana; los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 1998, 2006), establecen que los estudiantes, al culminar la educación media, deben poseer competencias en la interpretación y cálculo de probabilidades, así como en el manejo de sus conceptos básicos. Esta situación implica la necesidad de propiciar el pensamiento aleatorio y sistemas de datos en los planes de estudios del área de matemáticas, a través de la resolución de problemas de incertidumbre, que lleven a los estudiantes a adquirir destrezas y habilidades en este tipo particular de pensamiento. Adicionalmente el (MEN, 2006) plantea: *"ser matemáticamente competente*[3] *requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de*

[3] L1inares (2003) presenta la siguiente definición de competencia matemática: "*Ser competente matemáticamente debe relacionarse con ser capaz de realizar determinadas tareas matemáticas y*

cada uno de esos procesos generales[4]*, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia"(pg. 56),* lo cual lleva a justificar el análisis de las respuestas a través de un sistema de categorías, en particular con la taxonomía SOLO, de acuerdo a unos niveles de competencia los cuales inician con el desconocimiento total de la tarea hasta un nivel de experto.

El análisis de las respuestas a las tareas probabilísticas permite identificar estrategias intuitivas empleadas por los estudiantes, las cuales son el punto de partida para el diseño de propuestas de instrucción que permitan superar sesgos e ideas erróneas acerca de la probabilidad. Por tal razón, este trabajo pretende realizar dicho análisis en un grupo particular de estudiantes de la Institución Educativa General Carlos Albán, en la cual la enseñanza de los conceptos estocásticos se trata en la asignatura de estadística en grado undécimo, de tal manera que el grupo analizado de estudiantes tiene un acercamiento a esta temática únicamente hasta ese grado.

A partir de las anteriores consideraciones, se destacan algunas razones que muestran la pertinencia de tratar los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad en este estudio:

- Teniendo presente que los estudiantes analizados en este trabajo no han recibido instrucción previa en temas de probabilidad; la estimación de probabilidades a partir de sus creencias y opiniones son la base para conocer la manera como los estudiantes abordan el enfoque intuitivo.
- La observación y recopilación de datos obtenidos con la experimentación directa de material concreto o de simuladores por computador, constituyen el escenario para indagar las ideas que poseen los estudiantes en relación al enfoque frecuencial, teniendo presente que los estudiantes no han recibido instrucción sobre análisis combinatorio.
- Finalmente, a partir del enfoque clásico se indagan algunos conceptos de la teoría de la probabilidad (Ley de Laplace, Principios de la multiplicación y de la Suma), iniciando con los experimentos aleatorios simples y posteriormente en experimentos compuestos.
- Al realizar una lectura de los estándares (MEN, 2006) relacionados con la probabilidad se observa que éstos se relacionan principalmente con los tres enfoques a tratar en el estudio; mientras que los enfoques subjetivista y axiomático normalmente son tratados en el ámbito universitario.

---

comprender por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas, así como la posibilidad de argumentar la conveniencia de su uso".

[4] Los cinco procesos generales contemplados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Teniendo en cuenta el anterior panorama, se plantea la siguiente pregunta de indagación *¿Cómo es la evolución de las respuestas reportadas por un grupo particular de estudiantes, de grado undécimo, al resolver tareas que involucran los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad?*

1.4. OBJETIVOS

El presente trabajo de grado plantea un objetivo general junto los objetivos específicos que contribuyen a su logro. A continuación se describen dichos objetivos:

1.4.1. Objetivo General

Descubrir aspectos que caractericen el avance en la estructura de las respuestas a tareas que involucren los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad, por parte de un grupo de estudiantes de undécimo grado.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Describir las ideas previas de los estudiantes sobre los enfoques de probabilidad, a la luz del diseño e implementación de tareas diagnósticas.

- Diseñar e implementar tareas dirigidas a la enseñanza de la probabilidad bajo los enfoques tratados en este estudio.

- Explorar la interpretación de los estudiantes acerca del concepto de probabilidad bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico, posterior a un proceso de instrucción.

- Caracterizar las respuestas a la luz de las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad y los niveles de la Taxonomía SOLO, dando cuenta de su evolución entre los momentos diagnóstico y evaluativo.

1.5. METODOLOGIA

La metodología del trabajo de grado trata aspectos como: El tipo de metodología, la descripción del caso, los instrumentos y el procedimiento de aplicación y análisis de los datos.

1.5.1. Tipo de metodología

El estudio tiene un carácter cualitativo que pretende interpretar las respuestas de un grupo particular de estudiantes en relación al concepto de probabilidad bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico; con el fin de explorar las interpretaciones y justificaciones que ellos realizan a tareas probabilísticas.

Stake (1998) define estudio de caso como "*el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas*". Asimismo Stake (1994) y Walker (1983) afirman que en el estudio de caso se analizan unos incidentes y hechos específicos y que la recolección selectiva de información permite captar y reflejar los elementos de una situación que le dan significado.

Stake (1998) identifica diferentes modalidades de los estudios de casos, entre ellas el estudio intrínseco de casos, su propósito es alcanzar la mayor compresión del caso en sí mismo sin pretender generar teorías ni generalizar sus conclusiones; además, no busca establecer la posible relación del caso analizado con otros casos o con otros problemas generales.

Por lo descrito anteriormente, y atendiendo a la pregunta de indagación y a los objetivos formulados, este trabajo de grado se desarrolla como un estudio intrínseco de caso, asumiendo como caso un grupo particular de estudiantes de undécimo grado, el cual no pretende ser un prototipo representativo ya que los resultados obtenidos no son aplicables a otros grupos de estudiantes de undécimo grado.

A continuación se mencionan algunas razones adicionales por las cuales se escoge estudio de caso como metodología de investigación en este trabajo de grado:

- El trabajo de grado no busca indagar la incidencia del proceso de instrucción en el avance del nivel de las respuestas.
- El estudio no pretende probar hipótesis relativas al proceso de instrucción.
- La taxonomía SOLO se emplea como referente para categorizar aspectos comunes detectados en las respuestas de los estudiantes en niveles de progreso, en lugar de ser utilizada para establecer el desempeño del grupo de estudiantes.

1.5.2. Contexto de los participantes

Esta sección contempla los siguientes aspectos: información de la institución educativa, contexto socioeconómico de los participantes y disponibilidad de recursos en la institución.

Información de la Institución Educativa

Nombre: Institución Educativa Departamental General Carlos Albán
Dirección: Calle 3 No. 2-15 Albán Cundinamarca *Teléfono:* (091)8469274
Código DANE: 12501900386 *NIT:* 899999177-4 *Barrio:* Centro
Sector: Urbano *Planta Física:* Departamental.
Jornadas: Mañana, Nocturna. Calendario A.
Género de Población Atendida: Mixta.
Niveles de Enseñanza ofrecido: Educación Preescolar: Grado Transición.
Educación Básica Primaria: Grados primero a quinto.
Educación Básica Secundaria: Grados sexto a noveno.
Educación Media Técnica: Grados décimo y undécimo.
Opciones Educativas que Ofrece la Institución: Bachillerato Técnico con especialidad en Comercio y Gestión Empresarial. Certificación del SENA para los estudiantes del grado once en Técnico en Documentación y Registros Contables.

Contexto Socioeconómico de los participantes

Los estudiantes participantes cursaron undécimo grado en la Institución Educativa Departamental General Carlos Albán, con edades comprendidas entre 15 a 18 años, los cuales no habían recibido instrucción previa en temas de probabilidad.

Las características generales de los estudiantes, respecto al contexto socioeconómico son:

- El grupo de estudiantes analizados pertenecen a los estratos 1 y 2 principalmente; la mayoría de estos viven en la cabecera municipal, los demás provienen de las diferentes veredas del municipio.
- Gran parte de los acudientes son personas con un nivel educativo bajo.
- Una minoría de estos estudiantes decide continuar estudios universitarios, en contraste con la mayoría los cuales suelen integrarse al mercado laboral en ciudades cercanas de mayor tamaño como Villeta y Facatativá en empleos no calificados.

Disponibilidad de recursos en la institución

Con respecto a la planta física cuenta con un edificio construido hace 10 años, siendo el promedio de estudiantes por aula de 30 estudiantes. Los recursos tecnológicos son suministrados por la Secretaría de Educación de Cundinamarca de tal manera que posee dos salas de informática con cerca de 80 computadores portátiles con acceso a internet y 3 proyectores de reciente fabricación.

1.5.3. Instrumentos

Tres pruebas diagnósticas, cuatro tareas de instrucción y cuatro cuestionarios evaluativos. Los ítems de las pruebas diagnósticas y los cuestionarios evaluativos consisten en preguntas de respuesta abierta, las cuales son apoyadas con las justificaciones elaboradas por los estudiantes.

1.5.4. Procedimiento de aplicación y de análisis de datos

El desarrollo de este estudio se plantea en cuatro momentos:

El primer momento, correspondiente a las pruebas diagnósticas, pretende indagar por las ideas previas de los estudiantes respecto a los enfoques de probabilidad en estudio. Para ello, se diseñan las situaciones, se implementan y analizan las respuestas de las pruebas diagnósticas.

El segundo momento, correspondiente al proceso de instrucción, trata el diseño e implementación de la secuencia de tareas que pretende abordar los conceptos básicos de probabilidad bajo los enfoques tratados en este estudio, a través de la resolución de situaciones. Allí se observan las actuaciones de los estudiantes y el profesor durante la realización de las mismas.

El tercer momento contempla el diseño e implementación de cuestionarios evaluativos con el fin de observar los avances en los conceptos básicos de probabilidad de los estudiantes.

El establecimiento de los sistemas de representación y el análisis fenomenológico de los enfoques de probabilidad, asumidos del marco conceptual del Análisis de Contenido (Cañadas & Gómez, 2012), se utilizan para el diseño de las pruebas diagnósticas, las secuencias de tareas del proceso de instrucción y los cuestionarios evaluativos. Además, los cuestionarios evaluativos se diseñaron a partir del análisis probabilístico realizado a algunos juegos de un programa de concurso, los cuales fueron experimentados por los estudiantes.

En el cuarto momento, se da tratamiento a la información a través del análisis de las respuestas de las pruebas diagnósticas y los cuestionarios evaluativos, con el fin de categorizar las respuestas relacionando los niveles de la Taxonomía SOLO con las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad. Además, se realiza un informe estadístico descriptivo que presenta las tendencias generales del grupo de estudiantes acerca de los niveles de la taxonomía SOLO (preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional) con las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad.

1.5.5. Cronograma de implementación

En este apartado se presenta el cronograma del proceso de implementación de la secuencia de tareas desarrolladas desde el 13 de febrero de 2014 hasta el 13 de junio de 2014 con los estudiantes de undécimo grado de la IED General Carlos Albán. En la siguiente tabla se relacionan las sesiones realizadas.

MOMENTO	TAREA	FECHA	DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD
Diagnóstico		13/02/2014	Aplicación Prueba Diagnóstica No 1
		04/03/2014	Aplicación Prueba Diagnóstica No 2
		07/03/2014	Aplicación Prueba Diagnóstica No 3
Instrucción	Travesía del Rio	11/03/2014	Enfoque intuitivo
		13/03/2014	Enfoque frecuencial
		18/03/2014	Enfoque Clásico
		20/03/2014	Comparación de Enfoques
		21/03/2014	Cálculo probabilidades de eventos
	Laberintos	27/03/2014	Enfoque Intuitivo
		01/04/2014	Enfoque frecuencial
		03/04/2014	Enfoque Clásico (Principio Multiplicación)
		04/04/2014	Principio Suma - Comparación de Enfoques
	Aparato de Galton	22/04/2014	Enfoque Clásico
		29/04/2014	Enfoque frecuencial
		06/05/2014	
		08/05/2014	Construcción Gráficas – Comparación de resultados
	Quinielas	13/05/2014	Espacio Muestral- Enfoque intuitivo
		22/05/2014	Enfoque Frecuencial
Evaluativo		10/06/2014	Aplicación Prueba Evaluativa No1
		11/06/2014	Aplicación Prueba Evaluativa No1
		12/06/2014	Aplicación Prueba Evaluativa No1
		13/06/2014	Aplicación Prueba Evaluativa No1

Tabla 10. Secuencia de tareas realizadas durante el proceso de implementación

2. CATEGORIZACIÓN DE LOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD

A partir de la estructura conceptual aplicada a la temática tratada en este trabajo, se proponen las siguientes categorías de análisis presentadas en la siguiente tabla, las cuales se describen a continuación.

Categorías de análisis	Subcategoría
Aleatoriedad	Concepto experimento aleatorio
	Ideas sobre secuencias aleatorias
	Tratamiento de Intuiciones
	Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales
Espacio Muestral	Enumeración de puntos muestrales – Experimento Simple
	Cardinal de espacio muestral – Experimento Simple
	Enumeración de puntos muestrales – Experimento Compuesto
	Cardinal de espacio muestral – Experimento Compuesto
Eventos	Eventos Simples– Experimento Simple
	Eventos Compuestos– Experimento Simple
	Eventos Simples– Experimento Compuesto
	Eventos Compuestos– Experimento Compuesto
Tablas de Frecuencia	Completar datos faltantes
	Interpretación de frecuencias
Interpretación Diagramas de Barras	
Cálculo de Probabilidades	Aplicación Ley de Laplace en experimentos simples
	Aplicación Ley de Laplace en experimentos compuestos
	Regla del Producto
	Regla de la Suma
Comparación de Probabilidades	Comparación de Probabilidades en experimentos simples
	Comparación de Probabilidades en experimentos compuestos
Convergencia Estocástica	

Tabla 11. Categorías de análisis para la probabilidad.

2.1. ALEATORIEDAD

Esta categoría de análisis indaga por la capacidad de los sujetos para reconocer las características de un experimento aleatorio y el comportamiento de sus resultados. Este trabajo basa su análisis en los aspectos probabilísticos propuestos por Serrano (1996), ellos son: concepto de experimento aleatorio, ideas sobre secuencias aleatorias, tratamiento de intuiciones e interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales. Los anteriores aspectos propuestos por Serrano (1996) se analizan como subcategorías de análisis en este trabajo.

Experimento aleatorio: Esta categoría indaga por la capacidad del estudiante para identificar las características de un experimento aleatorio, Serrano (1996) en su trabajo doctoral espera que los alumnos reconozcan las siguientes características de un experimento aleatorio:

1. En condiciones fijadas de antemano hay más de un resultado posible.
2. Con los conocimientos que posee el sujeto que emite el juicio, el resultado concreto que ocurrirá es impredecible.

> *3. Hay posibilidad -al menos imaginada- de repetir indefinidamente la observación o producción del fenómeno. (p. 20)*

Serrano (1996), citando a Ayer (1974), muestran algunas características para reconocer si un suceso es o no aleatorio, siendo estas:

> *1) Un suceso se considera aleatorio si es miembro de alguna serie que se conforma de acuerdo con el cálculo de probabilidades.*
> *2) Existen casos en los cuales una de las razones para afirmar que un suceso ocurre por azar es precisamente que constituye una desviación con respecto a una frecuencia establecida.*
> *3) Cuando hablamos de sucesos causados por azar por seres humanos u otros agentes, significa que no estaba en la intención del agente este suceso.*
> *4) Hablamos de coincidencias por azar de sucesos, cuando su concurrencia no es intencionada y, aunque podemos explicar cada uno de ellos por separado, no encontramos razón que los una entre sí. Ayer (1974), citado por Serrano (1996, p. 15)*

Ideas sobre secuencias aleatorias: Este aspecto indaga por las ideas de los estudiantes respecto a la generación de secuencias aleatorias para experimentos simples y compuestos las cuales según Serrano (1996) se caracterizan por "*carecer de un patrón que el sujeto pueda controlar o predecir."*
(Serrano, 1996) analiza las propiedades de las secuencias aleatorias producidas por los alumnos o reconocidas por ellos, al tratar el siguiente interrogante: *"¿Cuáles son los argumentos que los alumnos usan para considerar una secuencia como aleatoria o no aleatoria?".*

Tratamiento de Intuiciones: Esta subcategoría trata de observar la capacidad del estudiante de poner en juego sus intuiciones probabilísticas, bajo esta categoría se pretende indagar si el proceso de instrucción recibido por parte del grupo de estudiantes permite sustituir las intuiciones primarias por intuiciones secundarias. En algunas tareas relacionadas con esta subcategoría interesa indagar la manera como el estudiante interpreta las intuiciones de otros individuos.

Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales: Esta subcategoría indaga por la manera como los estudiantes interpretan enunciados de probabilidades en términos frecuenciales, Serrano (1996) presenta los siguientes aspectos de esta subcategoría.

> *a) Predicción de la ocurrencia de un suceso en un experimento simple, a partir de la estimación frecuencial de su probabilidad.*
> *b) Explicación de la ocurrencia de un suceso, a pesar de su baja probabilidad, por razones frecuenciales*
> *c) Estimación de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, si se posee una estimación frecuencial de su probabilidad.*
> *Estos tres aspectos se han mostrado como factores independientes, por lo que la adquisición de uno de ellos no presupone la de los demás. En consecuencia, cada uno de ellos constituye un problema diferenciado respecto a la probabilidad frecuencial. Serrano (1996, p. 157)*

2.2. ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral se define como *"El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento"*. Teniendo presente que el grupo de estudiantes recibe por primera vez instrucción en temas de probabilidad, únicamente se abordarán espacios muestrales finitos-discretos. Bajo esta categoría se indaga por la capacidad del estudiante para enumerar y establecer el número de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Para ello, se establecen como subcategorías la enumeración de puntos muestrales y el cardinal del espacio muestral tanto en experimentos simples como en compuestos. A continuación se detalla cada subcategoría.

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Simple: Este aspecto trata acerca de la identificación de los resultados (puntos muestrales) de un experimento aleatorio simple.

Cardinal de espacio muestral – Experimento Simple: El conteo de los casos favorables (puntos muestrales) de un experimento simple se puede obtener a través del listado de ellos.

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Compuesto: Este apartado muestra la identificación de los puntos muestrales de un experimento aleatorio compuesto a partir de los puntos muestrales de los experimentos simples que lo conforman; para ello, se pueden emplear diferentes sistemas de representación como listas ordenadas, tablas de doble entrada y árboles de probabilidad, entre otros.
Al enumerar puntos muestrales se pueden obtener:
• Listas de puntos muestrales que no pertenecen al experimento simple.
• Listas incompletas de los puntos muestrales, siguiendo o no un patrón definido.
• Listas completas de los puntos muestrales, siguiendo o no un patrón definido.

Cardinal de espacio muestral – Experimento Compuesto: Este aspecto trata el cálculo o el conteo de los puntos muestrales que pertenecen al espacio muestral de un experimento aleatorio compuesto. Para su conteo se requiere haber realizado previamente la enumeración de los puntos muestrales. Para su cálculo, este se puede realizar utilizando técnicas de análisis combinatorio, en particular la regla del producto para el conteo presentada en la siguiente definición.

> *Si una tarea se realiza en dos etapas, donde la primera se puede realizar de m formas posibles y, si para cada una de ellos la segunda etapa se puede realizar de n distintas formas, entonces la tarea completa se puede arrojar m*n formas posibles.*

2.3. EVENTOS

Un evento o suceso del espacio muestral se define como *"Un grupo de resultados contenido en éste, cuyos miembros tiene una característica común"*. Asimismo un Suceso se define como el *"Resultado de un experimento"*. En esta categoría se indaga por la identificación de los puntos muestrales de un evento (simple o compuesto) de un experimento aleatorio (simple o compuesto); así como la identificación del número de casos favorables (cardinal del evento) o las frecuencias absolutas de los eventos. Evento simple se define como un *"Resultado experimental que no puede descomponerse más"* y un Evento compuesto como la *"Combinación de sucesos simples"*. Teniendo presente la clasificación tanto de experimentos como de eventos se proponen las siguientes subcategorías: Eventos Simples – Experimento Simple, Eventos Compuestos – Experimento Simple, Eventos Simples – Experimento Compuesto y Eventos Compuestos – Experimento Compuesto.

2.4. TABLAS DE FRECUENCIA

Una tabla de frecuencias se define como una *"Lista de categorías de valores junto con sus frecuencias correspondientes"*. De hecho, constituye una de las formas de representación más utilizadas para mostrar los resultados de probabilidad de un experimento aleatorio, tal manera que se propone como una categoría de análisis.

Esta categoría indaga por la capacidad del estudiante para recolectar, organizar y analizar datos generados en un experimento aleatorio en tablas de frecuencia. Esta categoría se relaciona con algunos Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006), los cuales se presentan en la siguiente tabla:

Nivel	Estándar
1-3	Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas.
4-5	Represento datos usando tablas Interpreto información presentada en tablas
6-7	Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas

Tabla 12. Estándares relacionados con tablas de frecuencia (MEN, 2006)

En las tablas de frecuencia se puede completar datos faltantes e interpretar frecuencias de las situaciones, por esa razón se proponen las siguientes subcategorías.

Completar datos faltantes: En esta subcategoría, el estudiante identifica y calcula valores desconocidos tanto de frecuencias absolutas como relativas.

Interpretación de frecuencias: En esta subcategoría, se indaga por la extracción de información de una tabla de frecuencia para plantear conclusiones a partir de datos estadísticos como el de validar la veracidad de enunciados probabilísticos.

2.5. INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS DE BARRAS

En relación a los gráficos estadísticos (Wild y Pfannkuch, 1999), citados por Arteaga, Batanero, Díaz, & Contreras (2009) afirman:

> *"El lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, una de las formas básicas de razonamiento estadístico, que consiste en obtener una nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro."*

Los diagramas de barras es uno de los gráficos más utilizados en la presentación de la información estadística. Los medios de comunicación hacen uso constante de ellos, de allí la importancia de tratar la interpretación de este elemento como una representación gráfica de una distribución de probabilidad. Los siguientes Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) están relacionados con esta categoría.

Nivel	Estándar
1-3	Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras.
4-5	Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).
6-7	Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares.) Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Tabla 13. Estándares relacionados con diagramas de barras (MEN, 2006)

Algunos autores citados por Arteaga, Batanero, Díaz, & Contreras (2009) definen niveles en la lectura crítica de datos provenientes de tablas y gráficos estadísticos entre los cuales se resaltan Bertin (1967), Curcio (1989) Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995) y (Aoyama y Stephen, 2003; Aoyama, 2007). Adicionalmente Arteaga, Batanero, Díaz, & Contreras (2009) resaltan el trabajo de (Pereira-Mendoza y Mellor, 1990) al analizar los errores presentes en los estudiantes al interpretar diagrama de barras.

2.6. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Esta categoría indaga por la cuantificación la probabilidad de ocurrencia de un evento bajo el enfoque clásico a partir del empleo de técnicas como: Ley de Laplace, regla de la suma y regla del producto. Los siguientes Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) están relacionados con el elemento de razonamiento Cálculo de Probabilidades.

Nivel	Estándar
6-7	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
8-9	Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
10-11	Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo)

Tabla 14. Estándares relacionados con el cálculo de probabilidades (MEN, 2006)

Aplicación Ley de Laplace: El enfoque clásico de la probabilidad, está relacionado con la Ley de Laplace con la siguiente definición:

> *"Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de **n** formas igualmente probables y mutuamente excluyentes y si **nA** de estos resultados tienen un atributo **A**, la probabilidad de A es la proporción **nA** con respecto a **n**".*

Esta subcategoría aborda el cálculo de probabilidades de eventos asociados a experimentos aleatorios simples o compuestos, en donde el supuesto de equiprobabilidad relativo a espacios muestrales discretos y finitos es una condición necesaria para aplicar el enfoque clásico. Para la asignación de probabilidades se emplea la ley de Laplace como el cociente entre el número de resultados favorables (cardinal del evento) y el número de casos posibles (cardinal del espacio muestral). Se resalta el trabajo de Serrano (1996) al identificar los procedimientos incorrectos en la utilización de la Ley de Laplace.

Regla del Producto: Esta regla se aplica cuando se tienen varios eventos independientes [5]y sucesivos entre sí, de tal manera que la probabilidad de que ocurran todos ellos de manera simultánea corresponde a la multiplicación de sus probabilidades. Esta regla es aplicada para el cálculo de probabilidades de puntos muestrales en experimentos aleatorios compuestos; teniendo presente que un punto muestral de un experimento compuesto se forma con la ocurrencia simultánea varios eventos generados por experimentos simples.

Regla de la Suma: Esta regla se aplica cuando se tienen varios eventos mutuamente excluyentes[6], de tal manera que la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos (es decir su unión) corresponde a la suma de sus probabilidades. Esta regla permite el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de eventos compuestos en experimentos aleatorios.

2.7. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Esta categoría indaga por la identificación de eventos imposibles, probables y seguros de un experimento aleatorio; junto con la ordenación de eventos probables comparando sus valores de probabilidad. Se espera que el estudiante ordene eventos, teniendo en cuenta que la probabilidad es un valor que oscila desde el 0% para eventos imposibles hasta el 100% para el caso de eventos seguros. En este estudio se espera que los estudiantes, después de haber pasado por el proceso de instrucción comparen probabilidades basado en el cálculo de las mismas y no recurriendo únicamente a las intuiciones primarias.

Autores como Ortiz et al. (2006) manifiestan que el problema de comparar probabilidades entraña en la comparación de dos fracciones, por lo que un requisito es el nivel de desarrollo de razonamiento proporcional. Además, Cañizares (1997) citado por Ortiz, J. et al. (2006), plantea las siguientes de estrategias empleadas en la comparación de probabilidades: Comparación de casos posibles, comparación de casos favorables, comparación del número de casos desfavorables, estrategias aditivas, estrategia de correspondencia, estrategias multiplicativas y otros.

En Colombia, se tiene en cuenta esta categoría en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) que se listan a continuación.

---

[5] Los Sucesos o Eventos independientes se definen como aquellos para los cuales la ocurrencia de cualquiera de ellos no afecta las probabilidades de ocurrencia de los demás.

[6] Los Sucesos o Eventos disjuntos o mutuamente excluyentes se definen como aquellos que no pueden ocurrir de manera simultánea.

Nivel	Estándar
1-3	Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
4-5	Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
6-7	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad
8-9	Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.

Tabla 15. Estándares relacionados con el elemento de razonamiento Comparación de Probabilidades

En este trabajo la Comparación de Probabilidades de eventos simples y compuestos se aborda tanto en **experimentos simples** como en **experimentos compuestos**

2.8. CONVERGENCIA ESTOCÁSTICA

Esta categoría parte del planteamiento de Serrano (1996) que "*pretende estudiar el significado que los alumnos atribuyen a la convergencia estocástica, esto es a la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a la probabilidad teórica del mismo"*; este mismo autor presenta la siguiente idea que describe esta propiedad de los experimentos aleatorios.

> *5. En este aparente desorden, pueden descubrirse una multitud de regularidades globales, comenzando por la estabilización de las frecuencias relativas de cada uno de los resultados posibles. Esta regularidad global es el fundamento que nos permite estudiar estos fenómenos aleatorios mediante el cálculo de probabilidades. Serrano (1996, p. 15)*

A través de esta categoría se pretende indagar la manera como los estudiantes interpretan las frecuencias obtenidas en diferentes tamaños de un mismo experimento aleatorio; con el fin de juzgar la veracidad de enunciados probabilísticos, así como el reconocimiento el número mínimo de ensayos de un experimento bajo el cual comienzan a estabilizarse las frecuencias relativas.

Los siguientes Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) están relacionados con el elemento de razonamiento Convergencia Estocástica.

Nivel	Estándar
6-7	Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.
8-9	Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
10-11	Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Tabla 16. Estándares relacionados con el elemento de razonamiento Convergencia Estocástica

3. MOMENTO DIAGNÓSTICO

La fase diagnóstica está compuesta por tres pruebas que abordan los conceptos básicos de probabilidad, ellas se describen a continuación. Las pruebas entregadas a los estudiantes se encuentran en el Anexo A. Tarea Prueba Diagnóstica.

3.1. PRUEBA DIAGNOSTICA 1

En esta prueba se utilizan algunas tareas planteadas por Serrano (1996) y Fernández, Sarmiento y Soler (2008). En las siguientes tablas se relacionan los enfoques de probabilidad y el tipo de situaciones propuestas según PISA. Posteriormente, se detalla cada situación.

Situación	Descripción	Enfoque de Probabilidad		
		Intuitivo	Frecuencial	Clásico
1	Secuencia de lanzamiento de monedas		X	
2	Extracción de una canica en dos cajas diferentes			X
3	Comportamiento de un Hámster	X	X	

Tabla 17. Relación de las situaciones de la prueba diagnóstica 1 con los enfoques de probabilidad.

Situación	Descripción	Tipo de Situación según PISA			
		Personal	Educativa-Laboral	Pública	Científica
1	Secuencia de lanzamiento de monedas	X			
2	Extracción de una canica en dos cajas diferentes	X			
3	Comportamiento de un Hámster	X			

Tabla 18. Clasificación de las situaciones de la prueba diagnóstica 1.

La situación 1 titulada *"Secuencia de Lanzamiento de Monedas",* tomada de Serrano (1996), está compuesta por dos preguntas que indagan por la aleatoriedad y la creencia de predecir resultados de experimentos aleatorios.

Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después, Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la que considere verdadera.

Ítem 1A ¿Cuál cree que sería la verdadera de las tres siguientes? Justifique su respuesta.

A) Cara, Cara, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Sello, Sello, Sello

B) Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello

C) Cara, Sello, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Cara, Sello, Cara

D) Cualquiera de las anteriores

Ítem 1B ¿Cree usted que se puede predecir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda? Explique su respuesta.

En los ítems 1A y 1B, Serrano (1996) indagaba respectivamente por

> *"(…) averiguar si el alumno es consciente de dos características fundamentales de los procesos estocásticos: la regularidad global, representada por la convergencia de la frecuencia relativa de los sucesos elementales a las probabilidades teóricas y la variabilidad*

local, consistente en los diferentes patrones aleatorios de las muestras pequeñas de resultados de los experimentos aleatorios . Se espera que el estudiante tenga conciencia de la variabilidad e impredecibilidad de los resultados y que la corrida de los lanzamientos puedan dar los resultados "cara o "sello" en cualquier orden. (p. 55). "Tiene como propósito el averiguar si alguno de los alumnos tiene la creencia en su capacidad de predicción de un suceso aleatorio particular, o por el contrario sabe que la única predicción posible sobre tal tipo de sucesos puede hacerse en términos de probabilidades (p. 55)

En la situación descrita suelen presentarse los siguientes errores: el primero consiste en no percibir igualmente probables la ocurrencia de cualquiera de las tres listas de resultados (secuencias de caras y sellos); ante este error, Serrano (1996) concluye que los sujetos no perciben las secuencias igualmente aleatorias. Con más detalle se aclara que:

En las sucesiones a) y b) se presenta exactamente la misma frecuencia de caras y cruces, y en la c) una frecuencia aproximadamente igual. Además, en la segunda se presenta una alternancia y una estabilidad de la frecuencia en el proceso, incluso a corto plazo. En la a) se presenta un suceso que, en la heurística de la representatividad (Kahneman et al. 1982) es considerado como muy improbable, siendo realmente tan probable como los otros dos. Finalmente la c) presenta una sucesión en que se manifiestan tanto la regularidad global como la variabilidad local. (p.55).

Además, Serrano (1996) afirma que al tratar de predecir el próximo resultado de una secuencia aleatoria, el estudiante puede utilizar la heurística de la representatividad, basando su predicción en la recencia positiva o negativa (ver marco conceptual, "intuiciones, heurísticas y sesgos").

El segundo error consiste en asumir la posibilidad de predecir con seguridad el próximo resultado en la realización del experimento, y el tercero consiste en la creencia de la imposibilidad de ocurrencia de corridas cuyos resultados sean constantes o que tengan algún patrón.

La situación 2 titulada "*extracción de una canica en dos cajas diferentes*", tomada de Fernández, Sarmiento y Soler (2008), consiste en la comparación de la probabilidad de ocurrencia de un evento (elegir la canica azul) en dos experimentos aleatorios simples (caja A – caja B).

Ítem 2. En dos cajas A y B se introduce canicas rojas y azules en las siguientes cantidades

CAJA	ROJAS	AZULES
A	**6**	**4**
B	**60**	**40**

Cada caja se revuelve vigorosamente. Una persona elije una de las cajas y luego, sin mirar, saca una canica. Si la canica es azul gana $120.00 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul? Justifique su respuesta.

A. La caja A **B. La caja B** **C. Cualquiera de las dos cajas.**

El objetivo de la situación anterior consiste en indagar las ideas de los estudiantes respecto a la probabilidad clásica, tal como lo afirma Fernández, Sarmiento y Soler (2008), *"(…) indagar la invarianza de la proporcionalidad al comparar razones asociadas a eventos aleatorios. Frente a este problema se espera que el estudiante aplique la definición clásica* *de la probabilidad*" (*p. 74)*. Por esa razón, se espera que los estudiantes asuman el mismo valor de probabilidad de obtener canica azul en ambas cajas, al existir igualdad entre la razón del número de resultados favorables (número total de canicas azules) y el número total de posibles resultados (número total de canicas).

Además, puede presentarse diversos errores, de acuerdo a la opción de respuesta escogida. En este sentido, Fernández, Sarmiento y soler (2008) manifiestan:

> *Si se responde la opción (a), se piensa que las muestras pequeñas reflejan o preservan mejor las probabilidades de ocurrencia de un evento. Asociamos este distractor con la ley de pequeños números. Si se responde (b), se puede estar pensando que aunque se conserve la proporcionalidad, se cree que a mayor cantidad de elementos en la caja, mayor será la probabilidad de ocurrencia de un evento (p.74).*

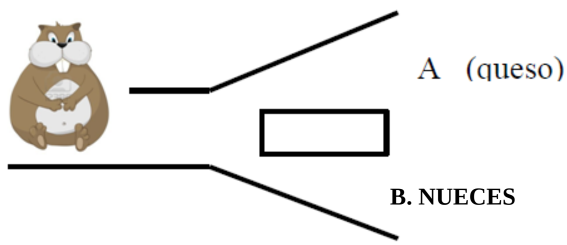
Al elegir la opción A como respuesta correcta, Lavalle, Micheli, & Boché (2003) identifican esta situación como descuido del tamaño de la muestra porque, a pesar de conservar la proporción de las probabilidades al comparar dos experimentos diferentes, se suele escoger como más probable el experimento con menor número de elementos.

La tercera situación, tomada de Serrano (1996), está compuesta por tres ítems que abordan el enfoque frecuencial de la probabilidad a través de un experimento que pretende pronosticar el comportamiento de un hámster en busca del queso o las nueces. Con ella se pretende analizar el efecto de un contexto familiar en el alumno, tal como lo afirma Serrano (1996)

> *"Los alumnos de la muestra tienen dificultades en interpretar los enunciados propuestos desde un punto de vista probabilístico, centrándose en la predicción de un resultado. Esta dificultad, sin embargo, disminuye cuando el problema se les presenta en un contexto más familiar." "(…) se trata de la interpretación de un enunciado de probabilidad frecuencial y permite discriminar los sujetos que emplean el "enfoque en el resultado aislado". Hemos introducido este ítem para analizar el efecto del contexto, más familiar al alumno, sobre este sesgo." (p. 48)*

---

3. Al inicio del camino, mostrado en la figura, se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces. Los otros 20 prefieren las nueces.



Ítem 3 A. ¿A qué lugar es más probable que llegue el hámster? ¿Por qué?
Ítem 3 B. Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensa que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?
Ítem 3 C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces), ¿pensaría que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

El ítem 1 de la situación confronta el conocimiento previo de los estudiantes ante una situación familiar (la preferencia de un hámster por un tipo especial de alimento) con los resultados probabilísticos obtenidos bajo el enfoque frecuencial. Se espera que los estudiantes utilicen la información del problema para establecer el resultado más probable del experimento. Sin embargo, Serrano (1996) manifiesta la posibilidad de que algunos estudiantes, especialmente aquellos que hayan tenido hámster como mascota, antepongan su experiencia personal en lugar de asumir la información suministrada por el problema.

En el ítem 2 se espera que el resultado menos probable (dirigirse a las nueces) pueda ocurrir sin que la opinión del experto pueda cuestionarse. Sin embargo, algunos estudiantes podrían pensar que la opinión del criador de hámsteres es incorrecta cuando se presenta el evento con la menor probabilidad asignada. En este sentido, Serrano (1996) plantea que los estudiantes pueden incurrir en sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos, debido a la "*utilización de teoría previas sin guiarse por los datos objetivos" (p.146).*

En el ítem 3 se plantea un experimento realizado con diez hámsteres de los cuales tres se dirigen hacia las nueces (puerta B) y se pide confrontar este resultado frente a las posibilidades asignadas por el experto criador. Se espera que el estudiante manifieste que el amigo criador no está equivocado, debido a que el resultado obtenido con el nuevo experimento arroja un valor cercano a la opinión del experto criador (en ente caso, el nuevo experimento da una relación 70/30 en contraste con la opinión del criador respecto a la proporción 80/20 con caso favorable al queso). Ante este ítem, Serrano (1996) afirma que los estudiantes podrían manifestar el sesgo del enfoque aislado debido a que la repetición del experimento no guarda relación con la realizada previamente.

3.2. PRUEBA DIAGNOSTICA 2

La **prueba diagnóstica 2** se compone de cuatro situaciones. En la siguiente tabla se relaciona los enfoques de probabilidad y el tipo de situación propuesto en cada una de ellas.

Situación	Descripción	Enfoque de Probabilidad		
		Intuitivo	Frecuencial	Clásico
1	Registro de calificaciones en una tabla de frecuencias		X	
2	Extracción de dos bolas de una urna			X
3	Extracción de pelotas de una caja			X
4	Lanzamiento de un dado			X

Tabla 19. Relación de las situaciones de la prueba diagnóstica 2 con los enfoques de probabilidad.

Situación	Descripción	Tipo de Situación según PISA			
		Personal	Educativa-Laboral	Pública	Científica
1	Registro de calificaciones en una tabla de frecuencias		X		
2	Extracción de dos bolas de una urna	X			
3	Extracción de pelotas de una caja	X			
4	Lanzamiento de un dado			X	

Tabla 20. Clasificación de las situaciones de la prueba diagnóstica 2.

La primera situación trata de un estudio estadístico que analiza una variable cuantitativa (calificaciones) a una población de 40 estudiantes a través de una tabla de frecuencias con una frecuencia faltante y otra tabla que relaciona las calificaciones numéricas con una clasificación cualitativa. De la situación anterior se desarrollan tres ítems. En el ítem 1A se analiza la manera como los estudiantes hallan el valor faltante de una tabla de frecuencias, en el ítem 1B se indaga por el cálculo de probabilidad de un evento simple a partir de los datos de una tabla de frecuencias y en el ítem 1C se indaga por el cálculo de probabilidad de un evento compuesto utilizando la información proveniente de dos tablas.

Al abordar el ítem 1A, los estudiantes podrían presentar el sesgo "debido a la facilidad de recuperar ejemplos" ante la dificultad de interpretar tablas de frecuencia, lo que lleva a la utilización de información irrelevante. En los ítems 1B y 1C, se asume el anterior sesgo debido a que el estudiante podría asignar un valor de probabilidad basado en una experiencia personal sin tener en cuenta la información presentada en las tablas. Además, podría presentarse el sesgo de equiprobabilidad, evidenciándose un inadecuado uso del principio de la indiferencia, en los ítems anteriores al asumir, por ejemplo, en el ítem 1B que las cinco calificaciones tienen igual probabilidad olvidando las frecuencias dadas en la tablas; y para el ítem 1C se podría asumir igualmente probables las tres calificaciones cualitativas "aprobado, pendiente y reprobado" debido a la dificultad de relacionar las clasificaciones cualitativas con las frecuencias de las calificaciones numéricas.

1. La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de Estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

Ítem 1 A) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 2? Justifique.
Ítem 1 B) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación de 4? Justifique.
Ítem 1 C) Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido no esté como "Aprobado"?

La segunda situación trata de un experimento aleatorio compuesto en el que se realiza una extracción de dos elementos a través de un muestreo sin reposición. Con ella se busca analizar el establecimiento de los puntos muestrales del experimento; de tal manera que se deben establecer todas las permutaciones sin repetición posibles a partir de una población de 4 elementos para obtener una muestra de dos elementos. Al resolver esta situación, se podría presentar el sesgo "debido a la facilidad por recuperar ejemplos" al listar varios resultados posibles asumiendo una suposición "física" (peso de las balotas) que podría afectar el resultado del experimento ó trata de explicar con sus palabras el desarrollo del experimento. Además, es posible presentarse el sesgo de razonamiento combinatorio al tratar de representar pictóricamente la situación sin identificar correctamente o identificando parcialmente los puntos muestrales del experimento.

Ítem 2. En una urna se encuentran bolitas numeradas del 1 al 4. Si se sacan 2 bolitas seguidas, sin devolverlas a la urna. Indique todas las posibles opciones.

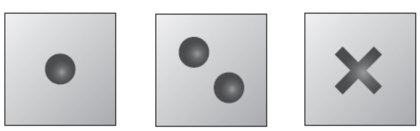
La tercera situación trata de un experimento aleatorio simple en el que se extrae una pelota de una caja que contiene un cierto número de pelotas de diferentes colores; con ella se busca analizar el cálculo de probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto (obtener pelota roja o verde) en un experimento simple. Se espera que apliquen la Ley de Laplace y la Regla de la Suma. Al resolverla, podría presentarse el sesgo de equiprobabilidad al asumir igualmente probable los tres colores de las pelotas, desconociendo la cantidad de pelotas de cada color.

Ítem 3. En una caja Anita tiene 26 pelotas. De las cuales 10 son verdes, 5 son azules y 11 son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde?

La cuarta situación analiza el establecimiento del evento simple más probable de un experimento simple. Se espera que la comparación de probabilidades esté respaldada con la aplicación de la Ley de Laplace al hallar la razón entre la cantidad de caras de la figura (número de casos favorables) y el número total de caras (número total de casos posibles). Al resolver la situación podría presentarse el sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" al asumir un carácter determinístico del experimento (control de la velocidad del lanzamiento), junto con el sesgo de la equiprobabilidad al desconocer la información de la situación asumiendo el dado convencional con seis números o asignando igual valor de probabilidad a las tres símbolos de las caras del dado de la situación.

Ítem 4. Se lanza un dado de seis caras que tiene tres de sus caras marcadas con un punto, dos caras marcadas con "X" y una cara marcada con dos puntos, la cara que es más probable salga es:

A. B. C. D.



Todas tienen la misma probabilidad de salir

3.3. PRUEBA DIAGNOSTICA 3

La **prueba diagnóstica 3** se compone de cuatro situaciones. En la siguiente tabla relaciona los enfoques de probabilidad y el tipo de situación propuesto en cada una de ellas.

Situación	Descripción	Enfoque de Probabilidad		
		Intuitivo	Frecuencial	Clásico
1	Sorteo con dos monedas			X
2	Gráfico estadístico visita página Bicentenario		X	
3	Extracción de pelotas de una urna			X
4	Lanzamiento de una caja de fósforos		X	

Tabla 21. Relación de las situaciones de la prueba diagnóstica 3 con los enfoques de probabilidad.

Situación	Descripción	Tipo de Situación según PISA			
		Personal	Educativa-Laboral	Pública	Científica
1	Sorteo con dos monedas			X	
2	Gráfico estadístico visita página Bicentenario			X	
3	Extracción de pelotas de una urna			X	

4	Lanzamiento de una caja de fósforos	X

Tabla 22. Clasificación de las situaciones de la prueba diagnóstica 3.

La primera situación analiza el establecimiento del evento más probable en un experimento compuesto. Se espera que la comparación de probabilidades esté respaldada con la enumeración de los puntos muestrales del experimento y la aplicación de la Ley de Laplace. En su resolución se debe considerar que las monedas son distinguibles de tal manera que se espera presentar los siguientes resultados.

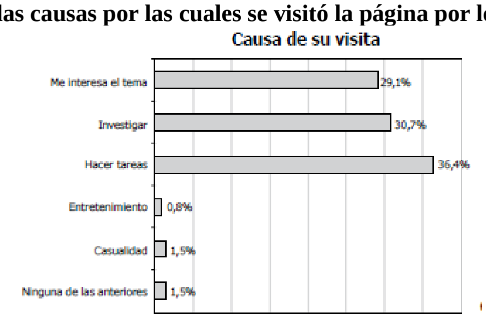
Ítem 1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente:

a) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro
b) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro
c) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro
d) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

Al resolver la situación podría presentarse el sesgo de equiprobabilidad al asumir que los hermanos tienen la misma probabilidad de ganar el carro. El sesgo “debido a la facilidad para recuperar ejemplos” se presenta al asumir propiedades físicas en un experimento aleatorio intentando controlar el resultado (fuerza y velocidad). El sesgo de razonamiento combinatorio al comparar el grado de probabilidad del evento de un experimento compuestos como si éste fuera un experimento simple, o listar de manera incompleta los resultados del experimento compuesto.

La segunda situación trata de un estudio estadístico que analiza una variable cualitativa (causas por las que un grupo de personas visitan una página web cuyos resultados se presentan de manera porcentual en un diagrama de barras horizontal) que analiza la veracidad de diferentes enunciados probabilísticos por parte de los estudiantes, respaldando las respuestas en la interpretación de la información proveniente del gráfico estadístico.

2. Radio Nacional de Colombia creó una página Web en conmemoración del bicentenario de la independencia de Colombia. La gráfica representa las causas por las cuales se visitó la página por los primeros 261 visitantes.



Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique.

Ítem 2. A. Menos de 130 visitantes acudieron a la página para hacer tareas.
Ítem 2. B. Más de 200 visitantes acudieron a la página investigar o para hacer tareas.
Ítem 2. C. Aproximadamente 165 visitantes no consultan la página porque requieren hacer tareas.

Al resolver la situación se puede presentar el sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" al plantear una opinión acerca de la veracidad de diferentes enunciados probabilísticos sin tener en cuenta la información del gráfico.

En la tercera situación se analiza el establecimiento de probabilidad de un evento simple en un experimento compuesto que consiste en extraer dos pelotas de cierto color de una bolsa que contiene pelotas de diferentes colores. Para la determinación del valor de probabilidad se espera que el estudiante calcule las probabilidades condicionales de cada una de las dos extracciones para luego aplicar la regla del Producto. En el cálculo de probabilidad de la segunda extracción el estudiante debe tener presente que tanto el número de casos favorables como el número total de casos posibles disminuye en uno por tratarse de un muestreo sin reposición.

Ítem 3. Si en una bolsa hay 4 pelotitas verdes, 3 pelotitas rojas y 4 pelotitas azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelotita azul y luego, sin reponerla, sacar otra azul?

Al resolver puede presentarse el sesgo de razonamiento combinatorio al asumir el experimento como simple lo que lleva a la identificación incorrecta del espacio muestral y a la aplicación incorrecta de la Ley de Laplace. El sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" al dar una opinión acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento, sin utilizar la información de la situación.

En la cuarta situación se espera que estudiante escoja la conclusión correcta acerca del comportamiento del experimento a partir de la lectura de las frecuencias de la corrida de mayor tamaño; tomando en este caso los resultados de la corrida de 500 lanzamientos y que determine las frecuencias relativas a partir de las frecuencias absolutas de esta corrida.

Ítem 4. Se lanza una caja de fósforos, esta puede caer en cualquiera de las posiciones de la figura

Un estudiante realiza este experimento con diferentes números de lanzamientos obteniendo los siguientes resultados.

Posición	10 Lanzamientos	20 Lanzamientos	50 Lanzamientos	100 Lanzamientos	500 Lanzamientos
1	3	8	22	55	330
2	4	6	12	20	100
3	3	6	16	25	70

A partir de la información anterior se puede concluir que:

a) **Más de la mitad de las posiciones de caída corresponda a las posiciones 2 o 3**
b) **Las tres posiciones tengan aproximadamente la misma probabilidad entre ellas**
c) **Más de la mitad de todas las posiciones de caída corresponda a la posición 1**
d) **El número de veces que cae la caja en la posición 2 se aproxime al 50%**

Se puede presentar el sesgo de la representatividad, conocido como Ley de los pequeños números al asumir los datos de la corrida más pequeñas y da conclusiones erradas teniendo en cuenta dicha información. El sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" se muestra al concluir con argumentos físicos (equilibrio de las posiciones de los fósforos) sin tener en cuenta la información de la tabla.

Por medio de la siguiente tabla se relacionan las Heurísticas y Sesgos probabilísticos que se pueden presentar en los diferentes ítems de las pruebas diagnósticas. Se aclara que en este estudio no se pretende verificar la presencia de estos sesgos en el grupo analizado de estudiantes.

Prueba	**Ítem**	**Representatividad**						**Disponibilidad**	
		Ley de los pequeños números	**Descuido del tamaño de la muestra**	**"recencia positiva" o "negativa" (Piaget e Inhelder, 1951).**	**Sesgo de la equiprobabilidad**	**Sesgo del enfoque aislado**	**Concepción errónea de las secuencias aleatorias**	**Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos**	**Sesgos de Razonamiento Combinatorio**
PD1	1 A						X		
	1 B			X					
	2		X						
	3 A					X			
	3 B					X		X	
	3 C					X			
PD2	1 A							X	
	1 B							X	
	1 C							X	
	2								X
	3								
	4				X				
PD3	1				X				
	2 A							X	
	2 B							X	
	2 C							X	
	3								X
	4	X						X	

Tabla 23. Heurísticas y Sesgos relacionados con los ítems de las pruebas diagnósticas

4. MOMENTO DE INSTRUCCIÓN

La propuesta de instrucción se desarrolla a través de cuatro tareas denominadas "*Travesía del Río", "Laberintos", "Aparato de Galton"* y *"Quinielas"* las cuales se presentan en los anexos B, C, D y E respectivamente; Los enfoques de probabilidad así como su categorización se relacionan con las tareas que conforman la propuesta de instrucción en la siguiente tabla.

		TAREA			
CATEGORIZACION DE LOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD	**Categoría de análisis**	**Travesía del río**	**Laberintos**	**Aparato de Galton**	**Quinielas**
	Comparación de probabilidades	X	X	X	X
	Aleatoriedad		X		
	Tablas de frecuencia	X	X	X	X
	Espacio muestral		X		X
	Eventos	X	X		
	Cálculo de probabilidades	X	X	X	X
	Gráficos estadísticos	X			
	Convergencia estocástica			X	X
Enfoque de Probabilidad		**TAREA**			
Intuitivo		X	X		X
Frecuencial		X	X	X	X
Clásico		X	X	X	

Tabla 24. Relación de las tareas con los enfoques de probabilidad y las categorías de análisis

Con respecto a los tipos de situación definidos por PISA, las tareas *"Travesía del río"* y *"Laberintos"* son enmarcadas como situaciones de tipo personal; la tarea *"Aparato de Galton"* del tipo educativa-laboral y la tarea *"Quinielas"* presenta una situación clasificada como pública; cabe notar que en la presente propuesta de instrucción no se plantearon tareas con situaciones de tipo científico.

El diseño de las tareas de instrucción es guiado bajo las siguientes metas: 1. Calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico, 2. Reconocer la aplicabilidad de los enfoques de probabilidad en diversas situaciones de incertidumbre, 3. Contrastar creencias e intuiciones antes situaciones de incertidumbre frente a los resultados obtenidos a partir de los tres enfoques descritos.

4.1 TRAVESÍA DEL RÍO

Esta tarea consiste en un experimento aleatorio simple que pretende presentar ideas básicas acerca de los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial de la probabilidad. La tarea se encuentra organizada en cuatro secciones así: una para cada enfoque de probabilidad y la última trata la comparación y análisis de los resultados de probabilidad bajo los enfoques antes descritos.

<u>Sección 1: aplicación del enfoque intuitivo</u>

Esta sección inicia con la siguiente instrucción:

Importante: Antes de iniciar el juego, proponga una estrategia de ubicación de las fichas en el tablero para ganar el juego y regístrela en la siguiente tabla.

Después de seguirla, el estudiante expone los argumentos que respaldan su estrategia de colocación de fichas en las casillas del tablero del juego; luego registra el número de fichas asignadas y su respectivo porcentaje respecto al total de fichas en la siguiente tabla de probabilidades.

Tablero del Juego

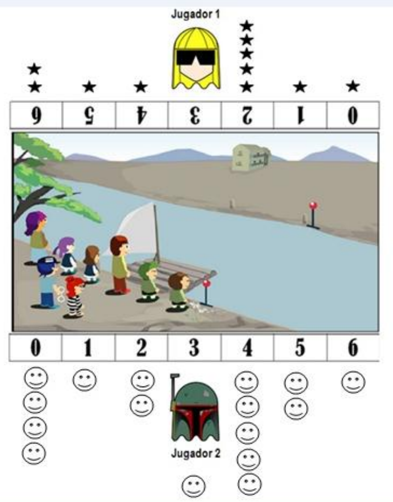


Tabla de Probabilidades

Probabilidades asignadas de manera INTUITIVA				
	Número de fichas colocadas		Porcentaje	
Resultado	Jugador Uno	Jugador Dos	Jugador uno	Jugador dos
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total	30	30	100%	100%

Con el propósito de interpretar las dos distribuciones de probabilidades (jugador 1, jugador 2) correspondiente a la aplicación del enfoque intuitivo, se formulan las siguientes preguntas.

- ☆ **¿A cuál resultado el jugador uno le colocó más fichas?________________________________**
- ☆ **¿A cuál resultado el jugador dos le colocó más fichas?________________________________**
- ☆ **¿Cuál es el resultado que más apareció en el juego?________________________________**
- ☆ **¿A cuál resultado el jugador uno le colocó menos fichas?______________________________**
- ☆ **¿A cuál resultado el jugador dos le colocó menos fichas?______________________________**
- ☆ **¿Cuál es el resultado que menos apareció en el juego?______________________________**

Sección 2: aplicación del enfoque frecuencial

En esta sección, se realiza una partida del juego y los resultados generados se registran en la columna *"recuento"* de la siguiente tabla. Finalmente, se determinan las frecuencias absolutas (número de veces) y relativas (porcentaje) de los resultados del juego.

Probabilidades obtenidas al realizar el juego (ENFOQUE FRECUENCIAL)			
Resultado (Pimpón Número)	Recuento	Número De Veces	Porcentaje
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Total			

A través del siguiente ítem, el estudiante compara los valores de probabilidad obtenidos bajo los enfoques intuitivo y frecuencial.

A partir de los resultados obtenidos y registrados en la tabla anterior ¿cambiaría usted la estrategia de distribución de las fichas? Justifique su respuesta.

Sección 3: aplicación del enfoque clásico

En esta sección se calcula la probabilidad de ocurrencia de los resultados posibles (número de pimpón: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) aplicando la ley de Laplace. En el caso particular del juego, la cantidad de pimpones introducidos en la bolsa corresponde al número de casos favorables para cada uno de los posibles resultados.

Número del Pimpón	Cantidad de Pimpones introducidos dentro de la bolsa	Porcentaje
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	24	100%

Sección 4: comparación de enfoques de probabilidad.

En la siguiente tabla se registran los resultados obtenidos por los tres enfoques de estudio.

	Porcentajes			
	ENFOQUES			
Resultado	Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total				

A partir de los datos extraídos del anterior informe se plantea el siguiente ítem:

Argumente con base en los resultados obtenidos, el éxito o fracaso de su estrategia teniendo en cuenta los tres procedimientos vistos para el cálculo de probabilidades

En los siguientes dos ítems se pide al estudiante determinar los puntos muestrales que tienen la mayor y menor probabilidad de ocurrencia en cada uno de los enfoques.

Basado en esta información responda las siguientes preguntas.

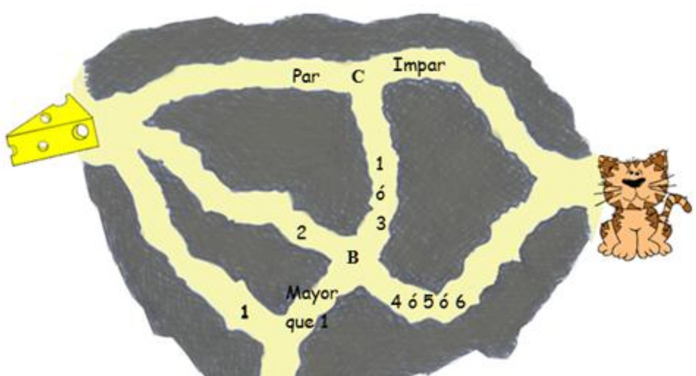
	Pregunta:	ENFOQUE			
		Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador Dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
1	¿Cuál es el resultado más probable?				
2	¿Cuál es el resultado menos probable?				

Finalmente, se determina el valor de probabilidad para diferentes eventos simples y compuestos, partiendo de los valores registrados en el cuadro comparativo de los enfoques de probabilidad.

	Pregunta: Cuál es la probabilidad de obtener un resultado:	ENFOQUE			
		Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador Dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
1	Igual a 3				
2	Mayor que 3				
3	Mayor igual a 3				
4	Menor a 3				
5	Menor igual a 3				
6	Un número primo				
7	Un número par				
8	Un número impar				
9	Mayor a 2 y Menor a 5				
10	Mayor igual a 2 y Menor igual a 5				
11	Mayor a 2 y Menor igual a 5				
12	Mayor igual a 2 y Menor a 5				

4.2 LABERINTOS

Esta tarea aborda los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial de la probabilidad en un experimento compuesto. Se desarrolla a través de un tablero que contiene una serie de



caminos; cuyo recorrido se realiza con una ficha, que representa un ratón, a partir del resultado obtenido en el lanzamiento de un dado.

La tarea consta de diferentes ítems agrupados en cinco secciones así: las tres primeras tratan los enfoques de probabilidad intuitivo, frecuencial y clásico, la cuarta sección consiste en una comparación y análisis de los resultados de probabilidad obtenidos bajo los enfoques de estudio y en la última sesión se realiza una descripción de los enfoques.

Primera sección: Enfoque intuitivo

En esta sección, el estudiante realiza un análisis preliminar de las probabilidades del juego partiendo de la información suministrada, sin realizar su experimentación. Luego, procede a responder los siguientes tres ítems:

A) ¿Qué le parece más fácil: salvarse o ser devorado por el gato? ¿Por qué?
B) Si se colocan 80 ratones en la entrada ¿Cuántos cree que llegarán al queso? ¿Por qué?
C) De los 80 ratones ¿Cuántos se espera que sean comidos por el gato? ¿Por qué?

En ítem A, el estudiante escoge el evento más probable correspondiente a los resultados finales del laberinto: alcanzar el queso o ser devorado por el gato. En los ítems B y C, el estudiante establece, de acuerdo a su opinión, el número esperado de ratones que alcanzan el queso y el número esperado de ratones que son devorados por el gato, atendiendo a un número predeterminado de repeticiones del experimento (80 ratones). A partir de las respuestas a los ítems B y C se procede a completar la siguiente tabla de probabilidades del experimento bajo el enfoque intuitivo.

D) Diligencie la siguiente tabla a partir de la información registrada en los puntos B y C.

Resultado	Número de Ratones	Porcentaje
Queso		
Gato		
Total	80	100%

Segunda sección

En esta sección se obtienen las probabilidades de ocurrencia de los eventos (alcanzar el queso o ser devorado por el gato). Para ello, cuatro estudiantes realizan la experimentación directa del juego 30 veces y registran en la siguiente tabla las veces en que la ficha llega al queso o al gato.

TABLA DE RECUENTO

QUESO	GATO

A partir de los resultados obtenidos en las tablas de recuento se procede a elaborar la siguiente tabla de frecuencias.

	Probabilidades obtenidas al realizar el juego (ENFOQUE FRECUENCIAL)					
Resultado	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4	Número de Ratones	Porcentaje
Queso						
Gato						
Total	30	30	30	30	120	100%

A continuación se formulan tres preguntas relacionadas con la categoría de análisis "aleatoriedad" a partir de tres secuencias aleatorias que se pueden generar del experimento.

Suponga que se liberan 6 ratones y se registran los resultados obtenidos:
Secuencia A Queso, Queso, Queso, Gato, Gato, Gato
Secuencia B Queso, Gato, Queso, Gato, Queso, Gato
Secuencia C Queso, Gato, Queso, Queso, Queso, Gato

¿Cuál de las tres anteriores secuencias considera verdadera? ________________________ Justifique su respuesta.
¿Cuál de las tres anteriores secuencias considera la más probable? ___________________ Justifique su respuesta.
¿Cree usted que se puede predecir con seguridad el resultado del próximo ratón liberado? Explique su respuesta.

Tercera sección

En esta sección se presenta un procedimiento para calcular la probabilidad de los eventos "Queso" y "Gato" bajo el enfoque clásico. Inicialmente el estudiante debe establecer los posibles resultados del juego, identificando todas las rutas posibles que puede seguir una ficha en su recorrido por el laberinto, para determinar los puntos muestrales del experimento. En la siguiente tabla se identifican cinco posibles rutas, cuyos desvíos se denominan A, B y C. Todas las rutas parten del desvío A y conducen a dos resultados finales (queso y gato). Con ella, se plantean dos preguntas que definen el cardinal de los eventos queso y gato.

Ruta	A	B	C	Queso	Gato
1	X				
2	X				
3	X	X	X	X	
4	X				
5	X				

A partir de la información en la tabla anterior responda las siguientes preguntas:
a) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al queso? __________________
b) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al gato? ___________________

En el siguiente ítem se aplica la ley de Laplace para establecer las probabilidades entre los desvíos del laberinto, ellas se registran en la siguiente tabla.

Ruta	Punto de Partida	Punto de llegada			
	A	B	C	Queso	Gato
1	X				
2	X				
3	X	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	
4	X				
5	X				

Así, para el ejemplo mostrado en la ruta 3, estando la ficha ubicada en el punto de partida A, la probabilidad de avanzar hasta el desvío B es de 5 entre 6. Luego, estando en el punto B, la probabilidad de avanzar hasta el desvío C es de 2 entre 6; finalmente estando en el punto C, la probabilidad de llegar al evento queso es de 3 entre 6.

El siguiente ítem trata el cálculo de las probabilidades de cada uno de los puntos muestrales (rutas) utilizando la regla del producto, a partir de las probabilidades obtenidas en el ítem anterior; es así como el cálculo de las probabilidades de las cinco rutas se obtiene multiplicando las probabilidades de los diferentes puntos de llegada. Este procedimiento se registra en la siguiente tabla.

Paso 3 A Continuación calcule las probabilidades de seguir cada una de las rutas (Complete la tabla). En este caso, la ruta 3 (A-B-C-Queso) se especifica en la siguiente tabla.

Ruta	Cálculo	Resultado
1		
2		
3	$\frac{5}{6} * \frac{2}{6} * \frac{3}{6}$	$\frac{30}{216}$
4		
5		

Para el siguiente ítem se procede al cálculo de la probabilidad de ocurrencia de los dos eventos compuestos (Queso – Gato) con el empleo de la regla de la suma.

Paso 4 Cálculo de probabilidad del resultado final del juego REGLA DE LA SUMA

Resultado Final	Cálculo	Resultado	Porcentaje
Queso			
Gato			
TOTAL			100%

"Defina con sus propias palabras el uso de la regla del producto y la regla de la suma"

Cuarta sección

En esta sección el estudiante consolida, en la siguiente tabla, los resultados de probabilidad obtenidos bajo los tres enfoques.

	Enfoque de Probabilidad		
Resultado	Intuitivo	Frecuencial	Clásico
	PARTE A	PARTE B	PARTE C
Queso			
Gato			

En la última sección de esta tarea, los estudiantes realizan una descripción de los tres enfoques de probabilidad a través de las siguientes preguntas.

Defina con sus propias palabras

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

¿Qué semejanzas y diferencias encuentra en cada uno de los enfoques?

	Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico
Semejanzas			
Diferencias			

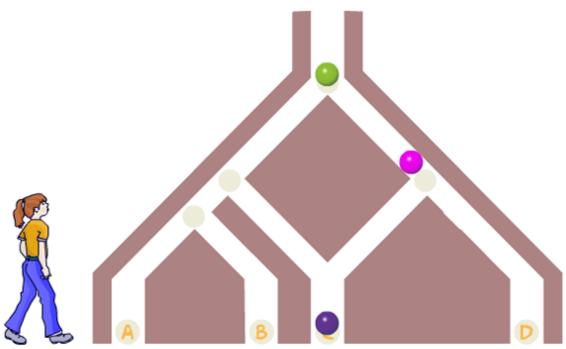
¿Qué ventajas encuentra en cada uno de los enfoques?

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

¿Qué desventajas encuentra en cada uno de los enfoques?

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

4.3 APARATO DE GALTON.



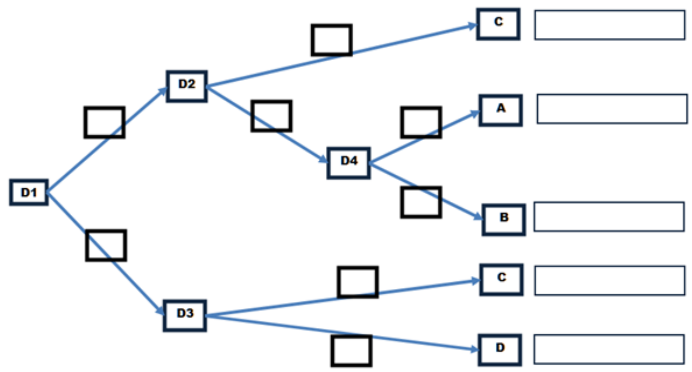
Esta tarea trata los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad en un experimento compuesto, a través del empleo de un aplicativo que simula el funcionamiento del aparato de Galton. Con ella se verifica la convergencia de las frecuencias relativas hacia las frecuencias teóricas del experimento al ejecutarlo para diferentes tamaños de corridas.

La tarea se compone de tres secciones: En la primera se realiza un análisis probabilístico del experimento bajo el enfoque clásico, en la segunda se realiza el cálculo de probabilidad bajo el enfoque frecuencial al realizar el experimento (soltar una bola en la entrada del aparato y mirar a cuál de las puertas marcadas con las letras A,B,C;D llega) para diferentes tamaños de corrida,; y en la última sección se compara las frecuencias obtenidas para 10 corridas con los valores de probabilidad obtenidos bajo el enfoque clásico.

Primera sección

En esta sección se presenta una representación gráfica de los diferentes caminos que toma la bola en su recorrido por el Aparato de Galton a través del empleo de un diagrama de árbol. En este diagrama los nodos representan el punto de partida D1, los diferentes desvíos (D2, D3, D4) y los posibles puntos de llegada (A, B, C, D).

En este ítem se pide asignar las probabilidades entre los nodos probabilísticos del experimento, las cuales están ubicadas sobre las flechas del diagrama de árbol. Enseguida se le pide calcular la probabilidad de que la bola recorra cada una de las rutas posibles en este laberinto; para su cálculo se espera que aplique la regla del producto.



Después de obtener las probabilidades asociadas a los puntos muestrales del experimento, se registra, en el siguiente recuadro, el procedimiento para el cálculo de probabilidades de cada punto de llegada con la aplicación de la regla de la suma. Por ejemplo, el evento “llegar al punto C” se compone de dos puntos muestrales (Rutas: D1-D2-C y D1-D3-C).

Cálculo de probabilidad del resultado final del juego

Recuerde que el juego finaliza cuando la bola alcanza la puerta “A”, “B”, “C” ó “D”

Realice los cálculos necesarios para determinar las probabilidades.

Con los procedimientos realizados anteriormente, se organiza una tabla de frecuencias, obtenida bajo el enfoque clásico.

Resultado Final	Porcentaje
A	
B	
C	
D	
	100%

Segunda sección

En esta sección se pone en marcha el Aparato de Galton para el registro del número de bolas que llegan a cada una de las casillas (A, B, C, D) con 10 experimentos con diferentes números de ensayo. En esta tarea se realizan corridas de 10, 20, 30, 60, 120, 240, 480, 600, 1000 y 1500 bolas, las cuales se registran en una tabla de frecuencia como la mostrada a continuación.

Experimento X: se lanzan X Bolas

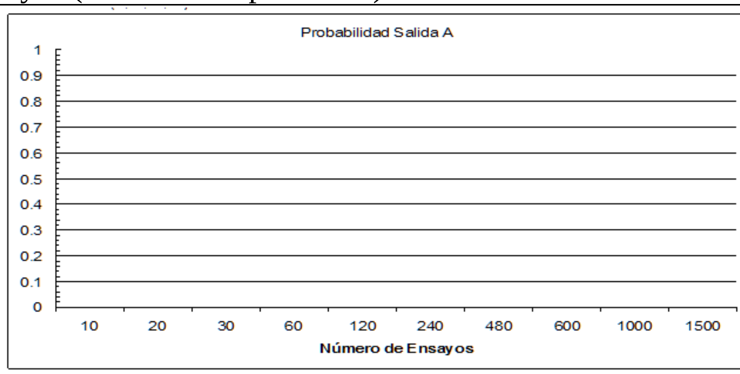
Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	Número de Bolas	Porcentaje de Bolas
A		
B		
C		
D		
Total	X	100%

Después de obtener estas tablas de frecuencia, el estudiante consolida las frecuencias relativas expresadas en porcentaje, por medio del siguiente informe.

		Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B				
Resultado – Casilla	Probabilidad Clásica Parte A	Experimento 1	Experimento 2	Experimento 3	Experimento 4	Experimento 5
		10 Bolas	20 Bolas	30 Bolas	60 Bolas	120 Bolas
A						
B						
C						
D						
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B					
Resultado - Casilla	Experimento 6	Experimento 7	Experimento 8	Experimento 9	Experimento 10
	240 Bolas	480 Bolas	600 Bolas	1000 Bolas	1500 Bolas
A					
B					
C					
D					
Total	100%	100%	100%	100%	100%

Para cada uno de los eventos finales del experimento, el estudiante grafica en un plano cartesiano el comportamiento de las frecuencias relativas (variable dependiente) en relación al número de ensayos (variable independiente)



Después de graficar el comportamiento de las frecuencias se formula la siguiente pregunta.

¿Qué sucede con los porcentajes obtenidos para las casillas A, B, C, D al aumentar el número de bolas en el experimento?

Con el anterior ítem, se espera el reconocimiento de la convergencia de las frecuencias relativas obtenidas por el enfoque frecuencial hacia las frecuencias teóricas obtenidas por el enfoque clásico.

Finalmente, con base en las conclusiones obtenidas en el ítem anterior, se pide completar los valores de una tabla de frecuencia en un experimento con un número grande de ensayos.

Complete la tabla Si se lanzaran 1 025 320 de bolas

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	1 025 320	100%

4.4 APUESTA DE CARRERAS "QUINIELAS".

Esta tarea trata los enfoques intuitivo y frecuencial de la probabilidad analizando el rol de varios jugadores al realizar sus apuestas frente a una carrera electrónica de caballitos. Inicialmente los estudiantes registran las diferentes posiciones del podio de una carrera de tres caballos denominados *"Bucéfalo"," Marengo"* y *"Strategos".* A través de este ítem se establecen los puntos muestrales del experimento registrándolos en la siguiente tabla.

Primer Lugar	Segundo Lugar	Tercer Lugar

La tarea continúa con una sección denominada **"PARTE A. ENFOQUE INTUITIVO: ESTRATEGIAS DE VARIOS JUGADORES"** en la que el estudiante asume el papel de tres jugadores (Aníbal, Magno y Sancho Panza), quienes tienen diferentes intuiciones acerca del posible grado de competitividad de los caballos en la carrera.

A partir de la información sobre los roles de los jugadores del casino, el estudiante debe determinar el número carreras obtenidos en las distintas combinaciones del podio para doscientas carreras posibles, y con la construcción de tablas de frecuencias (una para cada jugador) se establecen las probabilidades de obtener las distintas combinaciones del podio.
Se espera que los estudiantes establezcan probabilidades bajo el enfoque intuitivo, teniendo en cuenta la información suministrada en los enunciados, dejando de lado sus propias intuiciones y asumiendo el rol de los jugadores descritos en la situación. A continuación se presentan los tres ítems que conforman esta sección de la tarea.

PARTE A. ENFOQUE INTUITIVO. ESTRATEGIAS DE VARIOS JUGADORES

Entre los clientes del casino se escucha el rumor que el dueño ha decidido manipular la máquina, al registrar en las últimas semanas pérdidas al negocio debido a la entrega de bastantes premios a los clientes que apostaron por los caballos Bucéfalo y Marengo como favoritos.

1. **Aníbal,** como cliente frecuente, cree que el dueño manipula la máquina a favor del casino. Teniendo en cuenta la opinión de **Aníbal**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

2. **Magno**, funcionario del casino, conoce la calibración de los caballos. Él sabe que Bucéfalo es asignado con un nivel de competitividad entre “1” al “4”, Marengo es asignado con un nivel de competitividad entre “3” al “6”, y Strategos es asignado con un nivel de competitividad entre“5” al“9” (ver tabla de la página 1). Teniendo en cuenta la opinión de **Magno**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

3. Finalmente **Sancho Panza,** inspector de juegos, considera que la máquina no favorece a ningún caballo en particular. Teniendo en cuenta la opinión de **Sancho Panza**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

En la siguiente sección, denominada "**PARTE B. ENFOQUE FRECUENCIAL**", trata la aplicación del enfoque frecuencial con el análisis estadístico de la carrera. En la siguiente tabla se registra el resultado de doscientas carreras obtenido por el jugador "Espartaco".

REGISTRO DEL RESULTADO PARA 200 CARRERAS

Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos
3	2	1	2	1	3	3	2	1	3	2	1
2	1	3	3	2	1	3	1	2	3	2	1
3	1	2	3	1	2	2	3	1	3	2	1
3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
3	2	1	3	2	1	2	1	3	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	2	1	3	3	1	2	3	2	1
3	1	2	2	3	1	2	3	1	2	1	3
2	1	3	3	2	1	2	1	3	3	2	1

A partir de la información anterior, el estudiante completa los valores de la siguiente tabla de frecuencias para establecer una distribución de probabilidad a través del enfoque frecuencial.

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	10	
Bucéfalo	Strategos	Marengo	4	
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo	87	
		Total	200	100%

La aplicación del enfoque frecuencial se realiza de nuevo con el registro estadístico de diez carreras por parte del jugador "Calígula", tal como se muestra en la siguiente tabla.

Bucéfalo	Marengo	Strategos
3	2	1
2	1	3
3	1	2
3	2	1
3	2	1
3	2	1
3	2	1
3	1	2
2	1	3
3	2	1

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	10	100%

A partir de los resultados obtenidos con el registro estadístico de los jugadores "Espartaco" y "Calígula" se presenta a los estudiantes el siguiente ítem:

- *¿Considera que es cierta la posición de Calígula al considerar suficiente plantear la estrategia de juego basada en 10 carreras? ¿Por qué?*

En el anterior ítem, los estudiantes deben reconocer que la exactitud en la estimación de probabilidades, bajo el enfoque frecuencial, se incrementa con el tamaño de la corrida del experimento. Por esa razón, se le solicita evaluar si los datos generados por la muestra de 10 carreras permiten establecer los valores de probabilidad con un margen de error razonable.

En la última sección de esta tarea denominada "**PARTE C. COMPARACIÓN DE ENFOQUES"** se consolidan las distribuciones de probabilidad de los resultados obtenidos en la carrera electrónica de caballitos bajo el enfoque intuitivo, con la información de los jugadores "*Aníbal*", "*Magno*" y "*Sancho Panza*" y del enfoque frecuencial con el registro estadístico de los jugadores "*Espartaco*" y *"Calígula",* tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Resultado			Estrategias				
Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Intuitivo Aníbal**	**Intuitivo Magno**	**Intuitivo Sancho Panza**	**Frecuencial Registro Espartaco 200 Carreras**	**Frecuencial Registro Calígula 10 Carreras**
Bucéfalo	Marengo	Strategos					
Bucéfalo	Strategos	Marengo					
Marengo	Bucéfalo	Strategos					
Marengo	Strategos	Bucéfalo					
Strategos	Bucéfalo	Marengo					
Strategos	Marengo	Bucéfalo					
		Total	100%	100%	100%	100%	100%

A partir del anterior informe, el estudiante responde los siguientes ítems:

Entre los siguientes clientes: ***Aníbal, Magno y Sancho Panza,*** *explique cuál podría tener la razón.*
Si usted fuera al casino ¿cuál de las propuestas registradas tendría en cuenta para hacer las apuestas? Explique
¿Es posible confirmar o desmentir el rumor generado en el casino? Justifique su afirmación

4.5 REPORTE DE IMPLEMENTACIÓN DE LAS TAREAS DE INSTRUCCIÓN

Con respecto a la implementación de la propuesta de instrucción se reportan algunas acciones realizadas por los estudiantes en cada una de las tareas:

En la tarea "Travesía del río", los estudiantes aplicaron los conceptos básicos de probabilidad bajo los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial a través de un experimento aleatorio simple desarrollado con un juego de tablero.

En la tarea "Laberintos", los estudiantes aplicaron conceptos probabilísticos bajo los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial en un experimento compuesto a través de un laberinto probabilístico. En el enfoque clásico se abordaron el principio de la multiplicación para el cálculo de probabilidades de eventos simples y el principio de la suma para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos.

En la tarea "Aparato de Galton", los estudiantes emplearon el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad en un experimento compuesto, a través de un aplicativo (applet labazar) que simula el funcionamiento de un aparato de Galton. Con esta tarea, los estudiantes verificaron la convergencia de las frecuencias relativas hacia las frecuencias teóricas del experimento incrementando el número de ensayos.

En la tarea “Quinielas”, los estudiantes aplicaron el enfoque intuitivo, al establecer distribuciones de probabilidad de un juego de apuestas a partir de la opinión de varios clientes de un casino, éstas se compararon con los resultados obtenidos bajo el enfoque frecuencial con la realización de dos corridas de diferente tamaño.

En la implementación de la propuesta de instrucción se detectó qué:

1. Los estudiantes mostraron mayor dificultad en el análisis y obtención de probabilidades bajo el enfoque clásico, en contraste con los enfoques intuitivo y frecuencial, especialmente en experimentos compuestos. Las categorías de análisis donde se detectaron la anterior situación fueron: la determinación del espacio muestral y el cálculo de las probabilidades de eventos; tal circunstancia se evidenció en la Tarea Laberintos.

2. La resolución inadecuada de operaciones con racionales dificultó el cálculo de probabilidades en eventos, especialmente en la utilización de los principios del producto y la suma.

3. La aplicación del enfoque frecuencial, a través de la experimentación directa con los materiales y recursos empleados en las situaciones de azar (juegos de tablero, laberintos, aparato de Galton), permitió a los estudiantes relacionar los principios probabilísticos con sus intuiciones primarias.

4. El tiempo empleado para el desarrollo de las tareas no fue suficiente, se hizo necesario abordar algunas de ellas en un tiempo mayor al previsto; quedando abierta la posibilidad de replantear la gestión y la secuenciación de la propuesta de instrucción. Consideramos que la implementación de una secuencia de tareas a corto plazo no es suficiente para superar las ideas previas acerca de la probabilidad, en especial cuando los estudiantes no poseen formación estadística inicial que facilite la nueva información.

5. A la mayoría de los estudiantes se les dificulta proponer alternativas de solución a partir de la información dada, al estar habituados a la ejercitación algorítmica. Lo anterior destaca la necesidad de enfrentar a los estudiantes, con más frecuencia, a tareas enmarcadas en situaciones. Además, se evidencia que las respuestas no corresponden a las preguntas planteadas o las justificaciones reportadas son contradictorias.

6. La organización de la información en tablas de frecuencia permitió a los estudiantes registrar y comparar los valores de probabilidad bajo los tres enfoques, relacionando los conceptos de frecuencia relativa y probabilidad.

7. El diseño de los ítems, a través de preguntas abiertas, permitió explorar la manera como los estudiantes justifican los resultados de probabilidad obtenidos con la aplicación de los tres enfoques tratados en el estudio.

8. La formalización de los conceptos probabilísticos surgen posterior al desarrollo de la secuencia de tareas, en donde los estudiantes explican, con sus propias palabras, cada

concepto. De las justificaciones se observa que los conceptos se describen a partir de la situación planteada y no existe generalización, evidenciándose dificultad al aplicar dichos conceptos en las tareas diseñadas en el momento evaluativo.

9. Al comparar las probabilidades obtenidas bajo los tres enfoques, los estudiantes reconocieron que la aplicación de los enfoques clásico y frecuencial permiten obtener estimaciones más precisas de la probabilidad de ocurrencia, para diferentes eventos, en comparación con el enfoque intuitivo.

Para complementar la información descrita anteriormente, en los siguientes anexos se exponen algunos ejemplos de respuestas reportadas por los estudiantes en cada uno de los ítems de las tareas de instrucción, las cuales están clasificadas bajo la taxonomía SOLO; además se presenta el papel del profesor en este proceso y el registro fotográfico de las sesiones.

- Anexo H. Reporte de Implementación Tarea Travesía del Río
- Anexo I. Reporte de Implementación Tarea Laberintos
- Anexo J. Reporte de Implementación Tarea Aparato de Galton
- Anexo K. Reporte de Implementación Tarea Quinielas

5. MOMENTO EVALUATIVO

El diseño de los instrumentos evaluativos está inspirado en los juegos *"la caja fuerte", "el orden de los factores", "la rueda" y "espejito-espejito"* del programa de concurso "El precio es Correcto". Se hicieron adaptaciones a los juegos, reduciendo el espacio muestral del experimento, para facilitar los cálculos en los cuestionarios evaluativos. La descripción de los juegos se presenta en el Anexo G. Flujogramas Juegos; y los cuestionarios evaluativos entregados por los estudiantes se encuentran en el Anexo A. Tarea Prueba Diagnóstica.

El primer instrumento se desarrolla a través del juego *"la caja fuerte"* como un experimento compuesto por dos experimentos simples en el que cada elemento del espacio muestral se obtiene como un muestreo con reposición. El segundo instrumento plantea situaciones alrededor del juego *"el orden de los factores"* analizándolo como un experimento compuesto por tres experimentos simples, donde cada elemento del espacio muestral se obtiene como un muestreo sin reposición. El tercer instrumento trata el análisis probabilístico del juego *"la rueda"* como un experimento simple cuyo espacio muestral se compone de cinco puntos muestrales. El último instrumento se desarrolla a partir de los juegos *"la rueda"*, como experimento compuesto por dos experimentos simples; y *"espejito - espejito"*, como un experimento compuesto por dos experimentos simples, en donde cada elementos del espacio muestral se obtiene como un muestreo con reposición.

En la siguiente tabla se relacionan los enfoques de probabilidad y el tipo de situación según PISA, tratados en los instrumentos evaluativos.

Instrumento	**Juego**	**Enfoque de Probabilidad**		
		Intuitivo	Frecuencial	Clásico
I	Caja Fuerte		**X**	**X**
II	El orden de los Factores	**X**		**X**
III	La Rueda		**X**	**X**
IV	La Rueda			**X**
	Espejito – Espejito		**X**	**X**

Tabla 25. Relación de los juegos de concurso con los enfoques de probabilidad.

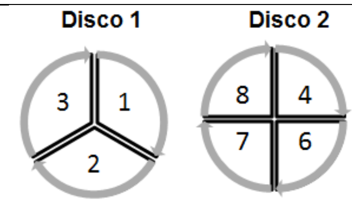
Juego	**Descripción**	**Tipos de Situaciones Según PISA**			
		Personal	Educativa-Laboral	Pública	Científica
1	Caja Fuerte	X		X	
2	El orden de los Factores	X		X	
3	La Rueda	X		X	
4	Espejito – Espejito	X		X	

Tabla 26. Relación de los juegos de concurso con los tipos de situaciones

5.1. CUESTIONARIO EVALUATIVO 1

Las situaciones propuestas en el cuestionario evaluativo 1 son las adaptaciones probabilísticas hechas al juego de concurso *"Caja Fuerte"*, el cual está compuesto de seis ítems. A continuación se describen cada uno de ellos.

En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.



A. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación ganadora? Justifique su respuesta.

B. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que comienza en 3 o en 2? Justifique su respuesta.
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de dos cifras que comience en cifra impar y termine en cifra par? Justifique su respuesta.

C. Si el concursante sabe de antemano que la clave correcta termina en 8 ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

Un fanático televidente ha decidido llevar el registro de los resultados presentados en varios juegos a través de la siguiente tabla: (Se aclara que la combinación ganadora cambia en cada juego realizado).

Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora	Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora	Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora
14	36	27	14	14	28
28	24	28	38	24	16

D. A partir de los resultados obtenidos en el anterior registro complete la siguiente tabla.

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino		
No Adivino		

E. Con base en los resultados del ítem anterior, si se realizara el juego 500 veces. ¿Cuántas veces se esperaría que el concursante adivinara la clave ganadora?

F. ¿Considera que el resultado obtenido por el televidente fanático es confiable? ¿Por qué?

Un segundo fanático ha realizado muchas veces la simulación del juego por computador y concluye que de cada 100 juegos, en 87 de ellos no se obtiene la clave ganadora.

G. Si se realiza el juego una vez y en este se obtiene la clave ganadora, ¿cree que este televidente estaba equivocado? ¿Por qué?
Si se realiza el juego 10 veces y en 7 de estos no se obtiene la clave ganadora ¿cree que este personaje estaba equivocado? ¿Por qué?

En el ítem A se espera que los estudiantes realicen el cálculo de probabilidad de un evento simple en un experimento compuesto a través de los siguientes procedimientos:

1. Identificando todas las posibles combinaciones del experimento y reconociendo que sólo existe una combinación ganadora para finalmente aplicar la Ley de Laplace.
2. Se realiza separadamente el análisis de los experimentos simples (disco 1, disco 2). teniendo presente que para hallar la combinación ganadora se debe escoger una cifra para cada uno de los discos. Luego se aplica la Ley de Laplace hallando el recíproco del número de puntos muestrales de cada uno de los experimentos simples (Cifras en cada uno de los Discos); después de hallar la probabilidad de éxito en cada uno de los

experimentos simples, se aplica el principio de la multiplicación para obtener la probabilidad conjunta.

Para los ítems B y C se presentan dos preguntas para cálculo de probabilidades de eventos compuestos en experimentos compuestos. Los procedimientos llevados a cabo podrían ser:
1. Listar todas las posibles combinaciones (puntos muestrales) e identificar aquellos puntos muestrales que hacen parte del evento compuesto (obtener número de dos cifras que comience en 3 o 2) para aplicar la Ley de Laplace hallando la razón entre el número de puntos muestrales del evento compuesto y el número de todas las posibles combinaciones.
2. Calcular la probabilidad del evento compuesto presentándolo como dos experimentos simples (disco 1, disco 2) utilizando la Ley de Laplace, luego aplica el principio de la multiplicación para obtener la probabilidad de ocurrencia de los eventos simples, finalmente aplica el principio de la suma para obtener la probabilidad del evento compuesto del experimento compuesto.
3. Asumir el experimento compuesto como un solo experimento simple, tomando uno de los discos según las indicaciones dadas de la situación para finalmente aplicar la ley de Laplace.

En los ítems A, B y C se pueden presentar el sesgo de razonamiento combinatorio al asumir el cálculo de probabilidades como un experimento simple al intentar hallar su cardinal como la suma de los elementos que componen los dos discos. Además, podría observarse dificultad para enumerar el espacio muestral de un experimento compuesto cuando los elementos del espacio muestral lo conforman con uno de los experimentos simples. Además se observa en esos ítems el sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" dado que las justificaciones se basaron en la experimentación del juego en lugar de aplicar el enfoque clásico de probabilidad.

En particular, en el ítem C podría observarse el sesgo de equiprobabilidad al asumir que ambos discos se tiene la misma probabilidad de obtener los dígitos correctos, desconociendo la cantidad de dígitos existentes en cada disco.

En el ítem D se pretende que los estudiantes completen de manera correcta los datos de una tabla de frecuencia a partir de los resultados obtenidos de manera experimental, estableciendo una distribución probabilidad de un experimento aleatorio.

En el ítem E se prevé que los estudiantes reconozcan la igualdad de las proporciones entre las frecuencias de un evento y el total de las frecuencias en ensayos de diferente tamaño. A través del empleo de una regla de tres se establece la frecuencia absoluta de un ensayo con un cierto tamaño manteniendo la proporcionalidad de las frecuencias con respecto a un experimento conocido: utilizando las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas del ensayo cuyas frecuencias son conocidas.

Procedimiento 1

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)
Adivino	4	X
No de veces	42	500

Procedimiento 2

	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)
Adivino	9.52	X
No de veces	100	500

En el ítem F se establece la con fiabilidad de los valores de probabilidad obtenidos a través de la experimentación comparándolos con los calculados bajo el enfoque clásico; estableciendo si la diferencia entre estos resultados son o no razonables.

En los ítems D, E y F puede presentarse el sesgo “debido a la facilidad para recuperar ejemplos” al intentar dar el valor de las frecuencias desconociendo la información dada, recurriendo a datos inventados. En el ítem F se podría dar el sesgo de la *ley de pequeños números* al asumir confiable un registro con los datos disponibles sin realizar alguna comparación con resultados obtenidos de otros enfoques de probabilidad.

El ítem G, compuesto por dos preguntas, pretenden indagar por las ideas sobre experimentos aleatorios determinando el resultado menos probable (primera pregunta) y reconocer la variabilidad de los resultados en diferentes ensayos del experimento aleatorio con el mismo tamaño, verificando la probabilidad de ocurrencia (segunda pregunta). Los errores que podría presentarse en este ítem son similares a los el ítem 3 de la prueba diagnóstica 1. En la primera pregunta podría presentarse el sesgo del enfoque aislado al asumir la probabilidad de ocurrencia del suceso con su pronóstico. En la segunda pregunta se muestra dificultad para percibir la replicabilidad del experimento aleatorio (juego: La caja fuerte) al concebir que las proporciones de la probabilidad en experimentos replicados debe mantenerse, olvidando la variabilidad de los resultados propios del enfoque frecuencial.

5.2. CUESTIONARIO EVALUATIVO 2

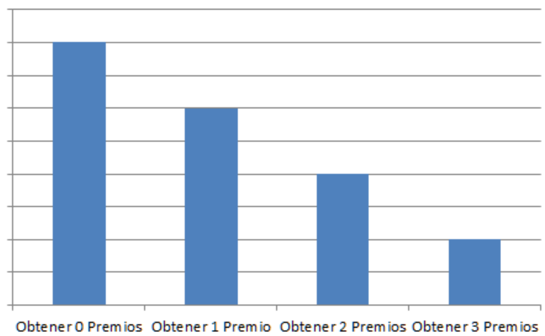
El cuestionario evaluativo 2 está compuesto por ítems realizados a la adaptación del juego de concurso “El Orden de los Factores” a través de un análisis de un experimento aleatorio compuesto (Muestreo sin reposición). A continuación se detalla los ítems.

Se tienen tres productos a los cuales le falta un dígito del precio. Los dígitos 5, 9 y 3 deben ser asignados, sin repetir, a cada una de las casillas vacías de los precios.

Patineta Atom 21"						**Bicicleta Junior**						**Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas**					
1	**5**	**1**		**0**	**0**	**2**	**6**	**9**	**4**		**0**	**4**	**4**	**9**		**0**	**0**

A. ¿Considera posible predecir con seguridad los precios de los artículos? ¿Por qué?
B. Haga una lista de todos los precios posibles que se pueden obtener en estos tres artículos.
En la siguiente gráfica se representa la opinión de un concursante acerca del grado de probabilidad de obtener los premios en este juego.



C. De acuerdo con la opinión del concursante mostrada en la gráfica anterior, determine la probabilidad de obtener:

3 Premios	
Menos de tres premios	
Más de un premio	
3 ó 1 premios	

Si los precios correctos de los tres artículos fueran

Patineta Atom 21"						Bicicleta Junior						Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas					
1	5	1	9	0	0	2	6	9	4	5	0	4	4	9	3	0	0

D. ¿Considera acertadas las probabilidades establecidas por este Concursante? SI ____ NO ____ ¿Por qué?
E. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Es imposible obtener 2 premios	Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.

En el ítem A se pretende que los estudiantes reconozcan que un enunciado de probabilidad no permite predecir el próximo resultado de un experimento aleatorio. Al resolverlo, podría presentarse los errores similares al ítem 1A de la prueba diagnóstica 1, ellos son: el sesgo del enfoque aislado y el sesgo debido a la facilidad para recuperar ejemplos (al considerar posible la predicción del resultado del experimento por un conocimiento aparente de las condiciones del mismo).

En el ítem B se espera que los estudiantes establezcan ordenadamente las diferentes combinaciones para enumerar los puntos muestrales de un experimento compuesto, asumiéndolo como un muestreo sin reposición. Al resolverlo, puede presentarse el sesgo de razonamiento combinatorio al realizar la lista de precios posibles en forma incompleta o incorrecta (la lista debe estar compuesta por nueve tripletas de precios).

En el ítem C el estudiante realiza el cálculo de probabilidades a partir de una distribución de probabilidad obtenida bajo el enfoque intuitivo; para ello, se realiza la lectura e interpretación del gráfico estadístico teniendo presente los siguientes aspectos:

- Reconoce las barras del gráfico como la frecuencia de cada evento.
- Asigna valor numérico a las divisiones del eje de frecuencias de manera proporcional.
- Asigna valor numérico a las frecuencias mostradas en las barras del gráfico a partir de las divisiones del eje de frecuencias están en proporción a la altura de las barras.
- Establece el valor de probabilidad de los eventos como la razón entre la frecuencia asignada al evento y la sumatoria de las frecuencias de dichos eventos.

Al resolver el ítem C, se puede presentar el sesgo de equiprobabilidad al asumir igualmente probables los eventos presentados en el diagrama de barras sin tener en cuenta la altura de las barras. Además, podría presentarse el sesgo debido a la facilidad para recuperar ejemplos al dar respuestas basadas en opiniones del estudiante respecto al grado de probabilidad de los resultados del juego.

Teniendo en cuenta la información del ítem D "precio de los artículos" se pretende que el estudiante establezca la distribución de probabilidad bajo el enfoque clásico así:

- Determine todos las posibles asignaciones de los precios de los tres artículos (enumeración de puntos muestrales)
- Para cada uno de las posibles asignaciones, determine la cantidad de artículos que ganaría el concursante.
- Determine el número de combinaciones en las cuales se ganan 0,1,2,3 artículos (Cardinal de eventos compuestos)
- Convierta ese número de veces en probabilidad (Aplicación Ley de Laplace)

En el ítem D, se espera que los estudiantes determinen un grado de confiabilidad a los valores de probabilidad estimados por un individuo (Enfoque intuitivo) y compara los valores obtenidos con el enfoque clásico a través de la diferencia entre ellos, esto con el fin de establecer un margen de error admisible y así validar los resultados del enfoque intuitivo.

En el ítem E, los estudiantes verifican la veracidad de enunciados probabilísticos utilizando los resultados de la distribución de probabilidad obtenida bajo el enfoque clásico y compararlos con los resultados de probabilidad obtenidos bajo dos enfoques: El intuitivo, mostrado en el diagrama de barras y el Clásico que se espera que el estudiante aplique.

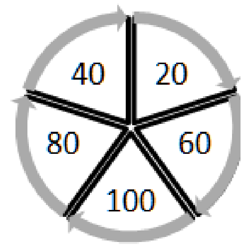
Al resolver los ítems D y E, se pueden presentar el sesgo de razonamiento combinatorio al no realizar un análisis de probabilidades bajo el enfoque clásico, esto conlleva a la utilización del sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos al argumentar con su opinión personal la validez de la distribución de probabilidad o asumir que las probabilidades asignadas por el concursante son correctas (en el ítem D) y argumenta con su opinión personal (experiencia con el juego) o con la lectura del diagrama de barras la validez de diferentes enunciados probabilísticos, sin realizar una análisis probabilístico bajo el enfoque clásico. (en el ítem E).

5.3. CUESTIONARIO EVALUATIVO 3

El cuestionario evaluativo 3 está compuesto por ítems realizados a la adaptación del juego de concurso "La rueda" a través de un análisis de un experimento aleatorio simple.

Juego la Rueda (para experimento simple)

El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez.



A. ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener en el juego?

B. Cuántos posibles resultados se pueden obtener al realizar el giro de la rueda una vez?

C. Un televidente lleva el registro de los resultados presentados en veinte juegos ¿Cuál de las siguientes secuencias de resultados se podría presentar en el juego? ¿Por qué?

a) 40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40

b) 40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20

c) 40,100,80,20,20,40,80,60,60,60,20,40,20,100,100,40,20,100,60,60

d) Cualquiera de las anteriores

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D1. El número 100	
D2. Un número terminado en 0	
D3. Un número menor a 80	
D4. Un número mayor a 40	
D5. Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	
D6. Un número que no comience en 4	

E. Marque con "X" el grado de probabilidad a cada uno de los siguientes eventos. Justifique

Evento	**Grado de Probabilidad**			**Justificación**
	Imposible	**Probable**	**Seguro**	
E1. Obtener un número par				
E2. Obtener un número mayor a 100				
E3. Obtener un número menor a 200				
E4. Obtener un número terminado en cero y mayor a 40.				

Otro televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla.

F. Ayúdele al televidente a completar los datos de la tabla

Resultado	**Cantidad de veces que ha caído el resultado**	**Porcentaje de veces que ha caído el resultado**
20	**24**	
40		**10%**
60		
80	**2**	
100	**4**	**10%**

G. ¿Cuántos juegos vio este fanático televidente?

H. Teniendo en cuenta el registro del televidente; Si se registraran 160 juegos. Cuántas veces se espera que caiga el número 80?

En el ítem A se espera que los estudiantes realicen una lista de los puntos muestrales de un experimento simple observando los diferentes resultados mostrados en la ilustración. En el ítem B se espera que los estudiantes realicen un conteo de los puntos muestrales de un experimento simple observando los diferentes resultados mostrados en la ilustración. Al resolver estos ítems se puede presentar el sesgo de razonamiento combinatorio al asumir el experimento simple como compuesto o asumir el valor numérico del valor numérico de los eventos como su cardinal

Se espera que los estudiantes, en el ítem C, consideren que cualquier secuencia de resultados del espacio muestral puede presentarse, independiente su probabilidad de ocurrencia. El error que podría presentarse es similar al presentado al ítem “lanzamiento de monedas” de la prueba diagnóstica, conocido como Concepción errónea de secuencias aleatorias, al considerar que la secuencia más probable es aquella cuya suma de los valores de los eventos sea la mayor.

En el ítem D se espera que los estudiantes apliquen la Ley de Laplace para el cálculo de probabilidad de un punto muestral de un experimento simple; identificando correctamente el número de casos favorables y el número total de casos posibles y por último apliquen el principio de la suma para hallar la probabilidad del evento compuesto. Se pueden presentar los sesgos de razonamiento combinatorio al intentar aplicar la Ley de Laplace empleando el valor numérico de los eventos en estos cálculos y el sesgo debido a la facilidad para recuperar ejemplos al intenta establecer valores de probabilidad de los diferentes eventos argumentando con opiniones personales.

En el ítem E se espera que el estudiante establezca el grado de probabilidad de diferentes eventos de un experimento aleatorio simple, respaldando esta asignación con el cálculo de probabilidades por medio de la Ley de Laplace y el Principio de la Suma. Al resolverlo, podría presentarse el sesgo juicios sobre frecuencias al asumir como imposible un evento seguro o probable, al asumir como probable un evento seguro o imposible ó al asumir como seguro un evento imposible o probable.

En el ítem F se espera la identificación del resultado conociendo la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa para aplicar, por ejemplo, una regla de tres para hallar las frecuencias relativas que corresponden a las frecuencias absolutas y viceversa; además determinan el tamaño de la corrida para completar el resultado en el que no se conocen tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa. Se debe tener en cuenta que la suma de las frecuencias absolutas equivale al tamaño de la corrida.

En el ítem G se debe reconocen que el tamaño de la corrida equivale a la suma de todas las frecuencias absolutas de los diferentes resultados del experimento o al valor de frecuencia absoluta que corresponde a una frecuencia relativa del 100%.

En este ítem H se debe reconocer la igualdad de las proporciones entre las frecuencias de un evento y el total de las frecuencias en ensayos de diferente tamaño. A través del empleo de una regla de tres establecen la frecuencia absoluta de un evento en un ensayo con un cierto tamaño manteniendo la proporcionalidad de las frecuencias con respecto a un experimento utilizando las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas del experimento cuyas frecuencias son conocidas.

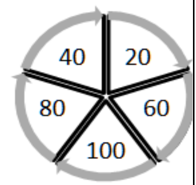
Al resolver los ítems F, G y H se podría presentarse el sesgo “debido a la facilidad para recuperar ejemplos” al inventar frecuencias sin tener en cuenta los datos de la tabla, desconociendo la proporcionalidad que se presenta en las frecuencias.

5.4. CUESTIONARIO EVALUATIVO 4

El cuestionario evaluativo 4 está compuesto por ítems realizados a la adaptación de los juegos de concurso “La rueda” “espejito, espejito” a través del análisis de un experimento aleatorio simple y compuesto respectivamente.

Juego la Rueda (para experimento compuesto)

El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez. Cuando el jugador no obtiene el número 100 al girar la rueda por primera vez, tiene la oportunidad de girar la rueda por segunda vez. Si la suma de los puntos obtenidos en ambas oportunidades es un número mayor que 100, queda inmediatamente eliminado del juego.



Recuerde: Si el jugador obtiene en la primera oportunidad el número 100, no tiene que girar de nuevo la rueda.

1. A continuación responda las siguientes preguntas:

A 1 . Cuál es el valor más pequeño que se puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	
A 2¿Cuál es el valor más grande que puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	

B 1 ¿Qué valor o valores de la suma son más probables? ¿Por qué?	
B 2 ¿Qué valor o valores de la suma son menos probables? ¿Por qué?	
B 3 ¿Qué es más probable: que la suma sea 80 o que la suma sea 100? ¿Por qué?	

C 1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
C 2 ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
C 3 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	

2. Juego espejito, espejito

En esta versión, el jugador debe adivinar únicamente dos cifras para obtener el precio del premio.

2A. ¿Cuántos posibles resultados se pueden obtener en el juego *espejito-espejito*? Explique.

2B Calcule la probabilidad de**:**

2 B 1 Ganar el premio	
2 B 2 Coincidir en la primera cifra del premio	
2 B 3 Coincidir en la segunda cifra del premio	

Cifra 1	Cifra 2
3	7
4	8
5	9

Un televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla. Por ejemplo: De 10 juegos vistos, en 6 de ellos el concursante no coincidió con alguna cifra, en tres de los 10 juegos coincidió en una cifra, mientras que en un juego el concursante adivinó las dos cifras del juego.

Cifras Coinciden	Número de Juegos										
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200
0	60.00 %	60.00 %	46.67 %	45.00 %	42.00 %	46.67 %	42.86 %	46.25 %	47.78 %	46.00 %	42.50%
1	40.00 %	30.00 %	43.33 %	45.00 %	48.00 %	43.33 %	48.57 %	43.75 %	42.22 %	45.00 %	45.50%
2	0.00 %	10.00 %	10.00 %	10.00 %	10.00 %	10.00 %	8.57 %	10.00 %	10.00 %	9.00 %	12.00%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Cifras Coinciden	Número de Juegos										
	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000	5000	20000
0	45.33 %	42.75 %	43.20 %	43.00 %	42.71 %	43.38 %	43.78 %	43.50 %	43.15 %	44.60 %	44.60%
1	43.33 %	46.25 %	45.80 %	46.33 %	46.29 %	45.00 %	44.33 %	44.50 %	44.70 %	43.50 %	43.83%
2	11.33 %	11.00 %	11.00 %	10.67 %	11.00 %	11.63 %	11.89 %	12.00 %	12.15 %	11.90 %	11.58%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

2C A partir de la información suministrad. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Es imposible que un jugador gane el premio	Es más probable que el jugador no acierta en alguna cifra.
El jugador tiene casi la misma probabilidad de acertar una cifra como de no coincidir cifra alguna.	Más del 60% de las veces, el jugador acierta en una cifra.

2D A partir de la siguiente información indique cual podría ser el número suficiente de programas que debería ver el fanático para obtener una estimación razonable de la probabilidad de los diferentes resultados del juego.

El cuestionario evaluativo 4 corresponde a los juegos de concurso La rueda y espejito, espejito. Los ítems 1A, 1B y 1C corresponden al juego la rueda, los ítems 2A, 2B, 2C y 2D corresponden al juego espejtio, espejito.
En el ítem 1A se debe hacer una lista de los puntos muestrales con la combinación de los posibles resultados que se pueden presentar en los experimentos simples que componen el experimento compuesto (las dos oportunidades de girar la rueda) e identifican los puntos muestrales solicitados en la pregunta (Valor máximo – valor mínimo).

En el ítem 1B se espera que establezcan el número de veces que se presenta cada uno de los eventos para comparar sus probabilidades a partir del listado de los puntos muestrales. En este ítem 1C se espera que los estudiantes apliquen la Ley de Laplace y el principio de la suma para hallar la probabilidad de los eventos presentados en la pregunta teniendo presente el número de veces que se presentan cada uno de los eventos (suma de los puntos de los discos).

En el ítem 2 A se espera la determinación del cardinal del experimento compuesto de dos maneras: la primera, consiste en realizar un conteo de los puntos muestrales de un experimento compuesto a partir de un listado de todas las posibles combinaciones que se pueden obtener; y la segunda consiste en la aplicación del principio de la multiplicación para el conteo al multiplicar los cardinales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto.

En el ítem 2B se espera la aplicación de la Ley de Laplace y el principio de la suma para hallar la probabilidad de los eventos teniendo presente el número de veces que se presentan cada uno de los eventos.

El segundo ítem de la pregunta 2B plantea el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un evento simple (Ganar el premio). Se incluye el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos compuestos (Coincidir en la primera cifra del premio - Coincidir en la segunda cifra del premio) la cual se puede realizar de dos maneras: primero, considerándola como un experimento compuesto y la segunda simplificándola como un experimento simple al considerar únicamente los resultados de la primera o de la segunda cifra del premio.

En los ítems 1A, 1B, 1C, 2A y 2B, podría presentarse el sesgo de razonamiento combinatorio al no determinar correctamente el espacio muestral o asumir el experimento como simple. En el ítem 1B podría presentarse el sesgo de equiprobabilidad porque, a pesar de determinar de manera correcta el espacio muestral, podría asumir igualmente probables los posibles valores de la suma de los discos. Para los ítems 1B, 1C y 2B se podría observar el sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos" debido a que los valores de probabilidad solicitados podrían están respaldados por opiniones personales en lugar de justificarlo con el enfoque clásico de la probabilidad.

En el ítem 2C se espera la utilización de las frecuencias obtenidas en la corrida de mayor tamaño para determinar la veracidad de los enunciados probabilísticos a partir de la lectura de las frecuencias relativas. Al desarrollar el ítem 2D se espera que los estudiantes establezcan un tamaño de corrida en el cual las frecuencias relativas empiezan a estabilizarse. Al resolver estos ítems podría observarse la ley de los pequeños números. En el ítem 2C podría utilizar la información proveniente de la corrida de menor tamaño para evaluar la veracidad de los enunciados de probabilidad presentados. En el ítem 2D, el anterior error podría presentarse al considerar que la corrida de menor tamaño es suficiente para garantizar una información confiable.

Además, en los ítems 2C y 2D podría presentar el sesgo "debido a la facilidad para recuperar ejemplos". En ítem 2C se podría evaluar la veracidad de los enunciados de probabilidad, anteponiendo la opinión que tiene el estudiante acerca del juego, frente a los datos estadísticos suministrados en la situación. En el ítem 2D Es posible que el estudiante adivine el número de juegos sin observar la tendencia de las frecuencias relativas.

Por medio de la siguiente tabla se relacionan las Heurísticas y Sesgos probabilísticos que se pueden presentar en los diferentes ítems de los cuestionario evaluativos. Se aclara que en este estudio no se pretende verificar la presencia de estos sesgos en el grupo analizado de estudiantes.

Prueba	Ítem	Sesgo							
		Representatividad						Disponibilidad	
		Ley de los pequeños números	"recencia positiva" o "negativa" (Piaget e Inhelder, 1951).	Juicios sobre frecuencias	Sesgo de la equiprobabilidad	Sesgo del enfoque aislado	Concepción errónea de las secuencias aleatorias	Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos	Sesgos de Razonamiento Combinatorio
CE1	A							X	X
	B							X	X
	C			X	X			X	X
	D							X	
	E							X	
	F	X						X	
	G					X		X	
CE2	A					X		X	
	B								X
	C				X			X	
	D							X	X
	E							X	X
CE3	A								X
	B								X
	C		X				X		
	D							X	X
	E			X					
	F							X	
	G							X	
	H							X	
CE4	1 A								X
	1 B				X				X
	1 C							X	X
	2 A							X	X
	2 B							X	X
	2 C	X							X
	2 D	X						X	

Tabla 27. Heurísticas y Sesgos en cada ítem de los cuestionarios evaluativos

6. TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se describen los niveles de avance en las respuestas reportadas por el grupo analizado de estudiantes, a partir de la información de las pruebas diagnósticas (PD) y los cuestionarios evaluativos (CE). Esta descripción está organizada tabularmente de acuerdo a las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad y los niveles de la taxonomía SOLO (Biggs & Collins, 1982). Su propósito es describir la evolución en las ideas probabilísticas que podría presentarse en cuatro tipos de estudiantes: preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional. En el Anexo L "*Ejemplos de respuestas categorizadas*" se presentan algunas respuestas de los estudiantes en las pruebas diagnósticas y cuestionarios evaluativos que respaldan dicha descripción.

6.1. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS Y ENFOQUES DE PROBABILIDAD.

Con el fin de garantizar que las categorías de análisis y los enfoques de probabilidad son analizados a través los ítems diseñados en las pruebas diagnósticas y los instrumentos evaluativos, estos se relacionan por medio de las siguientes tablas.

Categoría	Subcategoría	Pruebas/Instrumentos			
		Diagnóstico PD		Evaluativa CE	
		Prueba	Ítem	Prueba	Ítem
Comparación de Probabilidades	Comparación de Probabilidades en experimentos simples	1	2	3	E
		2	4		
	Comparación de Probabilidades en experimentos compuestos	3	1	2	E
				4	B
Aleatoriedad	Concepto experimento aleatorio	1	1-B	2	A
		1	3-B		
	Ideas sobre secuencias aleatorias	1	1-A	3	1C
	Tratamiento de Intuiciones			2	D
				2	E
	Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales	1	3	1	G
Tablas de Frecuencia	Completar datos faltantes	2	1-A	1	D
				3	F
	Interpretación de frecuencias	3	4	1	E
		2	1-B	1	F
		2	1-C	3	G
				3	H
				4	2C
Espacio Muestral	Enumeración de puntos muestrales – Experimento Simple			3	A
	Cardinal de espacio muestral – Experimento Simple			3	B
	Enumeración de puntos muestrales – Experimento Compuesto	2	2	2	B
		3	1		
	Cardinal de espacio muestral – Experimento Compuesto			1	A
		3	1	4	2 A
Eventos	Eventos Simples– Experimento Simple	2	1B	3	D1
		3	2A		
	Eventos Compuestos– Experimento Simple	2	1C	3	D
		2	3	3	E
		3	2		
	Eventos Simples– Experimento Compuesto	3	1	1	A
		3	3	4	1 A

				4	1 B
				4	2 B1
	Eventos Compuestos– Experimento Compuesto	3	1	1	B
				1	C
				4	1 C
				4	2 B
Cálculo de Probabilidades	Aplicación Ley de Laplace en experimentos simples	1	2	3	D
		2	1B		
		2	3		
		2	4		
	Aplicación Ley de Laplace en experimentos compuestos	3	3	1	A
				1	B
				1	C
				4	1 C
				4	2 B
	Regla del Producto	3	3	1	B2
				4	1C
				4	2B1
	Regla de la Suma	2	1C	1	B1
		2	3	1	C
				3	D
				4	2B
Interpretación Diagramas de Barras		3	2	2	C
Convergencia Estocástica		3	4	1	F
				4	2C
				4	2D

Tabla 28. Relación de las categorías de análisis con los ítems de las pruebas diagnósticas y los instrumentos evaluativos

Fase	Instrumento	Ítem	Enfoque de Probabilidad		
			Intuitivo	Frecuencial	Clásico
Diagnóstica	PD1	1 A		X	
		1 B		X	
		2			X
		3 A	X	X	
		3 B	X	X	
		3 C	X	X	
	PD2	1 A		X	
		1 B		X	
		1 C		X	
		2			X
		3			X
		4			X
	PD3	1			X
		2 A		X	
		2 B		X	
		2 C		X	
		3			X
		4		X	
Evaluativa	CE1	A			X
		B			X
		C			X
		D		X	
		E		X	
		F	X	X	

		G		X	
	CE2	A		X	
		B			X
		C	X		
		D	X		X
		E	X		X
	CE3	A			X
		B			X
		C		X	
		D			X
		E			X
		F		X	
		G		X	
		H		X	
	CE4	1 A			X
		1 B			X
		1 C			X
		2 A			X
		2 B			X
		2 C		X	
		2 D		X	

Tabla 29. Relación de los ítems de las pruebas diagnósticas y los cuestionarios evaluativos con los enfoques de probabilidad.

6.2. DESCRIPCIÓN DE RESPUESTAS

Para describir los niveles de avance en las respuestas manifestado por el grupo de estudiantes al abordar situaciones de probabilidad bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico se han elaborados tablas que relacionan las categorías de análisis de probabilidad y los cuatro niveles de razonamiento de la taxonomía SOLO. De esta manera, para cada categoría de análisis se crea una tabla de cuatro columnas, correspondiente a los niveles de avance en las respuestas, organizados progresivamente de izquierda a derecha, las celdas de dicha tabla contienen los descriptores de las categorías de análisis para cada nivel.

6.2.1. Aleatoriedad

Concepto experimento aleatorio

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Asume resultados de una variable física predecibles como si los resultados siempre fueran determinísticos. **P2.** Piensa que el azar se puede llegar a reducir si se manipulan las variables físicas asociadas al experimento. **P3.** Asume la probabilidad de acierto del próximo resultado de un experimento aleatorio como cambiante. **P4.** Explica la obtención de un resultado de un experimento sin atender a evidencia frecuencial asociada al mismo. **P5.** Consideran válidas las probabilidades en los eventos, cuando la distribución de probabilidad de los resultados obtenidos por experimentación coincide con la distribución de probabilidad dada en la situación. **P6.** Considera posible predecir el resultado del experimento debido a un conocimiento aparente de las condiciones del mismo. **P7.** Sustenta la impredecibilidad del próximo resultado en un experimento aleatorio a partir de argumentos personales.	**U1.** Justifica la imposibilidad de predecir un resultado aleatorio debido a condiciones cambiantes del azar. **U2.** Considera imposible predecir el próximo resultado, al depender de factores del azar. Además, considera que las secuencias se puede presentar cualquier orden en los resultados. **U3.** Reconoce el carácter aleatorio del experimento, pero no tiene en cuenta las frecuencias presentadas en la situación. **U4.** Considera imposible predecir el resultado del experimento al reconocer que existen diferentes combinaciones de resultados	**M1.** Asume que los resultados con menor probabilidad de ocurrencia se pueden presentar en el próximo resultado del experimento. **M2.** Establece la validez del ensayo del experimento como un caso particular del experimento realizado por el experto. **M3.** Considera imposible predecir el resultado del experimento analizando el número de opciones posibles	**R1.** Reconoce la impredecibilidad del próximo resultado. Además, calcula la probabilidad de ocurrencia de uno de los eventos del experimento. **R2.** Asume que los resultados menos frecuentes también pueden ocurrir, sustentándola con la probabilidad de dicho evento.

Ideas sobre secuencias aleatorias

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Argumenta la aparición de las secuencias sin patrón a través de justificaciones físicas u opiniones personales. **P2.** Asume en la secuencia la presencia de valores no contemplados en el espacio muestral. **P3.** Argumenta la aparición de cualquier secuencia a partir de opiniones personales.	**U1.** Consideran únicamente probables los resultados obtenidos directamente a través de la experimentación. **U2.** Indica que cualquier secuencia es probable, debido al carácter impredecible del experimento.	**M1.** Asume que la secuencia sin patrón es la más probable, porque estas son más aleatorias; por lo que las secuencias regulares o con algún patrón son poco probable. **M2.** Asume las secuencias igualmente probables debido a su carácter aleatorio; pero no se puede asegurar el orden de aparición de los resultados. **M3.** Al realizar el experimento es poco probable obtener el mismo resultado en varias repeticiones seguidas **M4.** Se consideran poco probables las secuencias constantes o con algún patrón definido.	**R1.** Asume que cualquiera de las secuencias son igualmente probables, respalda esta afirmación con el valor de probabilidad de cada uno de los elementos que la conforma.

Tratamiento de Intuiciones

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No contrasta los resultados obtenidos bajo el enfoque intuitivo con el enfoque clásico o frecuencial. **P2.** Emite un juicio acerca de la razonabilidad de los valores de una distribución de probabilidad a partir de un juicio personal como la equiprobabilidad de eventos. **P3.** Para establecer la validez de las intuiciones de un individuo, asume supuestos personales (intuiciones primarias).			

Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales - Determinación del resultado más probable

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Anteponen opiniones personales al resolver situaciones de índole probabilística. **P2.** A través de la representación pictórica de la situación da opiniones personales a la misma, sin tener en cuenta las frecuencias dadas en el enunciado. **P3.** Considera más probable, el evento con menor frecuencia. **P4.** Considera que el próximo resultado es equivalente al valor más probable, de tal manera que éste no se puede establecer con seguridad. **P5.** Considera que no es posible la ocurrencia del evento menos probable.	**U1.** No es posible predecir un resultado particular en un experimento aleatorio.	**M1.** Establece más probable el evento con mayor frecuencia. **M2.** Es posible obtener el evento menos probable del experimento. **M3.** Identifica el evento más probable a partir de las frecuencias obtenidas por la aplicación del enfoque frecuencial.	**R1.** Considera que el evento menos probable puede presentarse en un ensayo del experimento justifica el resultado con las frecuencias presentadas en la situación.

Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales - Comparación de valores de probabilidad obtenidos a partir de corridas de diferente tamaño del mismo experimento.

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Respalda su respuesta con supuestos que no se basan en la información de la situación. **P2.** Valida enunciados probabilísticos basándose en argumentos personales.	**U1.** Asume que las frecuencias relativas obtenidas de dos corridas de diferente tamaño, extraídas del mismo experimento, deben ser iguales.	**M1.** Asume que para diferentes corridas, de un mismo experimento, se debe mantener el orden de los eventos de acuerdo a la posibilidad de ocurrencia.	**R1.** Al comparar las frecuencias de dos repeticiones del experimento, de diferente tamaño, evalúa la validez del enunciado comparando el orden de los eventos de acuerdo al grado de ocurrencia. **R2.** En diferentes corridas, compara las proporciones de las frecuencias de los eventos.

6.2.2. Espacio Muestral

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Simple

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Conjetura acerca del grado de probabilidad de ocurrencia de los resultados del experimento **P2.** Se dificulta enumerar los elementos del espacio muestral **P3.** Asume los resultados de un experimento simple como un experimento compuesto	**U1.** Realiza el listado de todos los puntos muestrales del experimento sin seguir un patrón definido	**M1.** Realiza el listado de los todos los puntos muestrales del experimento siguiendo un patrón definido	**R1.** Lista todos los puntos muestrales y establece su respectivo valor de probabilidad **R2.** Indica el número de veces que se repiten cada uno de los resultados del experimento**.**

Cardinal de espacio muestral – Experimento Simple

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Considera el cardinal del espacio muestral como el número de experimentos o al número de resultados formados por un punto muestral. **P2.** Considera que el cardinal del espacio muestral es el máximo valor del experimento. **P3.** Asume el cardinal del espacio muestral como un listado de las combinaciones de algunos resultados del experimento simple realizado varias veces.	**U1.** Considera el cardinal del espacio muestral como el listado de los puntos muestrales del experimento.	**M1.** Menciona el número de resultados presentes en el experimento sin justificar el resultado. Además, se resalta que el experimento simple se compone de una sola repetición.	**R1.** Obtiene el cardinal del espacio muestral respaldando su respuesta con el listado de los posibles resultados del experimento. **R2.** Obtiene el cardinal del espacio muestral y muestra este valor asignando una posición a cada elemento del espacio muestral.

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Compuesto

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Lista varios resultados posibles asumiendo una suposición "física" que podría explicar el resultado del experimento. **P2.** Utiliza una representación pictórica para comprender la situación, pero no la responde. **P3.** Lista puntos muestrales no presentes en el experimento. **P4.** Intenta describir el desarrollo del experimento pero no lista las combinaciones.	**U1.** Realiza un listado incompleto de los puntos muestrales del experimento y asume el valor de probabilidad con la enumeración de los casos posibles del experimento **U2.** Enumera de manera incompleta los casos posibles del espacio muestral. **U3.** Al listar elementos del espacio muestral repite puntos muestrales, sin mantener un orden. **U4.** Lista resultados del experimento combinando puntos muestrales del mismo experimento simple	**M1.** No sigue un patrón definido al listar todos los elementos del espacio muestral **M2.** Determina el espacio muestral de un experimento sin reemplazamiento como si éste fuera un experimento con reemplazamiento asumiendo un patrón. **M3.** Lista la mayoría de combinaciones del espacio muestral siguiendo un patrón. **M4.** Hace un listado de todas las opciones posibles en cada uno de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto siguiendo un patrón definido	**R1.** Determina todas las combinaciones posibles del espacio muestral siguiendo un patrón definido

Cardinal de espacio muestral – Experimento Compuesto

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Debido al carácter impredecible del experimento, no es	**U1.** Asume el cardinal del	**M1.** Determina los elementos del	

posible establecer la cantidad de resultados del mismo. **P2.** Asume el cardinal del experimento compuesto como el número de los experimentos simples. **P3.** Considera el cardinal del experimento como un listado de posibles opciones del experimento, combinado los resultados de los experimentos simples. **P4.** Considera el cardinal de un experimento compuesto como la suma de los cardinales de los experimentos simples que lo conforman.	experimento compuesto como el cardinal de uno de los experimentos simples que conforman dicho experimento. **U2.** Determina los elementos del espacio muestral pero no establece su cardinal	espacio muestral estableciendo su cardinal **M2.** Determina el cardinal del experimento a partir de la enumeración de las diferentes combinaciones del mismo; además utiliza este valor para el cálculo de probabilidades de los eventos	

6.2.3. Eventos

Eventos Simples– Experimento Simple

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Se dificulta determinar el punto muestral y el cardinal del evento, de tal manera que recurre a una opinión sin tener en cuenta los datos de la situación. **P2.** Utiliza información irrelevante para interpretar el enunciado del evento **P3.** Asume el número de eventos simples como el cardinal del evento.	**U1.** Asume el valor numérico del punto muestral como el cardinal del evento **U2.** Asume el valor numérico del punto muestral como su probabilidad de ocurrencia **U3.** Asume el valor numérico del evento como el cardinal del espacio muestral **U4.** Identifica el cardinal del evento y asume que el valor numérico del evento es igual al número total de casos posibles. **U5.** Identifica el punto muestral del evento y el cardinal del experimento, pero no el cardinal del evento.	**M1.** Realiza el cálculo del número de veces que se presenta el evento expresándolo en forma de porcentaje. **M2.** No emplea los operadores de orden para comparar la frecuencia de ocurrencia de un evento	**R1.** Establece de manera correcta el cardinal del evento simple para interpretar un enunciado probabilístico **R2.** Identifica tanto el cardinal del evento simple como del espacio muestral; relacionando estos valores con el cálculo de probabilidad por medio de la Ley de Laplace

Eventos Compuestos– Experimento Simple

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No identifica ningún punto muestral que hace parte del evento compuesto ni sus respectivos cardinales, empleando un supuesto acerca de la situación, ni emplea la información suministrada por el enunciado de la	**U1.** Considera los eventos compuestos disyuntos como eventos simples asumiendo equiprobabilidad entre éstos. **U2.** Establece el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto **U3.** Asume el evento compuesto como uno de los eventos simples que lo componen **U4.** Identifica algunos puntos muestrales	**M1.** No reconoce la negación del evento como su complemento **M2.** Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto planteado en la situación pero no los relaciona para el cálculo de su probabilidad **M3.** Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto planteado en la situación	**R1.** Identifica todos los puntos muestrales que hacen parte del evento estableciendo sus cardinales aplicando la Ley de Laplace para calcular su probabilidad de ocurrencia. **R2.** Identifica el evento compuesto por la unión de los puntos muestrales de los eventos del experimento **R3.** Establece el cardinal de los puntos muestrales que hacen parte del evento compuesto los suma para obtener el cardinal

situación. **P2.** No identifica los eventos simples que componen el evento compuesto. **P3.** Asume el valor numérico del evento como su cardinal	que hacen parte del evento pero no establece su cardinal. **U5.** Identifica un punto muestral que hacen parte del evento pero no establece su cardinal. **U6.** Identifica el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto; a partir de este calcula su probabilidad asumiendo este valor como la probabilidad del evento compuesto. **U7.** Asume el cardinal del evento compuesto como el mayor de los cardinales uno de los eventos simples que lo componen. **U8.** Identifica los cardinales de los todos los puntos muestrales del experimento sin identificar los puntos muestrales que forman el evento compuesto	pero no relaciona el operador “o” con la suma de estos cardinales **M4.** Establece los cardinales de los puntos muestrales de todos eventos compuestos planteados en la situación y con estos calcula su probabilidad sin identificar el evento compuesto planteado en la pregunta **M5.** Identifica un evento compuesto como la unión de varios eventos compuestos equiprobables; asumiendo estos eventos como los puntos muestrales del experimento. **M6.** Identifica por separado las probabilidades de los puntos muestrales que componen el evento	del evento compuesto y aplica la Ley de Laplace para obtener su probabilidad **R4.** Asume la frecuencia relativa de este evento como la suma de las frecuencias relativas de los eventos simples que lo componen **R5.** Identifica la negación del evento como la unión de los puntos muestrales que no pertenecen al evento, calculando el cardinal de la negación del evento como la diferencia entre el cardinal del espacio muestral y el cardinal del evento **R6.** Identifica los puntos muestrales que conforman los diferentes eventos analizados así como sus respectivas probabilidades sumándolas para establecer la probabilidad en cada uno de los eventos compuestos.

Eventos Simples – Experimento Compuesto

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No identifica los puntos muestrales del experimento. Asume que cualquier resultado se puede presentar y que tanto los eventos simples como los compuestos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. **P2.** Asume que los resultados de un experimento compuesto se pueden dar de diferentes formas. **P3.** No identifica el punto muestral de un experimento compuesto asumiendo el experimento como simple **P4.** Asume como punto muestral el resultado del uno de los experimento simples que componen el experimento compuesto; sin considerar el enunciado de la pregunta **P5.** No identifica o los identifica de manera incorrecta los puntos muestrales que cumplen con la condición planteada. **P6.** Considera el experimento compuesto como un	**U1.** Identifica un punto muestral del experimento como la combinación de puntos muestrales de varios experimentos simples, asume los puntos muestrales en los cuales la combinación se repite el resultado como un punto muestral de un experimento simple. **U2.** Reconoce el tipo de reposición de las extracciones y el número de experimentos simples que conforman el experimento compuesto; sin identificar el número de casos favorables. **U3.** Obtiene; sin justificar el punto	**M1.** Identifica los puntos muestrales del experimento compuesto como la combinación de los puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto **M2.** Realiza una lista incompleta de puntos muestrales del experimento y a partir de esta identifica el punto muestral que pertenece al evento simple **M3.** Identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples correspondientes al punto	**R1.** Identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples correspondientes al punto muestral del experimento compuesto reconoce el tipo de extracción (con/sin reposición). Además calcula su probabilidad de

experimento simple asumiendo el cardinal del evento simple como el número de experimentos simples que componen el experimento compuesto. **P7.** Asume como puntos muestrales del experimento compuesto los puntos muestrales de uno los experimentos simples que componen el experimento compuesto.	muestral del experimento que cumple ciertas condiciones; tiene en cuenta todas las restricciones del experimento. **U4.** Contempla un punto muestral del experimento que no pertenece al espacio muestral del mismo.	muestral del experimento compuesto pero no reconoce el tipo de extracción (con/sin reposición)	ocurrencia.

Eventos Compuestos– Experimento Compuesto

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No identifica los puntos muestrales que corresponden a los eventos compuestos del experimento **P2.** Asume que cualquier evento simple o compuesto del experimento tiene la misma probabilidad de ocurrencia **P3.** No identifica eventos compuestos presentes en una situación; únicamente detecta los puntos muestrales presentes en uno de los experimentos simples del experimento compuesto. **P4.** No utiliza los puntos muestrales de los experimentos simples para identificar los eventos presentes en la situación. **P5.** No identifica ningún evento del experimento; asumiendo que cualquier resultado se puede presentar. **P6.** Asume el valor numérico de uno de los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto como el cardinal del espacio muestral del experimento.	**U1.** Asume como evento simple un evento compuesto. **U2.** Intenta hallar combinaciones de los resultados de uno de los experimentos simples que hacen parte del experimento compuesto **U3.** Construye puntos muestrales del experimento compuesto asumiendo que los puntos muestrales de los diferentes experimentos simples que lo conforman se pueden intercambiar.	**M1.** Lista algunos puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto **M2.** Asume el evento compuesto como un punto muestral del experimento, evaluando su grado de probabilidad a través del enfoque frecuencial **M3.** Realiza un listado de los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto; pero no establece su cardinal para el cálculo de probabilidades.	**R1.** Realiza una lista de los puntos muestrales de los eventos del experimento estableciendo su cardinal.

6.2.4. Tablas de Frecuencia

Completar datos faltantes

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Utiliza información irrelevante al tratar de completar datos faltantes en la tabla de frecuencias. **P2.** Intenta completar las frecuencias absolutas sin tener en cuenta las frecuencias conocidas	**U1.** Identifica la frecuencia absoluta faltante por tanteo aunque la verifica obteniendo la frecuencia absoluta total. **U2.** Asume que la suma de las frecuencias relativas es del 100% sin	**M1.** Reconoce que falta información en la tabla, realiza dos operaciones y explica los procedimientos. **M2.** Identifica resultado donde se conoce tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa; calcula la frecuencia relativa en los resultados donde sólo se conoce la frecuencia absoluta y calcula la frecuencia absoluta en resultados donde se conoce la	**R1.** Presenta una expresión matemática o algoritmo para determinar los valores faltante. Además, interpreta los valores numéricos obtenidos. **R2.** Identifica resultado donde se conoce tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa; calcula la frecuencia relativa en los resultados donde sólo se conoce la frecuencia absoluta; calcula la frecuencia absoluta en resultados donde se conoce la frecuencia relativa y calcula tanto las frecuencias

P3. No reconoce la proporcionalidad entre las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas **P4.** No determina ninguna frecuencia a partir de los datos.	verificar este valor a partir de las frecuencias relativas de los resultados y sin calcular la frecuencia absoluta total a partir de la fila donde se conocen tanto la frecuencia absoluta como la relativa.	frecuencia relativa **M3.** Error en conteo de frecuencias absolutas de uno de los eventos; aunque determina sus frecuencias relativas correspondientes. **M4.** Determina de manera incorrecta la frecuencia absoluta de uno de los eventos y totaliza de manera correcta el número total de datos.	absoluta y relativa en los resultados donde no se conocen ambos valores **R3.** Identifica correctamente los resultados que corresponde a los eventos compuestos; realiza de manera correcta el recuento y calcula correctamente las frecuencias absolutas y relativas **R4.** Completa los valores de la tabla de frecuencia respaldando las frecuencias absolutas con el empleo de una tabla de conteo.

Interpretación de frecuencias

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No realiza lectura de los valores en tablas de frecuencias para establecer la probabilidad de ocurrencia de un evento simple. **P2.** Respuestas basadas en creencias personales. **P3.** Se dificulta identificar la frecuencia absoluta de un evento simple en una tabla de frecuencias. **P4.** Se dificulta identificar las frecuencias que conforman el evento compuesto. **P5.** Se dificulta vincular información proveniente de varias tablas **P6.** Asume el evento mismo como su frecuencia absoluta **P7.** Al calcular la frecuencia esperada de un evento bajo las mismas condiciones con un número diferente de repeticiones no asume invariables las frecuencias relativas. **P8.** No establece la veracidad de enunciados probabilísticos basado en la lectura de los valores de la tabla de frecuencias, antepone su opinión personal a la información disponible del problema. **P9.** Respalda con datos que no provienen	**U1.** Interpreta la frecuencia absoluta del evento como valor de probabilidad. **U2.** Se dificulta la interpretación del complemento de un evento. **U3.** Identifica la frecuencia absoluta del evento pero no asocia el valor de su probabilidad con la frecuencia relativa. **U4.** Identifica la frecuencia relativa del evento simple, pero no la frecuencia absoluta total. **U5.** Identifica el cardinal del espacio muestral, pero no las frecuencias del evento simple. **U6.** Asume la frecuencia relativa del evento como la frecuencia relativa del experimento, es decir con el 100% de los datos. **U7.** Relaciona la frecuencia relativa del evento con el tamaño de la población. **U8.** Asume la frecuencia absoluta del evento igual a la frecuencia relativa del mismo. **U9.** Se observa dificultad al determinar el valor desconocido de la igualdad de proporciones.	**M1.** Establece la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos pero no convierte correctamente a porcentaje. **M2.** Concibe el valor de la probabilidad como la razón entre el número de casos favorables del total de datos interpretado como el complemento del evento.	**R1.** Asume la probabilidad como porcentaje a partir de una razón. **R2.** Realiza de manera correcta una conversión de la frecuencia absoluta del evento a frecuencia relativa por medio de una regla de tres; asumiendo que el total de los individuos corresponde al 100% **R3.** Obtiene de manera aproximada el número de veces en que se espera aparezca el evento favorable utilizando una estrategia de razonamiento proporcional **R4.** Realiza una regla de tres asumiendo que el tamaño de la corrida es el 100% para encontrar la frecuencia absoluta que corresponde al evento cuya frecuencia relativa se conoce de otra corrida del mismo **R5.** Halla la frecuencia esperada del evento sabiendo que las frecuencias absolutas del evento analizado en varias corridas del mismo experimento guardan una proporcionalidad directa **R6.** Calcula la frecuencia esperada de un evento por medio de una regla de tres utilizando las frecuencias relativas de la tabla de frecuencias **R7.** Determina de manera correcta el tamaño de

de la tabla de frecuencias **P10.** Tiene en cuenta sólo las frecuencias que aparecen en la tabla de frecuencia. **P11.** Asume que el número total de ensayos del experimento es igual al número de resultados posibles.	**U10.** Establece la probabilidad de un evento como un rango a partir de la lectura de las frecuencias relativas del evento para los diferentes tamaños de corrida		la corrida asumiendo que este valor corresponde al 100% **R8.** Calcula la frecuencia esperada de un evento por medio de una regla de tres utilizando las frecuencias absolutas de la tabla de frecuencias

6.2.5. Interpretación de Diagramas de Barras

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Se dificulta la interpretación de porcentajes **P2.** Se dificulta la identificación de todos los eventos simples que conforman el evento compuesto. **P3.** Asume equiprobabilidad de los eventos mostrados en la gráfica, sin tener en cuenta las frecuencias representadas en el gráfico **P4.** Establece valores de probabilidad sin leer las frecuencias del gráfico	**U1.** Asume la altura de las barras como las frecuencias absolutas de los eventos, pero no establece los valores de probabilidad de ellos. **U2.** Asume la frecuencia relativa como la frecuencia absoluta del evento **U3.** Asocia a la frecuencia absoluta total la frecuencia de uno de los eventos simples que conforman el evento compuesto. **U4.** Asume la frecuencia relativa del evento como su cardinal **U5.** Lee de manera separada los porcentajes de los eventos simples que conforman el evento compuesto, sin establecer la frecuencia correspondiente a dicho evento. **U6.** Asume la barra más alta de la gráfica como el 100% de los datos.	**M1.** Identifica la frecuencia relativa del evento en el gráfico, la convierte en frecuencia absoluta; pero no utiliza dicha información para dar respuesta a la pregunta planteada	**R1.** Identifica la frecuencia relativa del evento en el gráfico y con ella determina la frecuencia absoluta del evento. **R2.** Identifica las frecuencias relativas de los eventos simples en el gráfico y aplica la regla de la suma para calcular el valor de probabilidad de la unión de dichos eventos. **R3.** Interpreta la probabilidad del complemento de un evento como la resta del 100% con su probabilidad. **R4.** Comprende que la probabilidad de ocurrencia del complemento del evento como la suma de las probabilidades de los eventos diferentes al evento en cuestión.

6.2.6. Cálculo de Probabilidades

Ley de Laplace en Experimentos Simples

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Desconoce razones de proporcionalidad que permiten utilizar equiprobabilidad. **P2.** Desvirtúa	**U1.** Asume el cardinal del evento como la probabilidad de ocurrencia del mismo **U2.** Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento multiplicando el valor numérico del evento por el cardinal del espacio muestral **U3.** Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento multiplicando el valor numérico del	**M1.** Calcula probabilidades como cociente entre cardinales de eventos disyuntos. **M2.** Calcula el valor de probabilidad de uno de los eventos del experimento simple, que conforman el evento compuesto, a partir de ley de Laplace **M3.** Al calcular probabilidades de un evento compuesto, intenta determinar la probabilidad de los eventos simples que	**R1.** Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento a partir del punto muestral y el cardinal del mismo **R2.** Establece el

aleatoriedad del experimento atribuyendo la posibilidad de controlar propiedades físicas del mismo. **P3.** Asume la probabilidad de un evento simple como la suma del valor numérico de varios puntos muestrales del experimento.	evento por el número de puntos muestrales del experimento **U4.** Identifica solamente el evento más probable. **U5.** Compara los cardinales de los puntos muestrales que no pertenecen al evento compuesto para establecer su grado de probabilidad **U6.** Para el cálculo de probabilidad de eventos compuestos en experimentos simples, establece el cardinal del evento compuesto a partir de la suma de los cardinales de los eventos simples que lo componen. **U7.** Establece el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto así como su valor de probabilidad **U8.** Considera la probabilidad como la razón entre el valor de numérico de los eventos simples que lo conforman y el número total de casos posibles.	lo componen, y no asume que el cardinal del espacio muestral del experimento corresponde a una probabilidad del 100% **M4.** Identifica los eventos simples del experimento compuesto y calcula por separado sus probabilidades, aplicando la Ley de Laplace tomando como numerador el número total de casos posibles y como denominador el número de casos favorables **M5.** Reconoce el evento más probable como aquel que tiene mayor cardinalidad. **M6.** Al determinar el valor de probabilidad de un evento compuesto, intenta aplicar la ley de Laplace en los experimentos simples de manera separada. **M7.** Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto plantea una regla de tres sin calcular su probabilidad **M8.** Establece el cardinal de los puntos muestrales que hacen parte del evento compuesto considerándolo como su valor de probabilidad	cardinal del evento compuesto sumando los cardinales de los eventos simples que lo componen y con base en este valor aplica la Ley de Laplace para el cálculo de su probabilidad. **R3.** En experimentos simples, al calcular la probabilidad de ocurrencia de un punto muestral divide al 100% entre el cardinal del espacio muestral

Aplicación Ley de Laplace en Experimentos Compuestos

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Asume equiprobabilidad en los puntos muestrales del experimento. **P2.** Da una opinión acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento, sin utilizar la información de la situación **P3.** Intenta aplicar la Ley de Laplace hallando la razón entre los cardinales de los experimentos simples **P4.** Intenta aplicar la Ley de Laplace hallando la razón entre el número y la suma de los cardinales de los experimentos simples que forman el experimento compuesto **P5.** No aplica la Ley de Laplace al respaldar su respuesta con una opinión acerca del resultado probable del juego **P6.** Intenta aplicar la Ley de Laplace asumiendo un sólo caso favorable y la suma de los cardinales de los experimentos simples como el número total de resultados posibles.	**U1.** En un experimento compuesto, aplica la ley de Laplace como si fuese un experimento simple. **U2.** En un experimento compuesto, determina el valor de probabilidad de un evento a través de una regla de tres como si fuese un experimento simple. **U3.** Establece un listado de las posibles combinaciones que cumplen la condición del evento, y calcula la probabilidad de dicho evento como la suma de las probabilidades de dos puntos muestrales de los experimentos	**M1.** Calcula la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto, reconociendo el tipo de extracción **M2.** En un experimento compuesto sin reposición, asume el mismo valor en el denominador al aplicar la Ley de Laplace **M3.** Establece los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto, los cuales	**R1.** Elabora una regla de tres considerando que el 100% es el cardinal del espacio muestral. Para hallar la probabilidad del evento pedido, asume la cantidad de elementos que cumple la condición del evento **R2.** A partir de un listado ordenado de los puntos muestrales del experimento;

P7. Muestra dificultad al identificar los casos favorables y los casos posibles **P8.** Para el cálculo de probabilidad de un evento de un experimento compuesto asume el experimento como simple **P9.** Asume el cardinal del espacio muestral como el número de casos favorables y el valor numérico del evento como el número de casos posibles. **P10.** Aplica de manera incorrecta la Ley de Laplace considerando que el número total de resultados posibles es igual al número de experimentos simples que componen el experimento compuesto **P11.** Da una opinión del grado de probabilidad de los eventos, sin respaldarla con la aplicación del enfoque clásico	simples que conforman el experimento compuesto. **U4.** Establece la probabilidad como el número de veces en que puede aparecer el evento **U5.** Asume que el valor de probabilidad es igual al número de casos favorables **U6.** Asume el valor de probabilidad como el número de casos que cumplen la condición del evento compuesto	son concebidos al aplicar la Ley de Laplace como los casos favorables y asume el número total de casos como la suma de los cardinales de los experimentos simples. **M4.** Al calcular el valor de probabilidad en experimentos compuesto, establece las probabilidades de los experimentos simples que lo componen, sumando las probabilidades anteriores	plantea una regla de tres para hallar el porcentaje que corresponde al número de puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto con respecto al número total de puntos muestrales del experimento

Regla del Producto

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Da una opinión del grado de probabilidad del evento. **P2.** Interpreta la situación como un experimento simple. **P3.** Debido al carácter aleatorio del experimento, no es posible determinar el valor de ocurrencia **P4.** Se dificulta la aplicación de la regla del producto al hallar el cardinal y la probabilidad conjunta de un punto muestral en un experimento compuesto	**U1.** Lista algunos puntos muestrales del experimento. **U2.** Al determinar la probabilidad en experimentos compuestos, calcular el valor de probabilidad de uno de los experimentos simples a través de una regla de tres	**M1.** Calcula por separado la probabilidad de los eventos simples que conforman el evento del experimento compuesto, pero no tiene en cuenta que es un muestreo sin reposición. **M2.** Realiza por separado el cálculo de las probabilidades condicionales por medio de una regla de tres sin establecer su probabilidad conjunta. **M3.** Calcula las probabilidades de los eventos que forman el evento de manera simultánea y luego aplica el principio de la suma para calcular su probabilidad conjunta **M4.** Realiza por separado el cálculo de probabilidad de los experimentos simples a través de una regla de tres	

Regla de la Suma

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. No establece la probabilidad de ninguno de los eventos que hacen de la unión.	**U1.** Calcula la probabilidad de uno de los puntos muestrales que conforman el evento	**M1.** Considera la probabilidad de la unión de dos eventos como la resta de las probabilidades de estos eventos. **M2.** Calcula la probabilidad de un evento compuesto en un experimento simple multiplicando los cardinales	**R1.** Suma los cardinales de los eventos simples que conforman el evento compuesto para obtener el número de casos favorables del evento compuesto; para luego aplicar la Ley de Laplace. **R2.** Calcula la probabilidad de los cada uno de los

	compuesto.	de los eventos simples que componen el evento compuesto. **M3.** Calcula por separado la probabilidad de los puntos muestrales. sin asociar este cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto como la suma de los eventos simples que lo componen.	puntos muestrales del evento compuesto del experimento simple luego suma los valores de probabilidad **R3.** Calcula la probabilidad de los puntos muestrales del evento compuesto y suma las probabilidades de los eventos simples que conforman el evento compuesto.

6.2.7. Comparación de Probabilidades

Comparación de Probabilidades en experimentos simples

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Asume que la probabilidad de ocurrencia de un evento entre diferentes experimentos es igual teniendo presente un argumento físico. **P2.** Asume equiprobabilidad en el espacio muestral del experimento, sin tener en cuenta la información dada en la situación. **P3.** Asume imposible un evento seguro **P4.** Asume probable un evento seguro **P5.** Considera probable un evento imposible	**U1.** Asume que el experimento en el que hay mayor cantidad de objetos, incrementa las probabilidades de ocurrencia de un evento y cambian las proporciones de base que definen la asignación de probabilidades. **U2.** Asume que el experimento en el que hay menor cantidad de objetos aumentan las probabilidades **U3.** En diferentes experimentos que conservan la relación de orden de los cardinales de los eventos, asume igualmente probable la ocurrencia de ellos. **U4.** Identifica el evento más probable como el de mayor repetición en el espacio muestral.	**M1.** Identifica las frecuencias relativa y absoluta tanto del espacio muestral como del evento analizado, teniendo dificultad en la comparación de la frecuencia absoluta del evento ante a un valor establecido (Relación de orden) **M2.** Determina el experimento con mayor probabilidad de ocurrencia a través la comparación entre la diferencia de los cardinales de los eventos. **M3.** Reconoce la proporción de los eventos en diferentes experimentos. **M4.** Al establecer el evento con mayor probabilidad de ocurrencia en dos experimentos, plantea una razón entre los cardinales de dos eventos para estos experimentos **M5.** En diferentes experimentos, un evento es igualmente probable cuando se conserva la proporción entre los cardinales de los eventos	**R1.** Aplica la fórmula de Laplace para establecer el grado de probabilidad de un evento en diferentes experimentos aleatorios y los compara en diferentes representaciones (fracción, decimal, porcentaje). **R2.** Identifica el evento más probable calculando su probabilidad por medio de una regla de tres o mediante la Ley de Laplace **R3.** Establece el grado de probabilidad de diferentes eventos comparando los elementos del espacio muestral con la descripción del evento.

Comparación de Probabilidades en experimentos compuestos

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Compara el grado de probabilidad del evento teniendo en cuenta los puntos muestrales de un experimento simple **P2.** Considera que no es posible establecer el valor de probabilidad del evento debido a la aleatoriedad del experimento. **P3.** Asume equiprobabilidad en los eventos del experimento,	**U1.** Lista algunos resultados del experimento y asume equiprobabilidad en ellos. **U2.** Establece el grado de probabilidad de un evento compuesto a través de la experimentación **U3.** Considera más fácil obtener secuencias sin repetición pero no cuantifica su probabilidad, de tal manera que un	**M1.** Establece el número de casos favorables de los resultados del experimento y a partir de estos	

sin tener en cuenta el espacio muestral. **P4.** Argumenta su respuesta con creencias personales, desconociendo la información de la situación **P5.** Realiza una comparación basada en argumentos físicos concediéndole un carácter determinístico a un experimento aleatorio **P6.** Lista algunos puntos muestrales del experimento (combinaciones) pero no evalúa su grado de probabilidad **P7.** Considera el experimento como simple, asume equiprobable los eventos **P8.** Argumenta su respuesta con creencias personales **P9.** Asigna valores de probabilidad, atendiendo al valor numérico del evento, sin tener en cuenta el número de casos favorables.	punto muestral que resulta de la combinación de diferentes elementos es más probable que un punto muestral compuesto por elementos iguales **U4.** Considera el punto muestral cuya combinación se compone de resultados diferentes como el más probable. **U5.** Asigna menor valor de probabilidad al elemento del espacio muestral que poseen los mismo elementos. **U6.** Establece la veracidad de enunciados probabilísticos a partir de una distribución de probabilidad que presenta valores incorrectos de probabilidad **U7.** A partir de un listado incompleto de los puntos muestrales del experimento, establece el grado de probabilidad del evento teniendo en cuenta el número de veces que se presenta el experimento.	compara probabilidades (puntos muestrales).	

6.2.8. Convergencia Estocástica

Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
P1. Asume el valor numérico del evento como un elemento más de la frecuencia absoluta del mismo. **P2.** Da respuesta acorde a lo que cree más probable del experimento, sin tener en cuenta los resultados del experimento. **P3.** Establece la confiabilidad de los valores de una distribución de probabilidad basado en opinión personal **P4.** Establece un tamaño propuesto de corrida sustentándolo a partir de una creencia personal, sin observar los valores de la tabla.	**U1.** Intenta calcular la frecuencia relativa de uno de los eventos utilizando la información proveniente de las corridas de menor tamaño **U2.** Plantea conclusiones con la lectura de frecuencias de la corrida más pequeña del experimento **U3.** Consolida las frecuencias absolutas de las corridas para cada resultado del experimento restando a la frecuencia mayor las otras. **U4.** Realiza una lectura de las frecuencias relativas de la tabla, pero no compara dicho valor con el enfoque clásico para establecer un grado de confiabilidad **U5.** Reconoce que la frecuencia del evento es la obtenida en la corrida de mayor tamaño, pero se muestra dificultad en la comprensión de enunciados probabilísticos.	**M1.** Consolida las frecuencias absolutas de los eventos, para las diferentes corridas, y asume un valor aproximada de las frecuencias relativas. **M2.** Establece un rango del tamaño de la corrida del experimento, a partir de la lectura de las tablas, observando la estabilización de las frecuencias relativas.	**R1.** Toma los resultados del ensayo más grande y concluye correctamente. **R2.** Realiza una estimación del tamaño de corrida bajo la cual se empiezan a estabilizar los porcentajes.

6.3. INFORME ESTADÍSTICO DESCRIPTIVO

En esta sección se presenta un informe estadístico descriptivo acerca de la clasificación de los resultados obtenidos en la fase diagnóstica y la fase evaluativa por el grupo estudiantes de grado undécimo.

El tratamiento de los resultados estadísticos se realiza a través de los siguientes pasos:

• Clasificación de las respuestas en cada uno de los ítems de las pruebas diagnósticas y cuestionarios evaluativos de acuerdo a los niveles de la taxonomía SOLO.

• Recuento de la cantidad de respuestas por ítem y nivel en cada uno de los cuestionarios.

• Relación de los ítems de las pruebas diagnósticas y cuestionarios evaluativos con las categorías de análisis y los enfoques de probabilidad.

• Consolidación del número de respuestas por categoría de análisis y nivel, y por enfoque de probabilidad y nivel.

• Cálculo de frecuencias relativas a través del porcentaje obtenido en cada categoría de análisis y nivel, y por enfoque de probabilidad y nivel.

Con el propósito de cumplir el objetivo específico "presentar un reporte general de los niveles de clasificación de las respuestas frente a las tareas diagnósticas y evaluativas" se muestra el porcentaje de respuestas ubicadas en los niveles de la taxonomía SOLO, comparando los resultados obtenidos en los cuestionarios evaluativos y las pruebas diagnósticas en cada una de las categorías de análisis de los enfoques de probabilidad. Este informe presenta un panorama aproximado de la evolución de las ideas probabilísticas del grupo de estudiantes en estudio, pero no pretende generalizar a otros grupos de estudiantes. A continuación se muestra el comparativo porcentual para cada categoría de análisis.

Comparación de Probabilidades

Subcategoría	**Preestructural**			**Uniestructural**			**Multiestructural**			**Relacional**		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Experimento Simple	30.1%	23.5%	**6.6%**	41.9%	19.1%	**22.8%**	17.2%	**52.9%**	**35.7%**	10.8%	4.4%	**6.3%**
Experimento Compuesto	66.0%	**70.1%**	4.2%	29.8%	25.4%	**4.4%**	2.1%	4.5%	2.3%	2.1%	0.0%	**2.1%**

Al comparar probabilidades en experimentos simples se observa avance hacia el nivel multiestructural respaldada principalmente por las disminuciones ocurridas en los niveles preestructural y uniestructural. Cabe notar que en la fase evaluativa más de la mitad de las respuestas se ubican en el nivel multiestructural.

Al comparar probabilidades en experimentos compuestos se observa un pequeño retroceso en el nivel de respuestas, al pasar del nivel uniestructural al nivel preestructural y del nivel relacional al nivel multiestructural. Adicionalmente, los resultados de la fase evaluativa muestran que casi el 70% de las respuestas son clasificadas en el nivel preestructural.

Aleatoriedad

Subcategoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Concepto experimento aleatorio	42.2%	**52.6%**	10.4%	35.6%	**36.8%**	1.3%	18.9%	10.5%	**-8.4%**	3.3%	0.0%	**-3.3%**
Ideas sobre Secuencias Aleatorias	24.4%	**35.3%**	10.8%	53.3%	**47.1%**	**-6.3%**	20.0%	17.6%	**-2.4%**	2.2%	0.0%	**-2.2%**
Tratamiento de Intuiciones	----	**86.8%**	---	----	13.2%	---	----	0.0%	---	----	0.0%	---
Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales	33.3%	**55.6%**	22.2%	33.3%	**38.9%**	5.6%	27.4%	5.6%	**-21.9%**	5.9%	0.0%	**-5.9%**

Con respecto a esta categoría se observa que el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles superiores de la taxonomía SOLO disminuye; siendo esta situación más evidente en la subcategoría “Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales”. Para la fase evaluativa, en la subcategoría “tratamiento de intuiciones” se observa que cerca del 87% de los estudiantes se ubican en el nivel preestructural; en las demás subcategorías los resultados se ubican en los niveles preestructural y uniestructural principalmente.

Tablas de Frecuencia

Subcategoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Completar datos faltantes	12.5%	**34.3%**	**21.8%**	18.8%	**20.0%**	1.3%	56.3%	**20.0%**	**-36.3%**	12.5%	**25.7%**	**13.2%**
Interpretación de frecuencias	41.3%	**73.9%**	32.6%	30.8%	11.9%	**-18.8%**	18.2%	3.7%	**-14.5%**	9.8%	10.4%	0.7%

Al completar datos faltantes en tablas de frecuencia, algunos estudiantes ubicados en el nivel multiestructural avanzaron al nivel relacional (13,2%) y otros bajaron a los niveles preestructural (21.8%) y uniestructural (1.3%). Sin embargo, en la fase evaluativa las respuestas de los estudiantes se distribuyen casi de manera uniforme en todos los niveles.

Al interpretar frecuencias se observa que estudiantes de los niveles uniestructural y multiestructural pasaron al nivel preestructural, quedando en la fase evaluativa, cerca del 74% de las respuestas en el nivel preestructural.

Espacio Muestral en experimentos simples

Subcategoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Enumeración de puntos muestrales	----	21.4%	---	----	0.0%	---	----	**64.3%**	---	----	**14.3%**	---
Cardinal de espacio muestral	----	23.5%	---	----	11.8%	---	----	52.9%	---	----	11.8%	---

Al enumerar el espacio muestral en experimentos simples se observa que la mayoría de los estudiantes reportan respuestas clasificadas en los niveles multiestructural (64.3%) y relacional (14.3%). Al determinar el cardinal del espacio muestral se presenta el mismo comportamiento de respuesta con nivel multiestructural (52.9%) y relacional (11.8%).

Espacio Muestral en experimentos compuestos

Subcategoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Enumeración de puntos muestrales	48.4%	0.0%	-48.4%	37.9%	0.0%	-37.9%	9.5%	**100.0%**	90.5%	4.2%	0.0%	-4.2%
Cardinal de espacio muestral	66.0%	38.2%	-27.7%	29.8%	38.2%	8.4%	2.1%	20.6%	18.5%	2.1%	2.9%	0.8%

Al enumerar puntos muestrales en experimentos compuestos, se observa un avance en el nivel de las respuestas entre las fases evaluativa y diagnóstica, al registrar un mayor incremento de las respuestas ubicadas en el nivel “multiestructural”. En la fase evaluativa, todos los estudiantes se ubicaron en el nivel multiestructural.

Respecto al cardinal del espacio muestral, los estudiantes pre estructurales mostraron avances hacia los niveles uniestructural y multiestructural. En la fase evaluativa se observa que las respuestas se ubican, con el mismo porcentaje, en los niveles preestructural y uniestructural.

Eventos en experimentos simples

Subcategoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif

Eventos Simples	22.1%	**17.6%**	-4.5%	33.7%	**23.5%**	-10.2%	23.2%	41.2%	18.0%	21.1%	17.6%	-3.4%
Eventos Compuestos	30.8%	**25.5%**	-5.3%	38.0%	**19.6%**	-18.4%	16.0%	39.2%	23.2%	15.2%	15.7%	0.5%

Aunque se observa avance hacia el nivel multiestructural al abordar situaciones que implican eventos simples y compuestos, cerca del 41% y 45% de los estudiantes respectivamente, aún están en los niveles preestructural y uniestructural posterior a la fase evaluativa.

Eventos en experimentos compuestos

Subcategoría	**Preestructural**			**Uniestructural**			**Multiestructural**			**Relacional**		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Eventos Simples	61.7%	57.1%	-4.6%	29.8%	29.6%	-0.2%	6.4%	8.2%	1.8%	2.1%	5.1%	3.0%
Eventos Compuestos	66.0%	65.3%	-0.7%	29.8%	18.6%	-11.1%	2.1%	11.0%	8.9%	2.1%	5.1%	3.0%

En esta categoría, se puede observar un avance hacia los niveles multiestructural y relacional por parte de los estudiantes ubicados en el nivel uniestructural. Sin embargo, posterior a la fase evaluativa, cerca del 83% de los estudiantes aún se ubican en los niveles preestructural y uniestructural.

Cálculo de probabilidades

Subcategoría	**Preestructural**			**Uniestructural**			**Multiestructural**			**Relacional**		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Aplicación Ley de Laplace	37.1%	46.6%	9.5%	44.6%	21.8%	-22.8%	9.4%	18.9%	9.5%	8.9%	12.6%	3.7%
Regla del Producto	57.4%	65.9%	8.4%	29.8%	19.5%	-10.3%	10.6%	8.5%	-2.1%	2.1%	6.1%	4.0%
Regla de la Suma	39.6%	40.9%	1.3%	39.6%	19.0%	-20.6%	15.6%	21.9%	6.3%	5.2%	18.2%	13.0%

Con respecto a la Ley de Laplace se observa el paso de estudiantes uniestructural hacia los niveles preestructural y multiestructural respectivamente, con el mismo valor porcentual; aunque en la fase evaluativa, casi la mitad de los estudiantes aún se encuentran en el nivel preestructural.

Respecto a la regla del producto, se observa un descenso en los niveles porque los estudiantes pasaron del nivel uniestructural y multiestructural al nivel preestructural, al finalizar la fase evaluativa con el 66% de los estudiante en el nivel preestructural.

Respecto a la regla de la suma, se observa el paso de estudiantes uniestructural hacia los niveles multiestructural y relacional; sin embargo, aún cerca del 50% de los estudiantes se reportan en los niveles preestructural y uniestructural.

Interpretación de gráficos de barras- Convergencia Estocástica

Categoría	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Gráficos de barras	24.8%	52.6%	27.8%	36.9%	47.4%	10.5%	16.3%	0.0%	-16.3%	22.0%	0.0%	-22.0%
Convergencia Estocástica	31.9%	80.6%	48.7%	38.3%	10.2%	**-28.1%**	27.7%	3.1%	**-24.6%**	2.1%	6.1%	4.0%

Al interpretar gráficas de barras, en la fase evaluativa, los estudiantes se encuentran en los niveles preestructural y uniestructural. Situación similar se observa en la categoría convergencia estocástica ya que cerca del 90% de los estudiantes en encuentran en los niveles preestructural y uniestructural.

Con respecto a los enfoques de probabilidad, el enfoque intuitivo registra el mayor porcentaje de estudiantes ubicados en el nivel preestructural; siendo este resultado determinado principalmente en la fase evaluativa.

Aspecto	Preestructural			Uniestructural			Multiestructural			Relacional		
	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif	Diag	Eval	Dif
Intuitivo	33.3%	80.0%	46.7%	33.3%	20.0%	**-13.3%**	27.4%	0.0%	**-27.4%**	5.9%	0.0%	**-5.9%**
Frecuencial	32.0%	61.9%	29.9%	34.3%	21.0%	**-13.3%**	22.8%	7.8%	**-15.0%**	11.0%	9.3%	**-1.6%**
Clásico	33.5%	44.0%	10.6%	43.2%	19.5%	**-23.7%**	17.4%	28.3%	10.9%	5.9%	8.2%	2.2%

En general, para los tres enfoques de probabilidad, el porcentaje de respuestas en el nivel preestructural aumentó al comparar los resultados presentados en la fases evaluativa en relación a la diagnóstica; mientras que en los niveles uniestructural, multiestructural y relacional se reporta una disminución de los porcentajes de respuesta.

7. CARACTERIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Este capítulo presenta una caracterización de los niveles de avance en la estructura de las respuestas en las siguientes categorías de análisis de los enfoques de probabilidad: Aleatoriedad, espacio muestral, eventos, tablas de frecuencia, interpretación de diagramas de barras, cálculo de probabilidades, comparación de probabilidades y convergencia estocástica, teniendo en cuenta los descriptores identificados en el numeral 6.2.

7.1. ALEATORIEDAD

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada una las subcategorías relacionadas con el concepto de aleatoriedad, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Experimento aleatorio

Con respecto al concepto experimento aleatorio, se observa que un estudiante clasificado en el **nivel preestructural**, otorga un carácter determinístico a los experimentos aleatorios al considerar predecibles sus resultados, considerando la posibilidad de manipular el azar por medio de ciertas variables asociadas al mismo. Además, expresa la posibilidad de predecir o no un evento a partir de argumentos basados en intuiciones primarias (opiniones personales). Por otra parte, un estudiante en el **nivel uniestructural** considera imposible predecir la ocurrencia de ciertos eventos, al reconocer que existen diferentes combinaciones de resultados que obedecen a condiciones cambiantes del azar, sin tener en cuenta información frecuencial ligada a la situación. Un estudiante clasificado en el **nivel multiestructural** valida el ensayo del experimento como un caso particular del mismo, reconoce la impredecibilidad del próximo resultado analizando el número de opciones posibles, de tal manera que los resultados con menor probabilidad de ocurrencia se pueden presentar en el próximo resultado del experimento. Finalmente, un estudiante del **nivel relacional**, asume que los resultados menos frecuentes también pueden ocurrir, sustentando la anterior afirmación con el valor de probabilidad de dicho evento.

Secuencias aleatorias

En relación a las ideas sobre secuencias aleatorias se observa que un estudiante clasificado en el **nivel preestructural**, argumenta la aparición de secuencias sin patrón a través de justificaciones físicas u opiniones personales e incluso en algunos casos sugiere que en la secuencia es posible la presencia de valores no contemplados en el espacio muestral; por otra parte, en secuencias de valores numéricos, el estudiante puede considerar que las secuencias que evidencian mejor la aleatoriedad, son aquellas cuyo elementos constituyentes tienen una suma más grande; por ejemplo, la secuencia 1, 3, 5 y 2 es considerada menos probable que la secuencia 10, 30, 50 y 20, a pesar de que ambas sean esencialmente iguales. En el **nivel uniestructural**, un estudiante indica que cualquier secuencia es probable, debido al carácter impredecible del experimento. Algunos estudiantes consideran únicamente verdaderas las secuencias realmente obtenidas a través de una experimentación personal, evidenciándose sesgo ley de los pequeños números al concluir sobre una corrida pequeña (10 lanzamientos de la moneda) del experimento. En el

nivel multiestructural, el estudiante considera las secuencias igualmente probables debido a su carácter aleatorio, además agrega que no se puede determinar de antemano el orden de aparición de los resultados en las mismas y considera poco probable obtener secuencias con el mismo resultado o con algún patrón definido. Un estudiante del **nivel relacional,** asume que cualquiera de las secuencias son igualmente probables, debido a que todos los elementos poseen la misma probabilidad y justifica esta afirmación con el valor de probabilidad obtenido por el enfoque clásico.

Tratamiento de intuiciones

Con respecto al tratamiento de intuiciones se observa que un estudiante del **nivel preestructural,** muestra dificultad para contrastar los resultados obtenidos en el enfoque intuitivo con el clásico y frecuencial, emitiendo juicios de los valores de probabilidad a partir de supuestos como la equiprobabilidad de eventos y recurriendo, en algunos casos, a opiniones personales.

Interpretación de probabilidades en términos frecuenciales para determinar el resultado más probable

Con respecto a esta subcategoría, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural** antepone opiniones personales al resolver situaciones de índole probabilística, desconociendo los resultados obtenidos a través de la aplicación del enfoque frecuencial; recurriendo, por ejemplo, al conocimiento que posee de la situación o a su representación pictórica, evidenciándose el empleo de la heurística de la disponibilidad. Por esa razón, puede considerar el evento de menor frecuencia como el más probable o puede suponer como imposible la ocurrencia del evento menos probable; también es posible que considere el resultado a obtener en el siguiente ensayo del experimento como el resultado más probable del mismo. Al respecto, Serrano (1996) destaca los siguientes argumentos que podrían tipificarse en este nivel:

> *a) Creencia en que ha habido un error en los datos del problema y en la equivalencia entre alta probabilidad y seguridad en la ocurrencia del suceso.*
> *b) Búsqueda de razones de tipo causal para explicar un suceso no esperado. (p. 156)*

Por otra parte, un estudiante del **nivel uniestructural,** considera que no es posible predecir un resultado particular en un experimento aleatorio sin tener en cuenta los datos suministrados en la situación, tal como lo plantea Serrano (1996) *"c) Justificar los resultados por la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos" (p. 156).* En el caso de un estudiante del **nivel multiestructural,** considera la posibilidad de obtener el evento menos probable del experimento o asume el evento más probable aquel que posee mayor frecuencia. Finalmente un estudiante del **nivel relacional,** considera que el evento menos probable puede presentarse en un ensayo del experimento, además emplea el valor de las frecuencias presentadas en la situación para justificar su respuesta.

Interpretación de probabilidades en términos frecuenciales para comparar los valores de probabilidad obtenidos de corridas de diferentes tamaños del mismo experimento.
Con respecto a este aspecto, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural** basa su respuesta en argumentos personales con supuestos relacionados con situaciones familiares, desconociendo la información de la misma al validar enunciados probabilísticos; por otra parte, un estudiante del **nivel uniestructural** asume que los porcentajes de probabilidad obtenidos en corridas de diferente tamaño, generadas del mismo experimento deben ser iguales evidenciándose el sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra, al desconocer la variabilidad de los resultados. Un estudiante del **nivel multiestructural**, concluye que la relación de orden de los eventos se debe mantener, sin que las frecuencias tengan el mismo valor. Finalmente un estudiante del **nivel relacional**, concluye que para corridas de diferente tamaño provenientes del mismo experimento, las proporciones de las frecuencias de los eventos con respecto al tamaño de la corrida deben estar cercanas.

7.2. ESPACIO MUESTRAL

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada una las subcategorías relacionadas con el concepto de espacio muestral, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Enumeración de puntos muestrales en un experimento simple
Con respecto a la enumeración de puntos muestrales en un experimento simple, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural** presenta dificultad al enumerar los elementos del espacio muestral al asumir que la determinación del espacio muestral es equivalente a estimar el valor de probabilidad de ocurrencia de los diferentes resultados del experimento. Además, algunos estudiantes enumeran los resultados de un experimento simple como si se tratara de un experimento compuesto. Un estudiante en el **nivel uniestructural** establece el espacio muestral realizando una lista de algunos o todos los puntos muestrales del experimento sin seguir un orden definido. En el caso de un estudiante del **nivel multiestructural,** se observa que establece el espacio muestral a través de una lista de todos los puntos muestrales del experimento siguiendo un orden definido. Finalmente un estudiante del **nivel relacional**, realiza una lista de todos los puntos muestrales asociando su respectivo valor de probabilidad, indicando el número de veces que se repiten cada uno de los resultados del experimento.

Cardinal del espacio muestral en experimentos simples
Con respecto a la determinación del cardinal del espacio muestral en experimentos simples, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** puede considerar el cardinal del mismo como “1” porque el resultado en un experimento se obtiene con un lanzamiento o una extracción. En el caso de eventos números es posible asociar el cardinal del espacio muestral como el máximo valor; algunos estudiantes pueden asumir del cardinal del espacio muestral como un listado de las combinaciones de los resultados del experimento simple.

En el **nivel uniestructural,** un estudiante puede considerar el cardinal del espacio muestral como el listado de los puntos muestrales del experimento en lugar de la cantidad de elementos del mismo. En el caso de un estudiante del **nivel multiestructural,** éste menciona el número de resultados del experimento sin justificar el resultado, resaltando que en los experimentos simples se realiza una sola repetición. Finalmente, en el **nivel relacional,** la obtención del cardinal del espacio muestral está respaldada con el listado de los posibles resultados del experimento, de tal manera que algunos estudiantes justifican este valor asignando una posición a cada elemento del espacio muestral.

Enumeración de puntos muestrales en experimentos compuestos

Con respecto a la enumeración de puntos muestrales en experimentos compuestos, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural**, intenta describir el desarrollo del experimento a través de una representación pictórica de la situación, asumen suposiciones "físicas" para tratar de explicar los posibles resultados del experimento. En el **nivel uniestructural**, algunos estudiantes realizan un listado incompleto de los puntos muestrales del experimento, otros repiten algunos puntos muestrales del mismo, sin mantener un orden; en otras respuestas se obtienen los resultados del experimento a partir de la combinación de puntos muestrales dentro de los mismos experimentos simples que conforman el experimento compuesto. Un estudiante del **nivel multiestructural**, enumera la mayoría de combinaciones del espacio muestral siguiendo un patrón; en algunos casos no sigue un criterio de ordenamiento al listar todos los elementos del espacio muestral; para el caso de experimentos compuestos sin reemplazamiento, un estudiante de este nivel lo puede considerar como si éste fuera un experimento con reemplazamiento determinando los puntos muestrales del experimento siguiendo un patrón. Por último; en el **nivel relacional**, un estudiante determina todas las combinaciones posibles del espacio muestral siguiendo un patrón definido, teniendo presente el tipo de extracción de los elementos al formar el espacio muestral.

Cardinal del espacio muestral en experimento compuesto

Con respecto a la determinación del cardinal del espacio muestral en experimentos compuestos, se observan los siguientes rasgos: En el nivel **preestructural**, algunos estudiantes asumen imposible establecer la cantidad de resultados del experimento debido al carácter impredecible del mismo; otros estudiantes tratan de establecer el cardinal asociándolo al número de los experimentos simples que lo conforman o como la suma de los cardinales de los experimentos simples que hacen parte de éste; otros estudiantes consideran el cardinal como un listado de posibles opciones del experimento, combinado los resultados de los experimentos simples. Un estudiante en el **nivel uniestructural,** asume el cardinal del experimento compuesto como el cardinal de uno de los experimentos simples que lo conforman; otros determinan los elementos del espacio muestral pero no establece su cardinal. En el **nivel multiestructural,** el estudiante establece el cardinal del espacio muestral del experimento a partir de un listado de los puntos muestrales del mismo; además algunos estudiantes emplean el cardinal en el cálculo de probabilidades de los eventos. Finalmente**,** el **nivel relacional** no se evidenció en el grupo de estudiantes al no utilizar el principio de la multiplicación como técnica de conteo para establecer el cardinal de un experimento compuesto.

7.3. EVENTOS

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada una de las subcategorías relacionadas con el concepto evento, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Eventos simples en experimento simple

En relación a esta subcategoría, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** se le dificulta determinar el punto muestral y el cardinal del evento, al recurrir a una opinión sin tener en cuenta los datos de la situación. Un estudiante del **nivel uniestructural** identifica el punto muestral que corresponde al evento simple, pero no su cardinal; para eventos numéricos es posible que considere su valor (número como etiqueta) como su cardinal o su probabilidad de ocurrencia. Un estudiante clasificado en el **nivel multiestructural** identifica tanto el punto muestral, que corresponde al evento simple, y el cardinal lo asume como el valor de probabilidad dado en porcentaje. Finalmente en el **nivel relacional,** un estudiante realiza el cálculo de su probabilidad de ocurrencia a partir del punto muestral y el cardinal que corresponde al evento simple y a partir del valor de probabilidad interpreta y/o valida enunciados probabilísticos.

Eventos compuestos en experimento simple

Con respecto a esta subcategoría, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** no identifica al menos un punto muestral del evento compuesto ni su respectivo cardinal; para el caso de experimentos cuyos resultados son numéricos, relaciona dicho valor con su probabilidad de ocurrencia. En el **nivel uniestructural,** es posible que el estudiante: identifique uno o algunos puntos muestrales que corresponden a un evento compuesto presentando dificultad al establecer el cardinal de cada uno de estos puntos muestrales; además puede considerar los eventos compuestos como equiprobables sin atender a su frecuencia de ocurrencia; o asumir el cardinal del evento compuesto como el mayor de los cardinales de los eventos simples que lo conforman. En el **nivel multiestructural,** un estudiante establece de manera separada todos los puntos muestrales de los eventos simples que conforman el evento compuesto así como sus cardinales o su valor de probabilidad, en este nivel aún no relaciona el operador “o” con la unión o la suma de eventos, de tal manera que no los une para establecer el cardinal o la probabilidad del evento compuesto; también es posible que no considere la negación del evento como su complemento. Finalmente, en el **nivel relacional,** el estudiante identifica los puntos muestrales del evento compuesto así como sus cardinales y lo establece como la unión de los eventos simples que lo componen o como el complemento de los eventos simples que no le pertenecen, relacionando el cardinal del evento compuesto con el cálculo de su probabilidad**.**

Eventos simples en experimentos compuestos

Con respecto a esta subcategoría, se observa que un estudiante clasificado en el **nivel preestructural,** no reconoce que un punto muestral de un experimento compuesto se compone de la combinación de puntos muestrales de experimentos simples. Por otra parte, cuando el elemento del espacio muestral está compuesto con n-úplas de valores repetidos, el estudiante del **nivel uniestructural** sólo muestra uno de los elementos repetidos; además, es posible que determine el evento simple a partir de un punto muestral que no pertenece al especio muestral del experimento. En el **nivel multiestructural,** un estudiante identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples, correspondientes al punto muestral del experimento compuesto, pero presenta dificultad al reconocer el tipo de extracción. Un estudiante del **nivel relacional,** identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples, correspondientes al punto muestral del experimento compuesto, reconociendo el tipo de extracción (con/sin reposición) y calculando además su probabilidad de ocurrencia.

Eventos compuestos en experimento compuesto

Con respecto a esta subcategoría, un estudiante ubicado en el **nivel preestructural,** presenta dificultad al identificar puntos muestrales del experimento compuesto al desconocer los puntos muestrales de los experimentos simples que lo conforman; además, al no utilizar la información del experimento, supone que eventos simples y compuestos tienen el mismo grado de probabilidad. Para el nivel uniestructural, un estudiante identifica los experimentos simples que conforman el experimento compuesto; determina los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto, pero olvida el carácter distinguible de los resultados provenientes de los experimento simples que conforman el experimento compuesto, al no tener en cuenta el orden de los elementos de la n-upla. En el **nivel multiestructural,** un estudiante realiza el listado de algunos puntos muestrales correctos del evento compuesto. Finalmente, un estudiante d**el nivel relacional,** realiza el listado de todos los puntos muestrales del evento compuesto estableciendo correctamente su cardinal.

7.4. TABLAS DE FRECUENCIA

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada subcategoría relacionada con tablas de frecuencia, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Completar datos faltantes

Con respecto a esta subcategoría, un estudiante del **nivel preestructural** no tiene en cuenta los datos conocidos de la tabla de frecuencias, al inventar valores al completarla recurriendo así a intuiciones primarias a través de opiniones personales acerca de la situación. Al avanzar hacia **el nivel uniestructural**, un estudiante calcula algunas frecuencias desconocidas de la tabla sin verificar que la frecuencia relativa total debe corresponder al 100% de los datos. **En el nivel multiestructural**, un estudiante completa datos faltantes a través del siguiente procedimiento: inicialmente, identifica el resultado (fila de la tabla) donde se conoce tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa; luego, calcula la frecuencia relativa en los resultados donde sólo se conoce la frecuencia absoluta y finalmente calcula la frecuencia absoluta en resultados donde se conoce la frecuencia relativa. En este nivel, es posible que realice incorrectamente el conteo de las frecuencias absolutas en los eventos, aunque determine correctamente el total de datos y el correspondiente cálculo de frecuencias relativas. **En el nivel relacional,** un estudiante completa datos faltantes de una tabla de frecuencias siguiendo el procedimiento del nivel multiestructural calculando, además, las frecuencias absoluta y relativa en los resultados (filas de las tablas) donde no se conocen ambos valores. Además, propone también una expresión matemática o algoritmo para determinar los valores faltantes e interpreta los valores numéricos obtenidos.

Interpretación de frecuencias

Con respecto a esta subcategoría, se observa que un estudiante del **nivel preestructural,** no realiza una lectura de los valores o presenta dificultad al identificar las frecuencias de los eventos en tablas de frecuencias, de tal manera que puede presentar respuestas basadas en creencias personales o respaldadas con datos que no provienen de ellas. Además, puede asumir que el número total de ensayos del experimento es igual al número de resultados posibles; en el caso de eventos numéricos puede considerar el evento mismo como su frecuencia absoluta, y en el caso de eventos compuestos, no vincula información proveniente de varias tablas. **En el nivel uniestructural,** un estudiante asume la frecuencia absoluta del evento como el valor de probabilidad; además se evidencia dificultad al interpretar el complemento de un evento y al determinar el valor desconocido de la igualdad de proporciones. También es posible que establezca la probabilidad de un evento como un rango a partir de la lectura de las frecuencias relativas del evento. Un estudiante ubicado en el **nivel multiestructural,** determina la probabilidad de ocurrencia de un evento como la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos, presentando dificultad al convertir el valor de probabilidad en forma porcentual**;** finalmente, un estudiante clasificado en el **nivel relacional,** emplea las proporciones para hallar e interpretar probabilidades con los datos de una tabla de frecuencia, reconoce que el total de los individuos corresponden al 100% de los datos y que el cálculo de probabilidades está ligado a la determinación de las frecuencias relativas; también halla la frecuencia esperada de un evento o el tamaño esperado de una corrida por medio de una regla de tres utilizando las frecuencias relativas o las frecuencias absolutas de la tabla de frecuencias.

7.5. INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS DE BARRAS

Con respecto a la interpretación de diagramas de barras, se observa que un estudiante clasificado en el **nivel preestructural,** desconoce la información del gráfico (identificación de los eventos simples y sus frecuencias) considerando igualmente probables los eventos, suponiendo o inventando datos. En el **nivel uniestructural,** compara los eventos de acuerdo a su grado de probabilidad a partir de la altura de las barras del diagrama, pero no cuantifica las frecuencias o lo hace de manera incorrecta; en algunos casos, asume que la frecuencia del evento con la barra más alta corresponde al 100%. **En el nivel multiestructural,** identifica los eventos y el valor de las frecuencias, pero se dificulta la conversión de frecuencias absolutas en relativas y viceversa. **En el nivel relacional,** utiliza las frecuencias para establecer probabilidades en eventos simples y eventos compuestos.

7.6. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada subcategoría relacionada con el cálculo de probabilidades, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Aplicación de la ley de Laplace en experimentos simples

Con respecto a la aplicación de la ley de Laplace en experimentos simples, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** presenta dificultad al cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un evento desconociendo nociones de proporcionalidad. En eventos numéricos, asume su valor como el número de casos favorables, para un estudiante en este nivel es posible que considere un evento simple como uno compuesto. En el **nivel uniestructural,** un estudiante ordena eventos de acuerdo a su probabilidad teniendo en cuenta el número de casos favorables. Para cuantificar el valor de probabilidad omite el empleo de las proporciones y, en algunos casos, considera el cardinal del evento como la probabilidad de ocurrencia. Un estudiante en el **nivel multiestructural,** identifica el número de casos favorables y el número total de resultados, evidenciando el empleo de las proporciones al hallar la razón entre los cardinales de los eventos como un indicador que permite comparar eventos de acuerdo al grado de probabilidad. En este nivel el estudiante aún no reconoce la probabilidad como la razón de la parte con respecto al todo. Finalmente un estudiante ubicado en el **nivel relacional,** relaciona el número de casos favorables como el número total de resultados a través de una razón, expresa e interpreta el valor de probabilidad en los diferentes sistemas de representación numérico (fracción, decimal, porcentual).

Aplicación de la ley de Laplace en experimentos compuestos

Con respecto a la aplicación de la ley de Laplace en experimentos compuestos, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** presenta dificultad al identificar los puntos muestrales del experimento compuesto, además, asigna probabilidades basando su respuesta en intuiciones primarias sin aplicar el enfoque clásico. **En el nivel uniestructural,** un estudiante aplica la ley de Laplace para uno de los experimentos simples que componen el experimento compuesto. En el **nivel multiestructural,** el estudiante calcula por separado las probabilidades de los puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto. Por último un estudiante situado en **el nivel relacional,** aplica la ley de Laplace a partir del listado completo de los puntos muestrales del experimento, identificando el número de casos favorables como el número total de resultados.

Regla del producto

Con respecto a la regla del producto, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** opina acerca del grado de probabilidad del evento simple en un experimento compuesto considerando que no se puede determinar el valor de probabilidad debido al carácter aleatorio del experimento; en algunos casos, puede considerar un evento simple de un experimento compuesto como un evento compuesto de un experimento simple. En el **nivel uniestructural,** un estudiante establece, únicamente, la probabilidad de ocurrencia del punto muestral de uno de los experimentos simples que conforma el punto muestral del experimento compuesto. Un estudiante clasificado en el **nivel multiestructural,** establece de manera separada la probabilidad de ocurrencia de los puntos muestrales de algunos o todos los experimentos simples que conforman el punto muestral del experimento compuesto. Finalmente el **nivel relacional,** no se evidenció en el grupo de estudiantes analizado, al no aplicar la regla del producto en la determinación del punto muestral del experimento compuesto.

Regla de la suma

Con respecto a la regla de la suma, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural**, presenta dificultad al obtener la probabilidad de los eventos simples que componen el evento compuesto. En el **nivel uniestructural**, un estudiante calcula la probabilidad de uno de los puntos muestrales que conforman el evento compuesto. Un estudiante ubicado en el **nivel multiestructural**, calcula la probabilidad de todos o varios puntos muestrales que conforman el evento compuesto pero interpreta incorrectamente la unión de los eventos simples al restar o multiplicar las probabilidades de los eventos simples que la componen. Finalmente el estudiante en el **nivel relacional,** calcula las probabilidades de todos los puntos muestrales de los eventos simples que componen el evento compuesto e interpreta correctamente la unión de probabilidades a través de la regla de la suma.

7.7 COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

En este apartado se describe la evolución en la estructura de las respuestas, en cada una las subcategorías relacionadas con la comparación de probabilidades, acorde a los niveles de la Taxonomía SOLO.

Comparación de probabilidades en experimentos simples

Con respecto a la comparación de probabilidades en experimentos simples se observa que un estudiante en el **nivel preestructural**, asume equiprobabilidad de los eventos simples o compuestos, supone que el valor de probabilidad de un evento se puede manipular por medio de una variable física y en algunos casos presenta dificultad al clasificar un evento como imposible, probable o seguro. En el **nivel uniestructural**, un estudiante asume que el experimento con mayor o menor cardinal es aquel que tiene mayor probabilidad de ocurrencia de un evento y los ordena teniendo en cuenta la cantidad de elementos que lo conforman. Un estudiante ubicado en el **nivel multiestructural**, compara los eventos por medio de las razones de sus cardinales, presentando dificultad al reconocer el cardinal del evento como la parte y el cardinal del espacio muestral como el todo. Finalmente en el **nivel relacional**, un estudiante compara probabilidades basado en la aplicación de la ley de Laplace o asume su cálculo como un problema de proporcionalidad.

Comparación de probabilidades en experimentos compuestos

Con respecto a la comparación de probabilidades en experimentos compuestos en el **nivel preestructural**, a un estudiante se le dificulta identificar los puntos muestrales de un experimento compuesto, de tal manera que compara probabilidades sin tener en cuenta los cardinales de los eventos y considera imposible establecer la probabilidad de ocurrencia de los eventos debido al carácter impredecible del experimento aleatorio; además de asumir equiprobabilidad en los eventos, otorga un carácter determinístico en un experimento aleatorio y considera un experimento compuesto como uno simple. Para eventos con valor numérico, utiliza este valor para realizar la comparación de eventos de acuerdo a su grado de probabilidad. **En el nivel uniestructural**, un estudiante determina los puntos muestrales del evento en el experimento compuesto y asume equiprobabilidad en ellos. Además, considera más probable los puntos muestrales conformados por la combinación de resultados sin repetición. Un estudiante ubicado **en el nivel multiestructural**, tiene en cuenta el número de casos favorables (relación entre los cardinales de los eventos) al comparar las probabilidades. **En el nivel relacional**, se esperaría que la comparación de las probabilidades de eventos en experimentos compuestos esté respaldada con la aplicación de la Ley de Laplace y el principio de la multiplicación y para el caso de eventos compuestos adicionalmente con el empleo de la regla de la suma. Este caso no se evidenció en el grupo de estudiantes analizados.

7.8 CONVERGENCIA ESTOCÁSTICA

Con respecto a la convergencia de las frecuencias relativas, se observa que un estudiante en el **nivel preestructural,** no tiene en cuenta los resultados de las diferentes corridas de un experimento aleatorio, de tal manera que sus respuestas están basadas en intuiciones primarias. Para el caso de un estudiante clasificado en el **nivel uniestructural,** se observa que respalda sus respuestas en los valores de probabilidad de las corridas más pequeñas, sin reconocer la estabilización de las frecuencias relativas al aumentar el número de ensayos del experimento; además, se dificulta establecer el tamaño de la corrida bajo la cual se estabilizan las frecuencias relativas. En el **nivel multiestructural**, un estudiante analiza la consolidación de las diferentes corridas de un experimento y establece un rango del tamaño de la corrida del experimento bajo la cual empiezan a estabilizarse las frecuencias relativas. Finalmente se observa que un estudiante ubicado en el **nivel relacional**, reconoce la convergencia de las frecuencias relativas hacia los valores calculados bajo el enfoque clásico al aumentar el tamaño de la corrida del experimento, además reconoce un tamaño de corrida con el menor número de datos posible bajo el cual comienzan a estabilizarse las frecuencias relativas.

8. CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo organizadas en cuatro apartados. En el primero, se realiza una revisión del cumplimiento de los objetivos del estudio, el segundo trata sobre el diseño de las pruebas diagnósticas y evaluativas, el tercero presenta aspectos relativos a los resultados observados en la fase de instrucción y el último aborda la caracterización de las respuestas del grupo de estudiantes desde los tres enfoques de probabilidad contemplados en este trabajo.

RESPECTO A LOS OBJETIVOS DEL ESTUDIO

En relación al objetivo general, en este trabajo se exploró el avance en la estructura de las respuestas a tareas que involucran los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad en un grupo de estudiantes de undécimo grado; esta descripción se concreta en el capítulo 7. Cabe advertir que los resultados obtenidos no pretenden ser una generalización a los mismos. A través de las respuestas se descubren las ideas presentes en los estudiantes acerca de los enfoques de probabilidad.

Al realizar el análisis de la estructura de las respuestas, es posible realizar una analogía entre los niveles de razonamiento de la Taxonomía SOLO con las etapas de evolución en el pensamiento probabilístico planteadas por Way (2003), de tal modo que la etapa "*pensamiento no probabilístico*" puede relacionarse con el nivel *"preestructural"* o *"idiosincrásico"*, la etapa "*pensamiento probabilístico emergente*" se puede relacionar con el nivel *uniestructural*", y finalmente la etapa "*cuantificación de la probabilidad*" se puede relacionar con los niveles *multiestructural y relacional*.

En este trabajo se plantearon unos objetivos específicos que contribuyen de manera conjunta al logro del objetivo general. En este apartado se verifica su logro a través del desarrollo de los diferentes capítulos del trabajo de grado.

En el capítulo 2 se categorizan los enfoques de probabilidad a partir de los referentes conceptuales de los mismos. Al revisarlos se reconoce el empleo de las heurísticas como procedimientos propios de la aplicación del enfoque intuitivo mientras que el empleo de los "algoritmos" se evidencia con la aplicación del enfoque clásico de probabilidad. En este análisis se verifica que la mayoría de categorías de análisis son abordadas bajo los tres enfoques de probabilidad, excepto las siguientes:

- La categoría *"cálculo de probabilidades"* se aborda únicamente en el enfoque clásico ya que la aplicación de la ley de Laplace, la regla del producto y la regla de la suma son procedimientos exclusivos de este enfoque.
- La categoría *"convergencia estocástica"* está enmarcada bajo los enfoques frecuencial y clásico ya que la ley de los grandes números se verifica al comparar los valores de probabilidad obtenidos bajo los anteriores enfoques.

Las categorías propuestas en este trabajo podrían ser un modelo para reflexionar acerca de las ideas probabilísticas manifestadas por los estudiantes al desarrollar tareas acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad, debido a que el planteamiento de estas categorías se fundamentó en un trabajo real en el aula de clases y sobre las respuestas del grupo de estudiantes a las pruebas diagnósticas y evaluativas.

El análisis de sistemas de representación y el planteamiento de situaciones fueron los referentes conceptuales que guiaron el diseño de tareas dirigidas a la enseñanza (capítulo 4), el diagnóstico (capítulo 3) y la evaluación (capítulo 5) de los enfoques de probabilidad tratados en este estudio. Al respecto se observa que el sistema de representación más empleado es el tabular con el registro de los valores de las probabilidades obtenidos bajo los diferentes enfoques a través de tablas de frecuencias; asimismo el tipo de situaciones que aparece más recurrentemente fue el público.

RESPECTO AL DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS: DIAGNÓSTICO, Y EVALUATIVO.

Para el diseño de las tareas diagnósticas y evaluativas se analizaron situaciones que involucraban ideas probabilísticas, en particular se recurre al análisis de juegos de concurso presentados en programas de televisión, como es el caso del "El precio es correcto" acompañado de su experimentación real.

Las categorías de análisis "Cálculo de Probabilidades" e "Interpretación de Diagramas de Barras", aparecen con más y menos frecuencia en los ítems de las pruebas respectivamente. Observando los enfoques de probabilidad, el diseño de los instrumentos diagnóstico y evaluativo centran su atención hacia los enfoques frecuencial (23 ítems) y clásico (21 ítems), en contraste con el enfoque intuitivo (7 ítems), el cual merece para futuros estudios se preste más atención.

El diseño de los ítems de las pruebas diagnósticas y evaluativas no contempla la obtención de respuestas que puedan ser categorizadas en el nivel abstracto extendido de la taxonomía SOLO, al tener en cuenta que los estudiantes no habían recibido instrucción previa acerca de los conceptos básicos de probabilidad.

Para próximas investigaciones se sugiere incorporar esquemas de verificación a las respuestas, debido a que se pueden dar a entender una idea cuando en realidad refleja otra, mostrando así que la correspondencia entre lo escrito y lo expresado verbalmente puede ser diferente.

RESPECTO A LOS RESULTADOS OBSERVADOS EN LA FASE DE INSTRUCCIÓN

Las conclusiones planteadas en este apartado son basadas en el análisis a las respuestas consignadas por los estudiantes, en las guías de instrucción de los enfoques de probabilidad (intuitivo, frecuencial y clásico). Los siguientes anexos respaldan la anterior descripción: Anexo H "*Reporte de implementación tarea travesía del río*", anexo I "*Reporte de* *implementación tarea laberintos”,* Anexo J *“Reporte de implementación tarea aparato de Galton*” y anexo K *“Reporte de implementación tarea quinielas”.*

Con respecto al enfoque intuitivo, en la asignación de probabilidades en experimentos simples, (ver Anexo H), se observó que un estudiante en el *nivel preestructural* asigna iguales probabilidades a los diferentes eventos sin analizar los diferentes resultados, evidenciándose el sesgo de equiprobabilidad (Díaz, 2003; Serrano, 1996); o basan sus respuestas en experiencias personales (Díaz, 2003). *Un estudiante uniestructural* tiene en cuenta al menos un posible resultado, identificando ya sea el evento más o menos probable y toma esta información para asignar probabilidades; en el caso de un *estudiante multiestructural*, tiene en cuenta más de un resultado, aunque todavía no asigna probabilidades con el empleo de las proporciones; finalmente un *estudiante relacional* respalda sus intuiciones con el empleo del enfoque clásico, a través de la aplicación de la Ley de Laplace, reconociendo la determinación de probabilidades como un problema de proporcionalidad directa.

Al momento de validar las probabilidades asignadas bajo el enfoque intuitivo, un estudiante *preestructural* no utiliza los valores dados por los enfoques frecuencial y clásico, en lugar de ello valida dichos valores con opiniones sustentadas en intuiciones primarias (Serrano, 1996). En el caso *uniestructural,* el estudiante compara al menos un resultado con otro enfoque de probabilidad sin cuantificar la diferencia. Los niveles *multiestructural y relacional* no se evidenciaron en este aspecto, al no cuantificar la diferencia para comparar los valores con los diferentes enfoques de probabilidad.

Con respecto a la ideas previas del enfoque intuitivo, se observa que un estudiante en el *nivel preestructural* describe su estrategia de asignación de probabilidades para un experimento en particular; un *estudiante uniestructural* reconoce que este enfoque depende de la opinión de las personas y en el caso de un *estudiante multiestructural* asocia este enfoque a una asignación de probabilidades antes de realizar el experimento y reconoce que es el método menos elaborado para establecer las probabilidades.

Durante el proceso de instrucción del enfoque intuitivo se identifican dos escenarios: En el primero, los estudiantes cuantifican sus intuiciones acerca del comportamiento de un experimento aleatorio registrándolas en tablas de probabilidad. En el segundo caso, el estudiante puede asumir el rol de traductor de intuiciones de otros individuos, siendo capaz de establecer tablas de probabilidad sin dejarse influenciar por sus propias intuiciones y preconceptos. Se resalta que en la enseñanza de este enfoque se parte del establecimiento de probabilidades arbitrarias, hasta llegar al empleo de estrategias de cálculo proporcional (Ver Anexo K Reporte de implementación Tarea Quinielas – Estrategia Magno).

En relación al enfoque frecuencial, la mayoría de estudiantes organizan los resultados experimentales en tablas de conteo y posteriormente en tablas de frecuencia; sin embargo, al interpretarlas reportan ideas del nivel preestructural, al plantear conclusiones contradictorias respecto a los valores registrados. Además, se observa que al interpretar el comportamiento de las frecuencias relativas al aumentar el tamaño de la corrida del experimento, la mayoría de estudiantes no identifican la convergencia de las frecuencias relativas hacia las probabilidades obtenidas por el enfoque clásico.

La aplicación del enfoque frecuencial con experimentación directa de materiales y recursos en situaciones de azar (juegos de tablero, laberintos, aparato de Galton) permite el desarrollo de intuiciones más elaboradas para llegar al empleo de los principios probabilísticos.

Con respecto a la definición del enfoque frecuencial, un estudiante en el *nivel preestructural* describe el procedimiento realizado para la obtención de los datos de un experimento; un *estudiante uniestructural* asume este enfoque como el resultado más probable obtenido al realizar el experimento y un *estudiante multiestructural* reconoce la experimentación directa con el fenómeno aleatorio como aplicación de este enfoque.

En la aplicación del enfoque frecuencial se evidencia el sesgo “insensibilidad al tamaño de la muestra” al considerar pocos datos para establecer las probabilidades de ocurrencia de los resultados. (Ver Anexo K. Reporte de implementación Tarea “Quinielas” - Registro experimental Calígula).

En relación al enfoque clásico, la mayoría de estudiantes apropiaron la aplicación de la Ley de Laplace para el cálculo de probabilidad en experimentos simples. Para experimentos compuestos se presenta dificultad en la aplicación de la regla del producto y la suma siendo la principal causa, el hecho de no recordar las operaciones de multiplicación y suma de número racionales.

Con respecto a la definición de los estudiantes acerca del enfoque clásico, un estudiante en el *nivel preestructural* describe los procedimientos de cálculo indicados en la tarea; por otro lado, un *estudiante uniestructural* reconoce que bajo este enfoque no es necesario realizar el experimento y en el caso de un *estudiante multiestructural* reconoce que la aplicación del enfoque clásico obedece a un análisis matemático de los resultados del experimento.

RESPECTO A LA CATEGORIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS

El capítulo 6 presenta descriptores de las categorías de análisis a fin de mostrar la evolución del concepto probabilístico presente en los estudiantes a través de la aplicabilidad del modelo SOLO. A partir de estos se presentan algunas conclusiones generales sobre la caracterización de las respuestas, en las fases diagnósticas y evaluativas, desde los enfoques de probabilidad en estudio.

Con respecto al enfoque intuitivo, se detecta que un estudiante en el *nivel preestructural* asigna probabilidades de manera arbitraria sin tener en cuenta los resultados del experimento; en el *nivel uniestructural* asigna probabilidades teniendo en cuenta la información del experimento, sin realizar algún tipo de cálculo; en el *nivel multiestructural,* recurre al empleo de estrategias de cálculo (empleo de proporciones) para determinar el valor de probabilidad; finalmente en el *nivel relacional,* contrasta la distribución de probabilidad obtenida por el enfoque intuitivo con los resultados obtenidos por los enfoques frecuencial y clásico.

Con respecto al enfoque frecuencial, un estudiante en el nivel *preestructural* no realiza la lectura de los valores ni la consolidación de los datos en tablas de frecuencias; además, presenta dificultad al registrar los resultados del experimento en tablas de conteo; en el *nivel uniestructural,* completa algunos valores desconocidos de las tablas de frecuencia, también determina el número de observaciones de eventos simples y establece su probabilidad de ocurrencia; en el *nivel multiestructural*, completa todos los valores desconocidos de una tabla de frecuencias, además vincula información proveniente de diferentes tablas, estableciendo el número de observaciones tanto en eventos simples como compuestos y obtiene su probabilidad de ocurrencia. Finalmente en el *nivel relacional,* reconoce la convergencia de las frecuencias hacia los resultados obtenidos por la aplicación del enfoque clásico.

En el **enfoque clásico**, un estudiante en el *nivel preestructural* no reconoce el tipo de experimento aleatorio (simple, compuesto) ni determina el espacio muestral; en el *nivel uniestructural* aplica el enfoque clásico únicamente en experimentos simples; en el *nivel multiestructural*, calcula probabilidades en experimentos compuestos a partir de la enumeración de todos los puntos muestrales del experimentos utilizando la Ley de Laplace; por último en el *nivel relacional*, el estudiante cuantifica la probabilidad de eventos en experimentos simples y compuestos a partir de la Ley de Laplace, la regla del producto y la regla de la suma, sin recurrir al listado completo de los puntos muestrales del experimento.

A partir de la caracterización de las respuestas se observa que los errores, heurísticas y sesgos tratados en el marco conceptual se verifican, en su gran mayoría, en estudiantes con respuestas preestructurales.

A partir de los resultados presentados en el informe estadístico en el grupo de estudiantes analizado, al desarrollar tareas bajo situaciones que involucran experimentos simples, las categorías de análisis *"comparación de probabilidades", "cardinal del espacio muestral" y "eventos compuestos"* reportan avances en los niveles de la taxonomía SOLO, pues el porcentaje de estudiantes en el nivel preestructural disminuyó al comparar los resultados obtenidos entre las fases diagnóstica y evaluativa. De otro lado, en las categorías asociadas a experimentos compuestos no se reportan avances en los niveles de razonamiento, al mantenerse o incrementarse el porcentaje de estudiantes en el nivel preestructural. Los resultados presentados en el informe estadístico descriptivo, muestran que a pesar de implementarse la propuesta de instrucción, la mayoría de los estudiantes persisten en el empleo de intuiciones primarias al ser el nivel preestructural predominante en las respuestas de los estudiantes.

REFERENCIAS

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. International Electronic Journal of Mathematics Education 2, III.

Aoyama, K., M. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective. Mathematics Education Research Journal 15, III: 3-22.

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18, 93-104.

Ayer, A. J. (1974). El Azar. En M. Kline (Ed.), Matemáticas en el mundo moderno (pp. 172-181). Barcelona: Blume.

Batanero, C., Ortiz, J. & Serrano, L. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. Suma, 22, 43-50.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática RELIME*, 247-263.

Bertin, J. (1967). Semiologie graphique. Paris: Gauthier-Villars.

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO*

taxonomy.New York: Academic Press,Sfard.

Biggs, J. B. (1999). Teaching for quality learning at university. Philadelphia, PA: Society for Research into Higher Education & Open University Press.

Cañadas, M., & Gómez, P. (2012). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 del MAD*. Bogotá: Universidad de los Andes..

Cohen, J. (1960) A coefficient of agreement for nominal scales. Educational and Psychological Measurement 20, 37-46

Curcio, F. R. (1989): Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M.

Del Mas, R. y Bart, M. (1998): The role of an evaluation exercise in the resolution of misconceptions of probability. Focus on learning problems in Mathematics, 11 (3), 39 – 54.

Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, (págs. 1-11). Lleida.

Fernández, F., Sarmiento, B., & Soler, N. (2008). *Estadística y Probabilidad en la escuela secundaria*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fishbein, M. (1987). *Intution in science and mathematics: An educational approach*. Dordretcht,The Netherlands:Reidel.

García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación-problema de probabilidad. Avances de Investigación en Educación Matemática, 6, 5- 23.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995): "Children's understanding of graphic representation of quantitative data". Learning and Instruction 5: 70-100.

Gómez, E., & Contreras, J. M. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. Actas de las I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Flórez, P., Gómez, P & Marín, A. (2013). Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 del MAD.Bogotá: Universidad de los Andes.

Hacking, I. (1995) El surgimiento de la probabilidad. Barcelona: Gedisa.
Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas.Educational Studies in Mathematics. 6 (pp. 187-205). Holanda,: Reidel.
Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES]. (2013). *Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación. Alineación del examen SABER 11°. Anexo 2 La prueba de Matemáticas* Colombia.
Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). Framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. Educational Studies in Mathematics, 32, 101-125.
Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press.
Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 515-556). New York: Macmillan.
Konold, C. (1989): Informal conceptions of probability: Cognition and Instrucction, 6, 59 – 98.
Landín, P. R., & Sánchez, E. (2011). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, 12(3).
Lavalle, A.; Micheli, E.B. y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado de matemática. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Revista Premisa. Año 5, Número 7, pp. 23-31.
Lichtenstein S., SLovic P., Fischhoff B.,Layman M. & Combs B. 1978. Jugded frequency of lethal events. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory. Vol. 4, pp. 551-578
Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia docente, en Chamorro, M.C. (ed,): Didáctica de las matemáticas. Madrid. Pearson-Prentice Hall, pp. 3 -30.
Marín, A. (2010). Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.
Ministerio de Educación nacional [MEN]. (1998). *Matemáticas.Lineamientos Curriculares.Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: Corporativa Editorial Magisterio.
Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de Competencias en Matemáticas.* Colombia.
OECD (2004). Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003. Paris: OECD.
Ortiz, J.; Mohamed, N.; Batanero, C.; Serrano, L.; Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, María Pilar; Moreno, Mar; González, María José (Eds.), Investigación en educación matemática : actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 267-276). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990): "Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings". Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics Ed D. Vere-Jones. Voorburg: International Statistical Institute.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA (pp. 21-40). Madrid: Editor.

Ruiz (2006) Estudio sobre las nociones Básicas de Probabilidad con estudiantes de nivel Medio Superior. Segundo Foro de Investigación Educativa. Instituto Pedagógico Nacional. México, 2014.

Roa, R. (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. España: Universidad de Granada.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. España: Universidad de Granada.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J., & Cañizares, J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*(1), 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small - group, activity - based, model building approach to introductory probability at the college level. Educational Studies in Mathematics, 8 (3), 295 - 316.

Stake, R.E. (1994) Case Study, en Denzin, N.K. & Lincoln, Y.S. (Eds.) (1994) Handbook of Qualitative Research. Sage. London: 236-247.

Stake, R.E. (1998) Investigar con estudios de caso. Madrid: Morata.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. science, 185(4157), 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 84 - 100) Cambridge: Cambridge University Press.

Walker, R. (1983) La realización de estudios de casos en educación. Ética, teoría y procedimientos, en Dockrell, W.B. y Hamilton, D. (Comps.) (1983) Nuevas reflexiones sobre la investigación educativa. Narcea. Madrid: 42-82.

Way, J. (2003). The development of young children's notions of probability. *CERME 3,* (págs. 1-8). Italia.

Watson, J. (2006). Statistical literacy at school. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wild, C., Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. (con discussion). International Statistical Review 67, III. 223-265.

ANEXOS

Pág.

ANEXO A. TAREA PRUEBA DIAGNÓSTICA

IED GENERAL CARLOS ALBÁN

PD1 PRUEBA DIAGNÓSTICA DE PROBABILIDAD 1.

Nombre: ____ Grado: ________

1. Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después, Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la que considere verdadera.

1. A. ¿Cuál cree que sería la verdadera de las tres siguientes? Justifique su respuesta.
A) Cara, Cara, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Sello, Sello, Sello
B) Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello
C) Cara, Sello, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Cara, Sello, Cara
D) Cualquiera de las anteriores

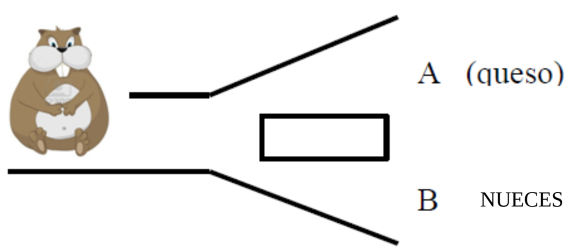
1. B. ¿Cree usted que se puede predecir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda? Explique su respuesta.

2. En dos cajas A y B se introduce canicas rojas y azules en las siguientes cantidades

CAJA	ROJAS	AZULES
A	6	4
B	60	40

Cada caja se revuelve vigorosamente. Una persona elije una de las cajas y luego, sin mirar, saca una canica. Si la canica es azul gana $120.00 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul? Justifique su respuesta.
A. La caja A **B.** La caja B **C.** Cualquiera de las dos cajas.

3. Al inicio del camino, mostrado en la figura, se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces. Los otros 20 prefieren las nueces.



3A.¿A qué lugar es más probable que llegue el hámster? ¿Por qué?
3B. Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensa que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?
3C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces), ¿pensaría que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

IED GENERAL CARLOS ALBÁN

PD2 PRUEBA DIAGNÓSTICA DE PROBABILIDAD 2.

Nombre: ____ **Grado:** ________

1. La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de Estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

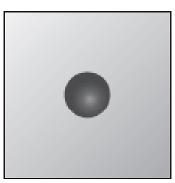
1A) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 2? Justifique.
1B) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación de 4? Justifique.
1C) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido no esté como "Aprobado"?

2. En una urna se encuentran bolitas numeradas del 1 al 4. Si se sacan 2 bolitas seguidas, sin devolverlas a la urna. Indique todas las posibles opciones.

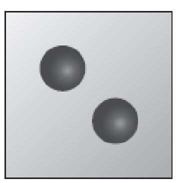
3. En una caja Anita tiene 26 pelotas. De las cuales 10 son verdes, 5 son azules y 11 son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde?

4. Se lanza un dado de seis caras que tiene tres de sus caras marcadas con un punto, dos caras marcadas con "X" y una cara marcada con dos puntos, la cara que es más probable salga es:

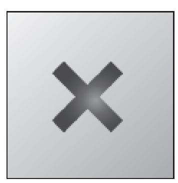
A.



B.



C.



D. Todas tienen la misma probabilidad de salir

IED GENERAL CARLOS ALBÁN

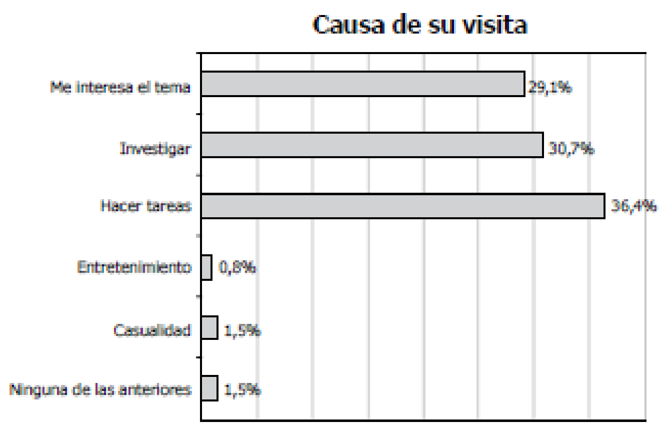
PD3 PRUEBA DIAGNÓSTICA DE PROBABILIDAD 3.

Nombre: ____ Grado: ________

1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente:

a) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro
b) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro
c) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro
d) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

2. Radio Nacional de Colombia creó una página Web en conmemoración del bicentenario de la independencia de Colombia. La gráfica representa las causas por las cuales se visitó la página por los primeros 261 visitantes.



Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique.

2A) Menos de 130 visitantes acudieron a la página para hacer tareas.
2B) Más de 200 visitantes acudieron a la página investigar o para hacer tareas.
2C) Aproximadamente 165 visitantes no consultan la página porque requieren hacer tareas.

3. Si en una bolsa hay 4 pelotitas verdes, 3 pelotitas rojas y 4 pelotitas azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelotita azul y luego, sin reponerla, sacar otra azul?

4. Se lanza una caja de fósforos, esta puede caer en cualquiera de las posiciones de la figura

Un estudiante realiza este experimento con diferentes números de lanzamientos obteniendo los siguientes resultados.

Posición	10 Lanzamientos	20 Lanzamientos	50 Lanzamientos	100 Lanzamientos	500 Lanzamientos
1	3	8	22	55	330
2	4	6	12	20	100
3	3	6	16	25	70

A partir de la información anterior se puede concluir que:

c) Más de la mitad de las posiciones de caída corresponda a las posiciones 2 o 3

d) Las tres posiciones tengan aproximadamente la misma probabilidad entre ellas

e) Más de la mitad de todas las posiciones de caída corresponda a la posición 1

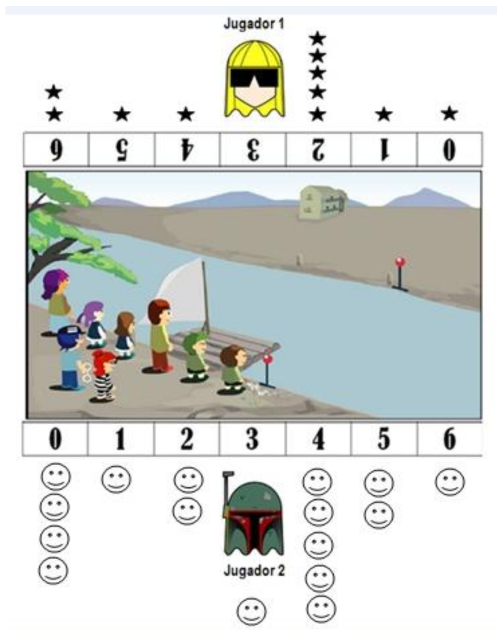
f) El número de veces que cae la caja en la posición 2 se aproxime al 50%

Justifique la respuesta

ANEXO B. TAREA TRAVESÍA DEL RÍO

NOMBRES: ____ GRADO: _________

RECURSOS:
1 Bolsa, 4 pimpones marcados con el número **“0”**, 5 pimpones marcados con el número **“1”**, 5 pimpones marcados con el número**“2”**, 4 pimpones marcados con el número**“3”**, 3 pimpones marcados con el número **“4”**, 2 pimpones marcados con el número **“5”**, 1 pimpón marcado con el número **“6”**, 30 fichas por Jugador, tablero y guía.



CONDICIONES DEL JUEGO:

- Es un juego realizado para dos personas.
- Los pimpones marcados se introducen en la bolsa
- Cada jugador dispone de 30 fichas de un color diferente al del compañero
- Un jugador sitúa las fichas en un lado del tablero y el otro jugador en el lado opuesto (ver tablero anexo). Las fichas se distribuyen en las casillas de la manera que se desee, pudiéndose optar por poner más de una ficha en una casilla y dejar otras en blanco.
- Los jugadores extraen un pimpón de la bolsa, si el número del pimpón coincide con el número de una casilla en la que hay fichas, una de éstas pasa al otro lado del río.
- El pimpón extraído en cada turno se devuelve a la bolsa.
- Se finaliza el juego cuando uno de los dos jugadores pase todas sus fichas al otro lado del río.

Importante: Antes de iniciar el juego, proponga una estrategia de ubicación de las fichas en el tablero para ganar el juego y regístrela en la siguiente tabla.

1. ENFOQUE INTUITIVO

Probabilidades asignadas de manera INTUITIVA		
	Número de fichas colocadas	Porcentaje

Resultado	Jugador Uno	Jugador Dos	Jugador uno	Jugador dos
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total	30	30	100%	100%

A continuación responda las siguientes preguntas:

- ✰ ¿A cuál resultado el jugador uno le colocó más fichas?_________________________________
- ✰ ¿A cuál resultado el jugador dos le colocó más fichas?_________________________________
- ✰ ¿Cuál es el resultado que más apareció en el juego?_________________________________
- ✰ ¿A cuál resultado el jugador uno le colocó menos fichas?_______________________________
- ✰ ¿A cuál resultado el jugador dos le colocó menos fichas?_______________________________
- ✰ ¿Cuál es el resultado que menos apareció en el juego?_______________________________

2. ENFOQUE FRECUENCIAL

Después, realice el juego con su compañero y escriba en la siguiente tabla el número de veces que aparece cada resultado en su propio juego.

Probabilidades obtenidas al realizar el juego (ENFOQUE FRECUENCIAL)			
Resultado (Pimpón Número)	**Recuento**	**Número De Veces**	**Porcentaje**
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Total			

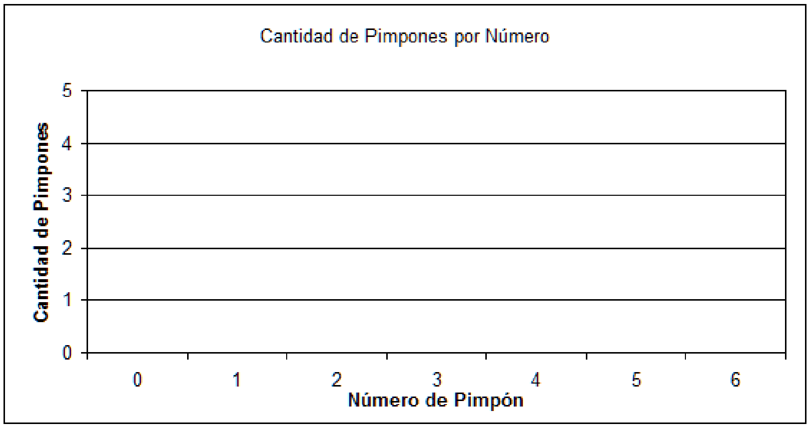
A partir de los resultados obtenidos y registrados en la tabla anterior ¿cambiaría usted la estrategia de distribución de las fichas? Justifique su respuesta.

3. ENFOQUE CLÁSICO

Para establecer la posibilidad de sacar cierto pimpón numerado, se recurre al conteo de los diferentes pimpones numerados en la bolsa. A continuación, registre esa información en la tabla.

Número del Pimpón	Cantidad de Pimpones introducidos dentro de la bolsa	Porcentaje
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	24	100%

Relacione el número de pimpón y la cantidad de estos introducidos en la bolsa a través del siguiente gráfico de barras.



Para analizar el efecto de los diferentes enfoques probabilísticos, se requiere el registro de los porcentajes obtenidos en el enfoque intuitivo, frecuencial y proporcional (clásico). Diligencie los datos pedidos en la siguiente tabla.

	Porcentajes			
	ENFOQUES			
Resultado	Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total				

¿Quién fue el jugador ganador? ______________________

Argumente con base en los resultados obtenidos.
a) El éxito o fracaso de su estrategia por el enfoque intuitivo
b) El éxito o fracaso de su estrategia por el enfoque frecuencial
c) El éxito o fracaso de su estrategia por el enfoque clásico.
Basado en esta información responda las siguientes preguntas

	Pregunta:	**ENFOQUE**			
		Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador Dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
1	¿Cuál es el resultado más probable?				
2	¿Cuál es el resultado menos probable?				

	Pregunta: Cuál es la probabilidad de obtener un resultado:	ENFOQUE			
		Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador Dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
1	Igual a 3				
2	Mayor que 3				
3	Mayor igual a 3				
4	Menor a 3				
5	Menor igual a 3				
6	Un número primo				
7	Un número par				
8	Un número impar				
9	Mayor a 2 y Menor a 5				
10	Mayor igual a 2 y Menor igual a 5				
11	Mayor a 2 y Menor igual a 5				
12	Mayor igual a 2 y Menor a 5				

ANEXO C. TAREA LABERINTOS

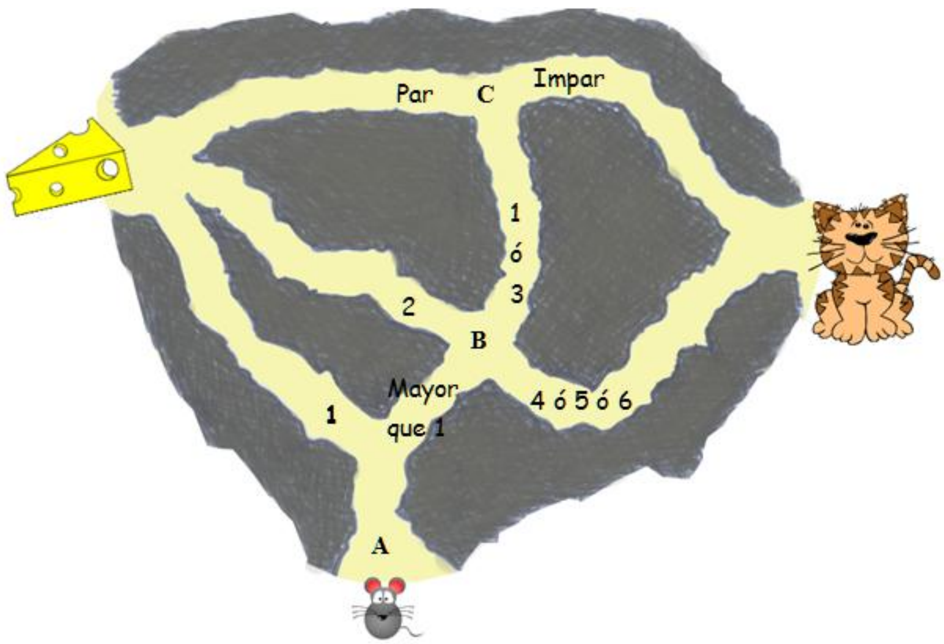
IED GENERAL CARLOS ALBAN

NOMBRES: ____

RECURSOS: Dado, fichas de colores, tablero y guía.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO:
Actividad que requiere un dado, un tablero y la guía del taller. En el tablero existen tres desvíos marcados por las letras A, B y C.
El juego consiste en desplazar y poner a salvo al ratón a través de un laberinto que lleva al queso o a un gato que se lo comerá. Para ello se lanza un dado y según el número que salga, la ficha se mueve de acuerdo al resultado mostrado en el camino.

REGLAS
- ✰ Ambos jugadores sitúan las fichas en la casilla del ratón del tablero.
- ✰ Los jugadores se turnan en el lanzamiento del dado. La ficha avanzan en el laberinto dependiendo de lo obtenido en el dado. Repita el proceso hasta que la ficha llegue al queso o sea comida por el gato.



PARTE A. PREGUNTAS PREVIAS OBSERVANDO EL TABLERO

1. ENFOQUE INTUITIVO
A) ¿Qué le parece más fácil: salvarse o ser devorado por el gato? ¿Por qué?
B) Si se colocan 80 ratones en la entrada ¿Cuántos cree que llegarán al queso? ¿Por qué?
C) De los 80 ratones. ¿Cuántos se espera que sean comidos por el gato? ¿Por qué?
D) Diligencie la siguiente tabla a partir de la información registrada en los puntos B y C.

Resultado	Número de Ratones	Porcentaje
Queso		
Gato		
Total	80	100%

PARTE B. PREGUNTAS A RESOLVER AL REALIZAR EL JUEGO

2. ENFOQUE FRECUENCIAL

El juego se realiza en grupo de cuatro personas, cada persona lleva a cabo el juego treinta veces. Luego, registra en la tabla el número de veces en que el ratón llegó al queso y el número de veces en que llegó al gato. Consolide la información de los cuatro jugadores, calcule el porcentaje de las veces en que el ratón llega al queso o sea devorado por el gato.

TABLA DE RECUENTO

QUESO	**GATO**

	Probabilidades obtenidas al realizar el juego (ENFOQUE FRECUENCIAL)					
Resultado	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4	Número de Ratones	Porcentaje
Queso						
Gato						
Total	30	30	30	30	120	100%

3. PARTE C. ENFOQUE CLASICO

Paso 1. Marque con "X" las diferentes rutas que puede tomar el ratón ya sea para llegar al queso o ser devorado por el hambriento gato. (Complete la tabla).

Recuerde Que el ratón parte siempre del punto A.

Por Ejemplo en una posible ruta, la ficha parte del punto A, luego pasa por el punto B, sigue por el punto C para llegar finalmente al Queso.

Ruta	A	B	C	Queso	Gato
1	X				
2	X				
3	X	X	X	X	
4	X				
5	X				

A partir de la información en la tabla anterior responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al queso? ___________________

b) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al gato? ____________________

Paso 2. A Continuación asigne las probabilidades de los puntos de llegada para cada una de las rutas (Complete la siguiente tabla). Por ejemplo, para la ruta 3 (A-B-C-Queso) se tiene:

- Estando en el punto A, la probabilidad de seguir el camino que conduce al punto B es de 5 entre 6, es decir**5/6**,puesto que en un dado existen cinco números mayores que uno (2,3,4,5,6) de un total de seis posibles resultados (1,2,3,4,5,6).

- Estando en el punto B, la probabilidad de seguir el camino que conduce al punto C es de 2 entre 6, es decir **2/6**, puesto que existen dos resultados (1, 3) de un total de seis posibles resultados que se pueden obtener con un dado (1,2,3,4,5,6).

- Estando en el punto C, la probabilidad de seguir el camino que conduce al queso es de 3 entre 6, es decir **3/6**, puesto que existen tres números pares en las caras de un dado (2,4,6) de un total de seis posibles resultados (1,2,3,4,5,6).

uta	Punto de Partida	Punto de llegada			
	A	B	C	Queso	Gato
1	X				
2	X				
3	X	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	
4	X				
5	X				

Paso 3 A Continuación calcule las probabilidades de seguir cada una de las rutas (Complete la tabla).En este caso, la ruta 3 (A-B-C-Queso) se especifica en la siguiente tabla.

Ruta	Cálculo	Resultado
1		
2		
3	$\frac{5}{6} * \frac{2}{6} * \frac{3}{6}$	$\frac{30}{216}$
4		
5		

Paso 4 Cálculo de probabilidad del resultado final del juego REGLA DE LA SUMA
Recuerde que el juego finaliza cuando la ficha alcanza el "Queso" o cuando es devorada por el "Gato". Tenga en cuenta los datos del paso 3 para obtener cada probabilidad (queso, gato).

- Para obtener la probabilidad de llegar a "Queso" sume todos los resultados de las rutas que conducen a "Queso".
- Para obtener la probabilidad de llegar al "Gato" sume todos los resultados de las rutas que conducen a "Gato".

Resultado Final	Cálculo	Resultado	Porcentaje
Queso			
Gato			
TOTAL			100%

Defina con sus propias palabras el uso de la regla del producto y la regla de la suma

1. PARTE D. COMPARACION DE LOS TRES ENFOQUES
Registre las probabilidades obtenidas en las tablas anteriores (ver puntos 1, 2 y 3)

	Enfoque de Probabilidad		
Resultado	Intuitivo	Frecuencial	Clásico
	PARTE A	**PARTE B**	**PARTE C**
Queso			
Gato			

Para usted ¿Qué significa enfoque de probabilidad?

Defina con sus propias palabras

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

¿Qué semejanzas y diferencias encuentra en cada uno de los enfoques?

	Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico
Semejanzas			
Diferencias			

¿Qué ventajas encuentra en cada uno de los enfoques?

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

¿Qué ventajas encuentra en cada uno de los enfoques?

Enfoque intuitivo	Enfoque Frecuencial	Enfoque Clásico

ANEXO D. TAREA APARATO DE GALTON

IED GENERAL CARLOS ALBAN

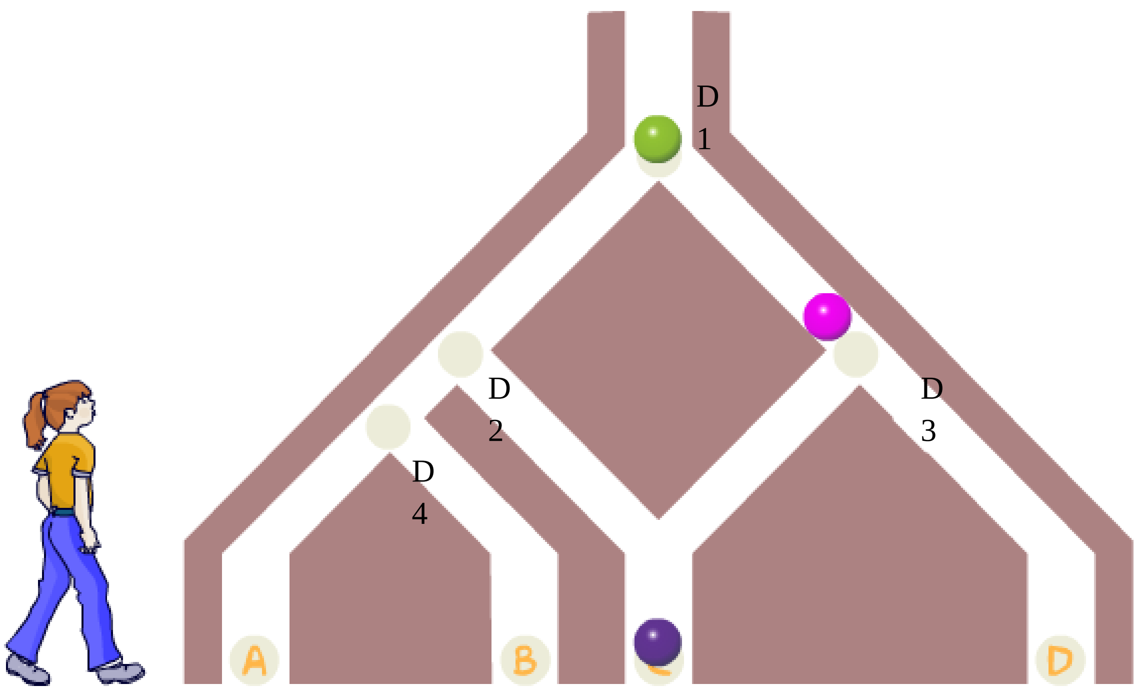
NOMBRES: ____

ACTIVIDAD: Simulación de circuitos y bolas I (el caso del aparato de Galton)

RECURSOS: Sala de informática, ejecutable del programa y guía.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD:
Tomado de http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/

DESCRIPCIÓN DEL APARATO: Una bola colocada en la parte superior del aparato cae, sobre un conjunto de desvíos, y al impactar sobre cada uno de estos, de forma aleatoria, continúa su camino descendente hacia la derecha o hacia la izquierda. De esta forma vuelve a impactar en otro desvío y el proceso se repite hasta llegar a la fila inferior.



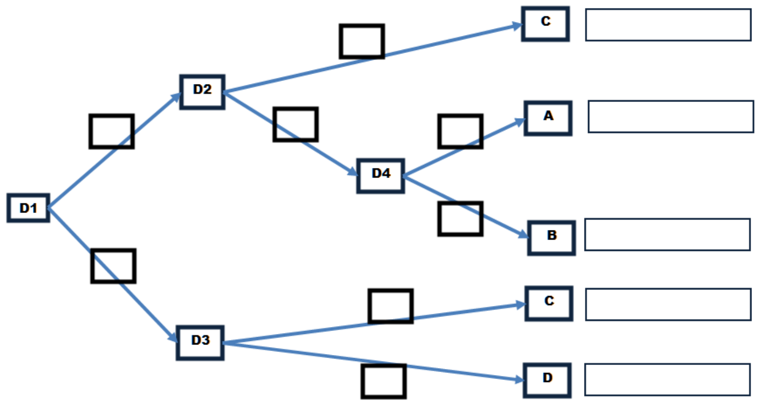
Este aparato de Galton tiene cuatro desvíos (D1, D2, D3, D4) que determinan el curso de la bola, en cada desvío se tiene que la probabilidad de pasar por el camino derecho es igual a la probabilidad de pasar por el camino izquierdo.

1. PARTE A ENFOQUE CLÁSICO

En el diagrama de árbol se muestran las posibles rutas que toma una bola en el aparato del Galton. En este caso son cinco posibles rutas.

- Asigne las probabilidades en cada una de las flechas (Por ejemplo entre D1 y D2 existe una flecha en el gráfico, sobre ésta se debe asignar la probabilidad de pasar de D1 a D2)

- Calcule las probabilidades para cada uno de los resultados finales del Juego (Puertas A,B,C, D)



Cálculo de probabilidad del resultado final del juego
Recuerde que el juego finaliza cuando la bola alcanza la puerta “A”, “B”, “C” ó “D”
Realice los cálculos necesarios para determinar las probabilidades.

Resultado Final	Porcentaje
A	
B	
C	
D	
	100%

2. PARTE B ENFOQUE FRECUENCIAL

Ponga en marcha el simulador del aparato y registre en las siguientes tablas el número de bolas que llegan a cada una de las casillas (A-B-C-D) junto con su respectivo porcentaje.

Experimento 1: se lanzan 10 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	Número de Bolas	Porcentaje de Bolas
A		
B		
C		
D		
Total	10	100%

Experimento 2: se lanzan 20 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado – Casilla	Número de Bolas	Porcentaje de Bolas
A		
B		
C		
D		
Total	20	100%

Experimento 3: se lanzan 30 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	30	100%

Experimento 4: se lanzan 60 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	60	100%

Experimento 5: se lanzan 120 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	120	100%

Experimento 6: se lanzan 240 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	240	100%

Experimento 7: se lanzan 480 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	480	100%

Experimento 8: se lanzan 600 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	600	100%

Experimento 9: se lanzan 1000 Bolas

Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado - Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	1000	100%

Experimento 10: se lanzan 1500 Bolas

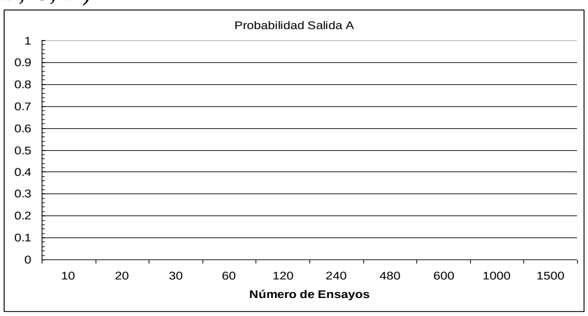
Probabilidades obtenidas con el Aparato de Galton (ENFOQUE FRECUENCIAL)		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	1500	100%

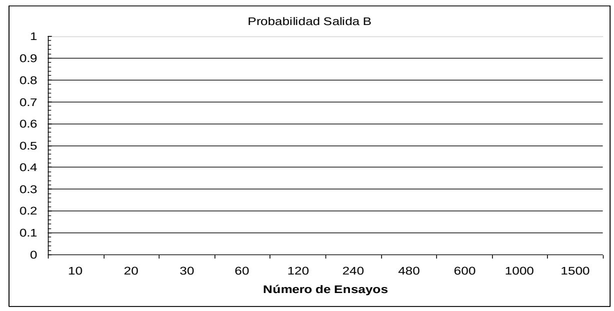
Registre los porcentajes registrados en cada uno de los experimentos.

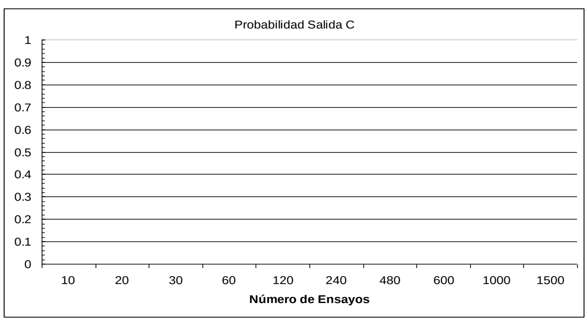
		Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B				
Resultado – Casilla	**Probabilidad Clásica Parte A**	**Experimento 1**	**Experimento 2**	**Experimento 3**	**Experimento 4**	**Experimento 5**
		10 Bolas	**20 Bolas**	**30 Bolas**	**60 Bolas**	**120 Bolas**
A						
B						
C						
D						
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

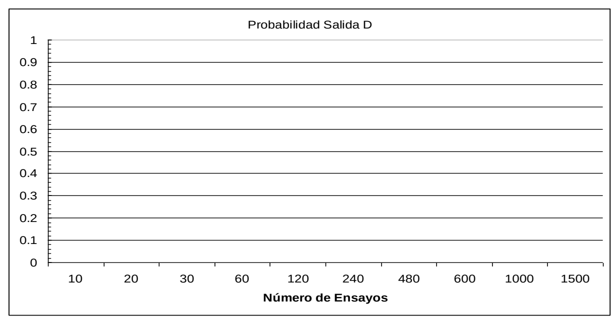
Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B					
Resultado - Casilla	**Experimento 6**	**Experimento 7**	**Experimento 8**	**Experimento 9**	**Experimento 10**
	240 Bolas	**480 Bolas**	**600 Bolas**	**1000 Bolas**	**1500 Bolas**
A					
B					
C					
D					
Total	100%	100%	100%	100%	100%

Teniendo en cuenta los datos obtenidos en las tablas anteriores, realice una gráfica a cada resultado final (A, B, C, D)









¿Qué sucede con los porcentajes obtenidos para las casillas A, B, C, D al aumentar el número de bolas en el experimento?

Complete la tabla si se lanzaran 1.025.320 de bolas

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A		
B		
C		
D		
Total	1 025 320	100%

ANEXO E. TAREA APUESTA DE CARRERAS

IED GENERAL CARLOS ALBAN

NOMBRES: ____

RECURSOS: Calculadora, guía, implementos de trabajo.

APUESTA CARRERA ELECTRÓNICA DE CABALLOS

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO

El juego consiste en asignar las posiciones de una carrera en la que compiten tres caballos (Bucéfalo, Marengo, Strategos) en una pista electrónica.

El programa (software) de la máquina usa una lista conformada por un cierto número de «caballos virtuales», con un nivel específico de competitividad, es decir, cada caballo virtual tiene pre-asignado un determinado valor que está relacionado con la probabilidad de éxito que le correspondiente al momento de competir ante los demás caballitos.

A estos caballitos, como se hace en las máquinas electrónicas, se les puede asignar hasta nueve niveles de competitividad, que pueden ser definidos de manera aleatoria. A mayor nivel de competitividad asignado, mayor posibilidad de ganar la carrera. A continuación se presenta la tabla que relaciona a cada nivel de competitividad un rango de puntaje asignado.

Nivel de Competitividad «caballito virtual»	Puntaje Asignado	
	Valor Mínimo	Valor Máximo
1	5800	6200
2	6200	6600
3	6600	7000
4	7000	7400
5	7400	7800
6	7800	8200
7	8200	8600
8	8600	9000
9	9000	9400

4. Para conocer los diferentes resultados de la apuesta, haga una lista de todas las diferentes posiciones que pueden tomar los tres caballos en el podio.

Primer Lugar	Segundo Lugar	Tercer Lugar

PARTE A. ENFOQUE INTUITIVO. ESTRATEGIAS DE VARIOS JUGADORES

Entre los clientes del casino se escucha el rumor que el dueño ha decidido manipular la máquina, al registrar en las últimas semanas pérdidas al negocio debido a la entrega de bastantes premios a los clientes que apostaron por los caballos Bucéfalo y Marengo como favoritos.

5. **Aníbal,** como cliente frecuente, cree que el dueño manipula la máquina a favor del casino. Teniendo en cuenta la opinión de **Aníbal**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

6. **Magno**, funcionario del casino, conoce la calibración de los caballos. Él sabe que Bucéfalo es asignado con un nivel de competitividad entre "1" al "4", Marengo es asignado con un nivel de competitividad entre "3" al "6", y Strategos es asignado con un nivel de competitividad entre"5" al"9" (ver tabla de la página 1). Teniendo en cuenta la opinión de **Magno**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

7. Finalmente **Sancho Panza,** inspector de juegos, considera que la máquina no favorece a ningún caballo en particular. Teniendo en cuenta la opinión de **Sancho Panza**, registre en la siguiente tabla, el número y el porcentaje de carreras, de doscientas posibles, para cada una de las posiciones de primer, segundo y tercer lugar en la carrera de caballos. Justifique la estrategia

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	200	100%

PARTE B. ENFOQUE FRECUENCIAL

8. **Espartaco,** cliente frecuente del casino, ha decidido registrar el resultado de doscientas carreras durante la última semana, obteniendo los siguientes resultados (Ver tabla REGISTRO DEL

RESULTADO PARA 200 CARRERAS). A partir de la información obtenida por Espartaco, complete la siguiente tabla indicando las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar en la competencia de los caballos.

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos	10	
Bucéfalo	Strategos	Marengo	4	
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo	87	
		Total	200	100%

REGISTRO DEL RESULTADO PARA 200 CARRERAS

Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**1**	**3**
2	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
2	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**	**3**
2	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**
3	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**
1	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**	**3**
2	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**
1	**3**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	**2**	**3**	**1**
1	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**
3	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**
3	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**
3	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**

3	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**2**
3	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
3	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**
3	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**1**	**2**	**3**
3	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**2**	**1**	**3**
2	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**2**
3	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**
1	**2**	**3**	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**3**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**

9. **Calígula**, otro cliente frecuente del casino, considera que es exagerado registrar el resultado de doscientas carreras, por tal razón toma únicamente el resultado de diez carreras, obteniendo los siguientes resultados (Ver tabla).

Bucéfalo	Marengo	Strategos
3	**2**	**1**
2	**1**	**3**
3	**1**	**2**
3	**2**	**1**
3	**2**	**1**
3	**2**	**1**
3	**2**	**1**
3	**1**	**2**
2	**1**	**3**
3	**2**	**1**

A partir de la información obtenida por **Calígula**, indique en cuántas de éstas apostaría para las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar. A partir de la información obtenida por **Calígula**, complete la siguiente tabla indicando las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar en la competencia de los caballos.

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos		
Bucéfalo	Strategos	Marengo		
Marengo	Bucéfalo	Strategos		
Marengo	Strategos	Bucéfalo		
Strategos	Bucéfalo	Marengo		
Strategos	Marengo	Bucéfalo		
		Total	10	100%

Está de acuerdo con la actuación de Calígula respecto a la estrategia de registrar sólo 10 carreras SI____ NO____ ¿Por qué?

Teniendo en cuenta lo visto en las guías anteriores ¿Cuantas carreras serían necesarias para establecer un cálculo de probabilidades aproximado al obtenido con 200 carreras? Justifique su respuesta.

PARTE C. COMPARACIÓN DE ENFOQUES

Registre las probabilidades (porcentajes) obtenidas en las tablas anteriores

Resultado			Estrategias					
Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Intuitivo Napoleón	Intuitivo Aníbal	Intuitivo Magno	Intuitivo Sancho Panza	Frecuencia al Registro Espartaco 200 Carreras	Frecuencia al Registro Calígula 10 Carreras
Bucéfalo	Marengo	Strategos						
Bucéfalo	Strategos	Marengo						
Marengo	Bucéfalo	Strategos						
Marengo	Strategos	Bucéfalo						
Strategos	Bucéfalo	Marengo						
Strategos	Marengo	Bucéfalo						
		Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

¿Es posible confirmar o desmentir el rumor generado en el casino? Justifique su afirmación

¿Cuál de los siguientes clientes (**Napoleón, Aníbal, Magno, Sancho Panza**) podrían tener la razón? Justifique su afirmación

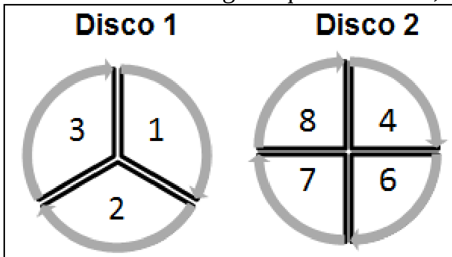
ANEXO F. INSTRUMENTO EVALUATIVO

CE1 INSTRUMENTO EVALUATIVO 1

Nombre: ____ Grado: ________

Juego ‘Caja fuerte’

En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.



A. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación ganadora? Justifique su respuesta.

B ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que comienza en 3 o en 2? Justifique su respuesta.
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de dos cifras que comience en cifra impar y termine en cifra par? Justifique su respuesta.

C. Si el concursante sabe de antemano que la clave correcta termina en 8 ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

Un fanático televidente ha decidido llevar el registro de los resultados presentados en varios juegos a través de la siguiente tabla*: (Se aclara que la combinación ganadora cambia en cada juego realizado).*

Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora	Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora	Clave que adivinó el Jugador	Clave Ganadora
14	36	27	14	14	28
28	24	28	38	24	16
36	16	17	17	16	38
26	28	34	28	17	36
34	28	18	27	17	17
16	16	16	14	16	14
34	17	28	37	28	18
38	24	17	26	14	27
38	28	14	26	18	28
16	26	36	24	17	34
18	24	26	34	34	26
38	24	27	38	16	38
38	17	26	26	26	14
34	26	26	24	14	27

D. A partir de los resultados obtenidos en el anterior registro complete la siguiente tabla.

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino		
No Adivino		

E. Con base en los resultados del ítem anterior, si se realizara el juego 500 veces. ¿cuántas veces se esperaría que el concursantes adivinara la clave ganadora?

F. **¿C**onsidera que el resultado obtenido por el televidente fanático es confiable? ¿Por qué?

G. Un segundo fanático ha realizado muchas veces la simulación del juego por computador y concluye que de cada 100 juegos, en 87 de ellos no se obtiene la clave ganadora.

G1. Si se realiza el juego una vez y en este se obtiene la clave ganadora, ¿cree que este televidente estaba equivocado? ¿Por qué? ______________________________

G2. Si se realiza el juego 10 veces y en 7 de estos no se obtiene la clave ganadora ¿cree que este personaje estaba equivocado? ¿Por qué? _____________________________

CE2 INSTRUMENTO EVALUATIVO 2

Nombre: ____ Grado: ________

JUEGO: El orden de los factores.

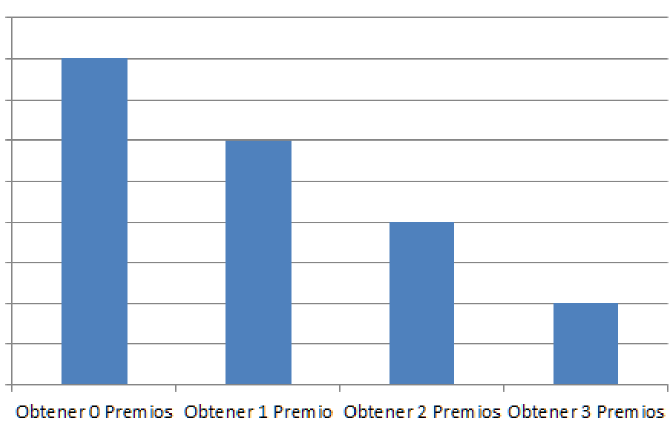
Se tienen tres productos a los cuales le falta un dígito del precio. Los dígitos 5, 9 y 3 deben ser asignados, sin repetir, a cada una de las casillas vacías de los precios.

		
Patineta Atom 21"	**Bicicleta Junior**	**Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas**
1 5 1 __ 0 0	**2 6 9 4 __ 0**	**4 4 9 __ 0 0**

A. ¿Considera posible predecir con seguridad los precios de los artículos? ¿Por qué?

B. Haga una lista de todos los precios posibles que se pueden obtener en estos tres artículos.

En la siguiente gráfica se representa la opinión de un concursante acerca del grado de probabilidad de obtener los premios en este juego.



C. De acuerdo con la opinión del concursante mostrada en la gráfica anterior, determine la probabilidad de obtener:

3 Premios	
Menos de tres premios	
Más de un premio	
3 ó 1 premios	

Si los precios correctos de los tres artículos fueran

Patineta Atom 21"	Bicicleta Junior	Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas
1 5 1 9 0 0	2 6 9 4 5 0	4 4 9 3 0 0

D. ¿Considera acertadas las probabilidades establecidas por este Concursante? SI ____ NO ____ ¿Por qué?

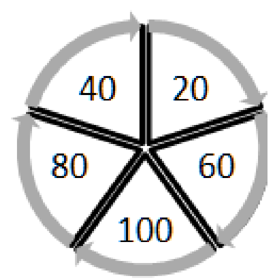
E. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Es imposible obtener 2 premios	Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.

CE3 INSTRUMENTO EVALUATIVO 3

Nombre: ____ Grado: ________

Juego la Rueda.



El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez.

A. ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener en el juego?
B. Cuántos posibles resultados se pueden obtener al realizar el giro de la rueda una vez?

C. Un televidente lleva el registro de los resultados presentados en veinte juegos ¿Cuál de las siguientes secuencias de resultados se podría presentar en el juego? ¿Por qué?

a) 40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40
b) 40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20
c) 40,100,80,20,20,40,80,60,60,60,20,40,20,100,100,40,20,100,60,60
d) Cualquiera de las anteriores

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D1. El número 100	
D2. Un número terminado en 0	
D3. Un número menor a 80	
D4. Un número mayor a 40	

D5. Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	
D6. Un número que no comience en 4	

E. Marque con "X" el grado de probabilidad a cada uno de los siguientes eventos. Justifique

Evento	Grado de Probabilidad			Justificación
	Imposible	Probable	Seguro	
E1. Obtener un número par				
E2. Obtener un número mayor a 100				
E3. Obtener un número menor a 200				
E4. Obtener un número terminado en cero y mayor a 40.				

Otro televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla.

F. Ayúdele al televidente a completar los datos de la tabla

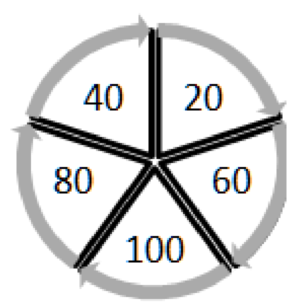
Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	
40		**10%**
60		
80	**2**	
100	**4**	**10%**

G. ¿Cuántos juegos vio este fanático televidente?
H. Teniendo en cuenta el registro del televidente; Si se registraran 160 juegos. Cuántas veces se espera que caiga el número 80?

CE4 INSTRUMENTO EVALUATIVO 4

Nombre: ____ Grado: ________

1. Juego la Rueda.



El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez. Cuando el jugador no obtiene el número 100 al girar la rueda por primera vez, tiene la oportunidad de girar la rueda por segunda vez. Si la suma de los puntos obtenidos en ambas oportunidades es un número mayor que 100, queda inmediatamente eliminado del juego.

Recuerde: Si el jugador obtiene en la primera oportunidad el número 100, no tiene que girar de nuevo la rueda.

1A. A continuación responda las siguientes preguntas:

1 A 1 . Cuál es el valor más pequeño que se puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	
1 A 2¿Cuál es el valor más grande que puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	

1B.

1 B 1 ¿Qué valor o valores de la suma son más probables? ¿Por qué?	
1 B 2 ¿Qué valor o valores de la suma son menos probables? ¿Por qué?	
1 B 3 ¿Qué es más probable: que la suma sea 80 o que la suma sea 100? ¿Por qué?	

1C.

1 C 1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
1 C 2 ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
1 C 3 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	

2. Juego espejito, espejito

En esta versión, el jugador debe adivinar únicamente dos cifras para obtener el precio del premio.

Opciones Precio Carro

Cifra 1	Cifra 2
3	7
4	8
5	9

2A. ¿Cuántos posibles resultados se pueden obtener en el juego *espejito-espejito*? Explique**.**

2B Calcule la probabilidad de**:**

2 B 1 Ganar el premio	
2 B 2 Coincidir en la primera cifra del premio	
2 B 3 Coincidir en la segunda cifra del premio	

Un televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla. Por ejemplo: De 10 juegos vistos, en 6 de ellos el concursante no coincidió con alguna cifra, en tres de los 10 juegos coincidió en una cifra, mientras que en un juego el concursante adivinó las dos cifras del juego.

	Número de Juegos										
Cifras Coinciden	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**200**
0	60.00%	60.00%	46.67%	45.00%	42.00%	46.67%	42.86%	46.25%	47.78%	46.00%	42.50%
1	40.00%	30.00%	43.33%	45.00%	48.00%	43.33%	48.57%	43.75%	42.22%	45.00%	45.50%
2	0.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	8.57%	10.00%	10.00%	9.00%	12.00%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

	Número de Juegos										
Cifras Coinciden	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**	**1000**	**2000**	**5000**	**20000**
0	45.33%	42.75%	43.20%	43.00%	42.71%	43.38%	43.78%	43.50%	43.15%	44.60%	44.60%
1	43.33%	46.25%	45.80%	46.33%	46.29%	45.00%	44.33%	44.50%	44.70%	43.50%	43.83%
2	11.33%	11.00%	11.00%	10.67%	11.00%	11.63%	11.89%	12.00%	12.15%	11.90%	11.58%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

2C A partir de la información suministrad. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

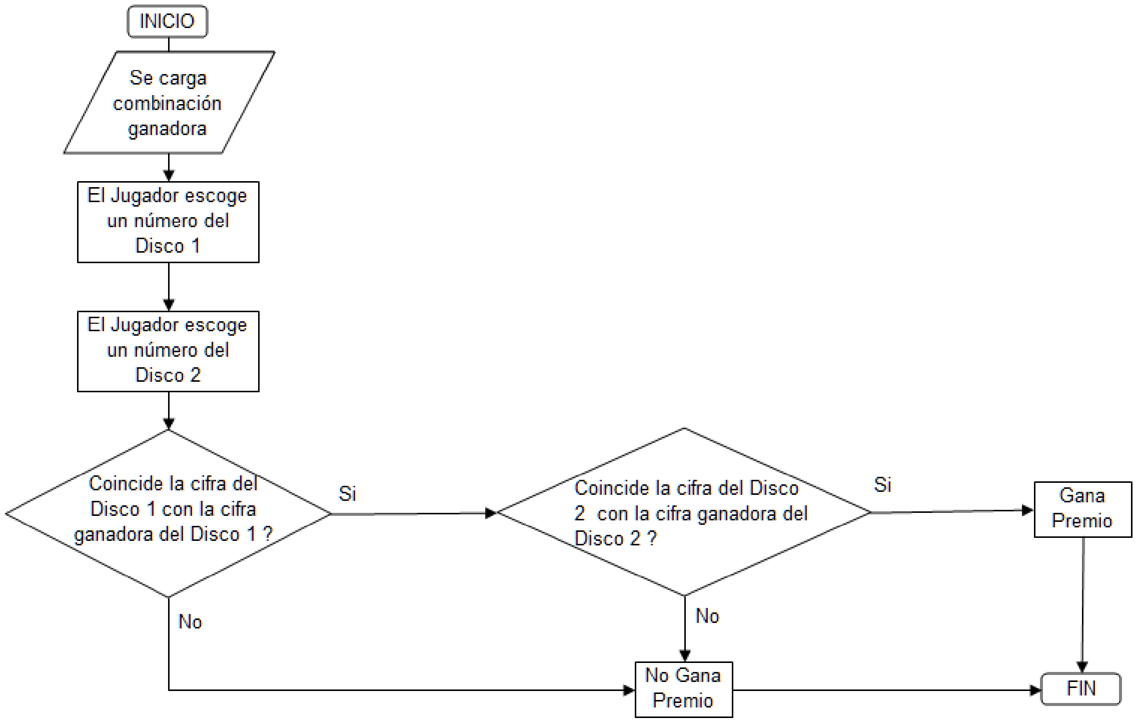
• Es imposible que un jugador gane el premio	• Es más probable que el jugador no acierta en alguna cifra.

• El jugador tiene casi la misma probabilidad de acertar una cifra como de no coincidir cifra alguna.	• Más del 60% de las veces, el jugador acierta en una cifra.

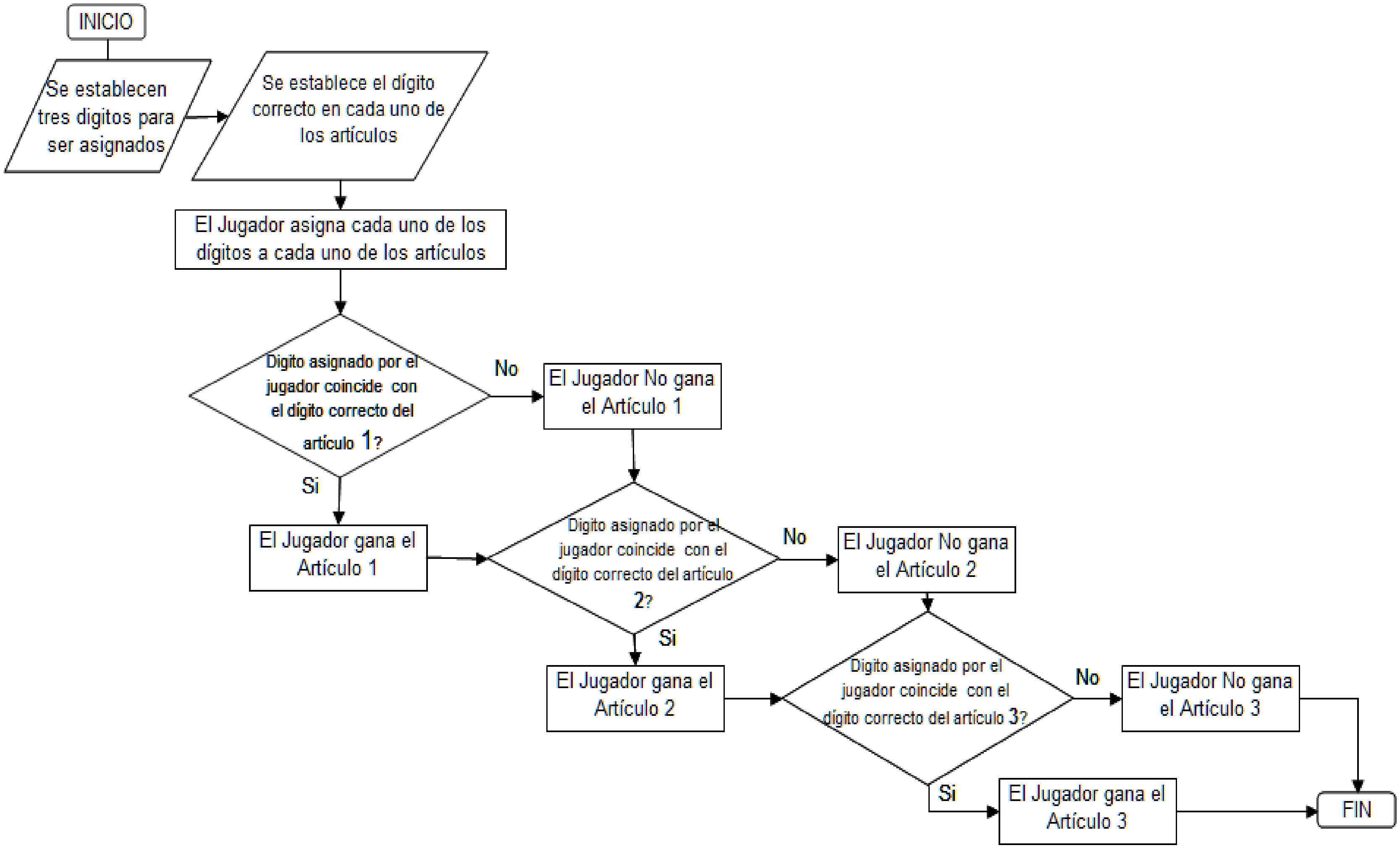
2D A partir de la siguiente información indique cual podría ser el número suficiente de programas que debería ver el fanático para obtener una estimación razonable de la probabilidad de los diferentes resultados del juego

ANEXO G. FLUJOGRAMAS JUEGOS

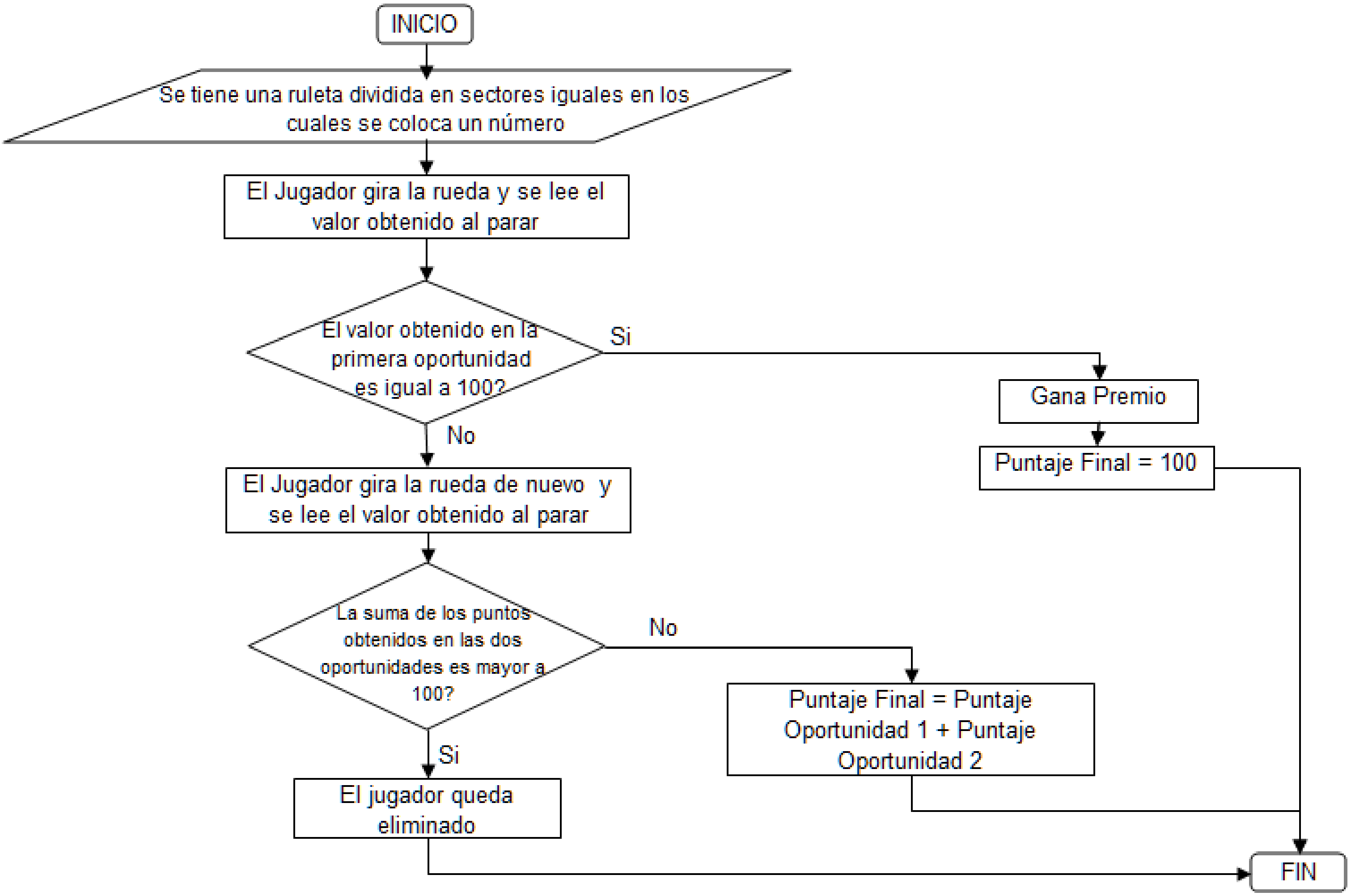
Caja Fuerte



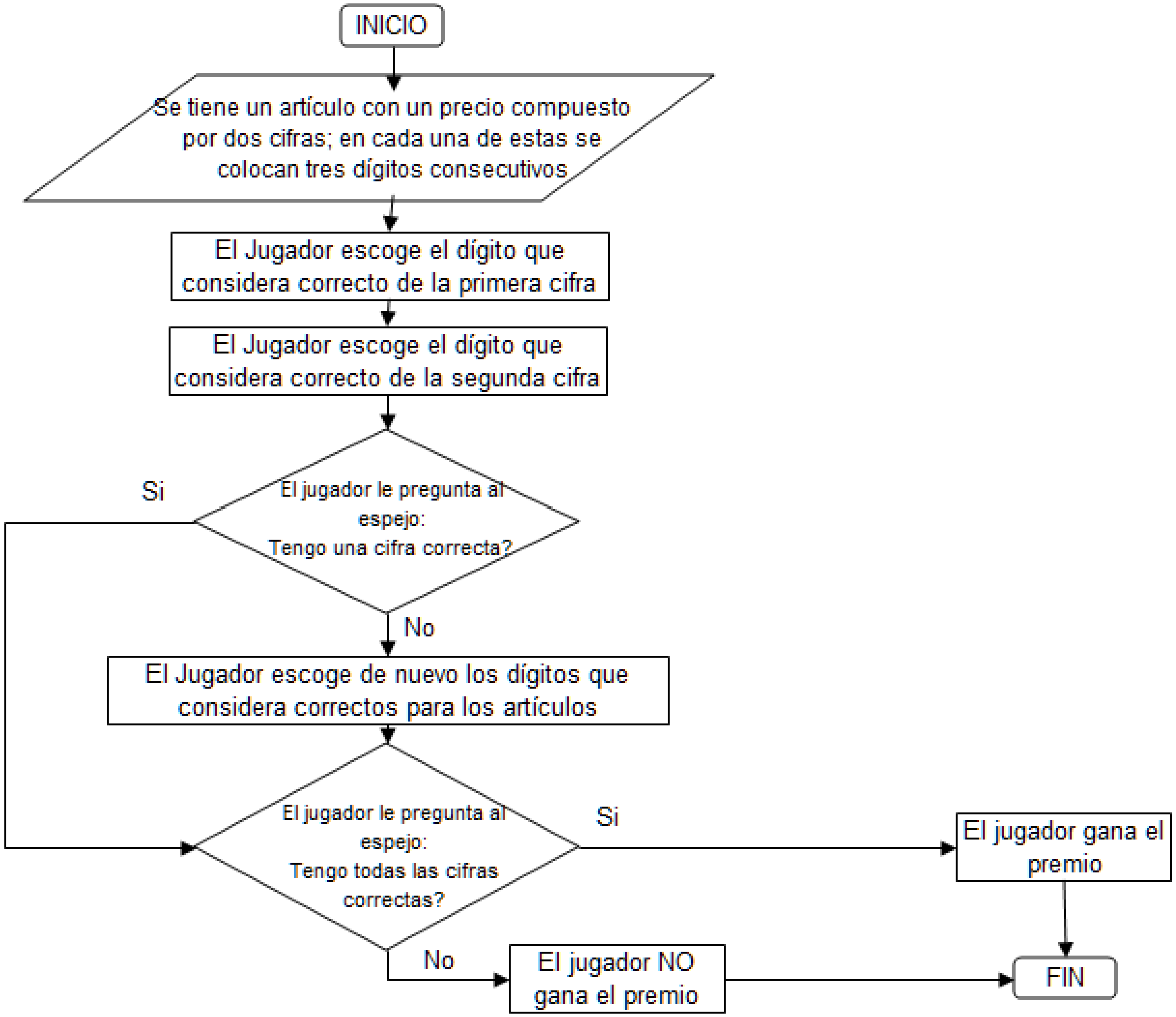
Orden de los Factores



La Rueda

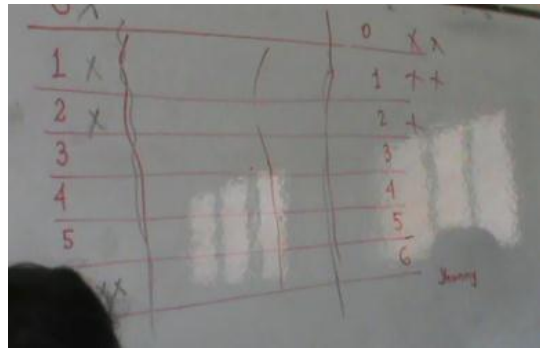

INICIO
Se tiene una ruleta dividida en sectores iguales en los cuales se coloca un número
El Jugador gira la rueda y se lee el valor obtenido al parar
El valor obtenido en la primera oportunidad es igual a 100?
Si
Gana Premio
Puntaje Final = 100
No
El Jugador gira la rueda de nuevo y se lee el valor obtenido al parar
La suma de los puntos obtenidos en las dos oportunidades es mayor a 100?
No
Puntaje Final = Puntaje Oportunidad 1 + Puntaje Oportunidad 2
Si
El jugador queda eliminado
FIN

Espejito – Espejito



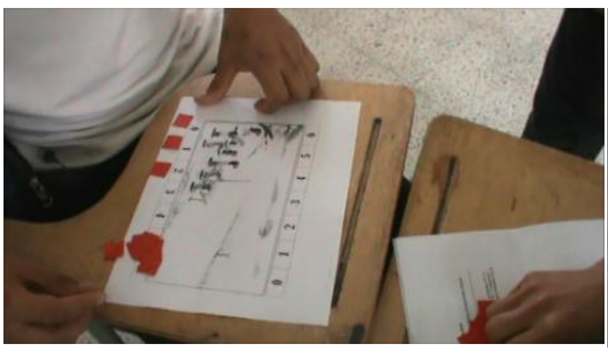
ANEXO H. REPORTE DE IMPLEMENTACIÓN TAREA TRAVESÍA DEL RÍO

En la sesión 1 (enfoque intuitivo) el profesor explica el funcionamiento del juego; para tal fin, dibuja en la pizarra el tablero del juego y pide a dos estudiantes realizarlo.



Estrategia para la organización de las fichas

Luego solicita a los estudiantes generar su estrategia de ubicación de las fichas, la cual se registra en una tabla de frecuencia.



Con respecto a la pregunta "**proponga una estrategia de ubicación de las fichas en el tablero"** se obtienen las siguientes justificaciones:

Nivel Preestructural	Nivel Uni-estructural	Nivel Multi-estructural.	Nivel Relacional
E15 "*Mi estrategia fue poner el número de fichas equilibradamente en las 6 casillas*" (sesgo de equiprobabilidad) E11 "*Mi estrategia fue a los números que más me gustaban les puse el mayor número de fichas*" (creencia personal)	E12 "*Los tres primeros tienen más pimpones y los últimos poquitos me guié por esta estrategia*" E17 "*Mi estrategia fue colocar más fichas en los números donde más pimpones tiene y cero fichas en donde menos pimpones hay"*	E32 "*Mi estrategia está basada en la cantidad de pimpones que hay en la bolsa; mayor número de pimpones, mayor número de fichas en ese número"*	Los estudiantes no reportaron argumentos que puedan ser clasificados en este nivel

Con el desarrollo de esta actividad, el profesor propuso el empleo de razones entre el número total de fichas y el número total de pimpones para establecer el número de fichas a colocar en los diferentes números, introduciendo así la aplicación del enfoque clásico.

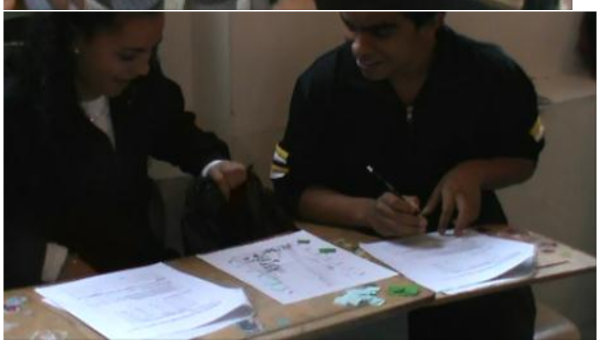
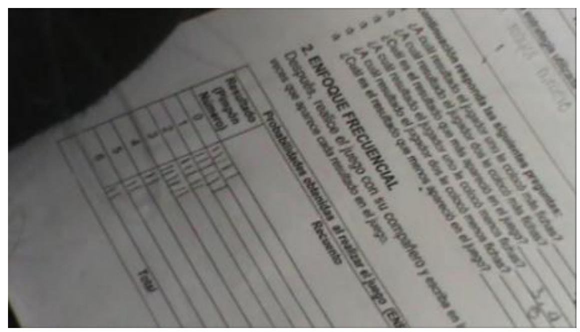
$$\frac{Numero\ Total\ de\ Fichas}{Número\ Total\ de\ Pimpones} = \frac{Numero\ de\ Fichas\ ubicadas\ en\ las\ casillas\ marcadas\ con\ el\ número}{Número\ de\ Pimpones\ marcados\ con\ el\ número}$$

$$\frac{30}{24} = \frac{F0}{4} = \frac{F1}{5} = \frac{F2}{5} = \frac{F3}{4} = \frac{F4}{3} = \frac{F5}{2} = \frac{F6}{1}$$

Experimentación del juego

En la sesión 2 (enfoque frecuencial), se realiza el juego por parejas de estudiantes registrando el número de veces que aparece el pimpón extraído.



Se aclara que antes de realizar la actividad, los estudiantes habían recibido instrucción previa sobre proporcionalidad directa, cálculo de porcentajes y construcción de tablas de frecuencia.

Con la pregunta **"A partir de los resultados obtenidos y registrados en la tabla anterior ¿cambiaría usted la estrategia de distribución de las fichas? Justifique su respuesta"** se resaltan las siguientes respuestas: (ver anexo B sección 1)

Respuestas de estudiantes que NO cambiarían la estrategia previa

Nivel Preestructural	Nivel Uni-estructural	Nivel Multi-estructural	Nivel Relacional
E5 "*No, porque distribuí bien las fichas y eso me hizo poder ganar* " E22 "*No, porque yo gané por el orden en que coloqué las fichas, yo las dejo así como están*"	E2 "*No, porque mi estrategia está funcionando pues puse mis fichas donde consideré que salían más pimpones"* E29 "*Me pareció buena mi estrategia por lo cual puse en*	Los estudiantes no reportaron argumentos que puedan ser clasificados en este nivel	Los estudiantes no reportaron argumentos que puedan ser clasificados

	los 0 más fichas y en el 6 menor cantidad de fichas porque del 6 habían solo dos pimpones”		en este nivel

Respuestas de estudiantes que SI cambiarían la estrategia previa

<table>
<tr><th>Nivel Preestructural</th><th>Nivel Multi-estructural</th></tr>
<tr>
<td>
E10 “Si, porque yo hice la distribución al azar y pues no tuve una estrategia… ”

E16 “Si cambiaría porque lo que pasa es que perdí, porque coloqué más fichas en el que no salía”

Argumentos contradictorios
E24 “Si; porque no coloqué fichas en el 6 y este salió <u>muchas</u> veces”

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Frecuencia Absoluta</td><td colspan="2">Frecuencia Relativa</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>Intuitivo</td><td>Frecuencial</td><td>Intuitivo</td><td>Frecuencial</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>14</td><td>20%</td><td>16.86%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>17</td><td>26.6%</td><td>20.48%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>13</td><td>26.6%</td><td>15.66%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>12</td><td>20%</td><td>14.45%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>10</td><td>3.3%</td><td>12.04%</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>11</td><td>3.3%</td><td>13.25%</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>0%</td><td>7.22%</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>30</td><td>83</td><td>100%</td><td>100%</td></tr>
</table>
</td>
<td>
E11 “Pues si la cambiaría porque le puse mayor número de fichas al número que menos pelotas tenía”

E26 “Si, para el 1 porque había más posibilidades de sacarla más veces”

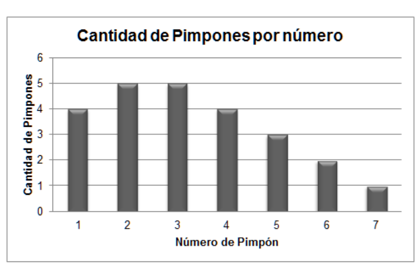
E20 “Si, le quitaría las fichas al número 6 porque es menos probable sacarlo”

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Frecuencia Absoluta</td><td colspan="2">Frecuencia Relativa</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>Intuitivo</td><td>Frecuencial</td><td>Intuitivo</td><td>Frecuencial</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>18</td><td>20%</td><td>19.35%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>24</td><td>26.6%</td><td>25.80%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>26.6%</td><td>9.6%</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>16</td><td>16.6%</td><td>17.20%</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>12</td><td>10%</td><td>12.90%</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>10</td><td>0%</td><td>10.75%</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>4</td><td>0%</td><td>4.30%</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>30</td><td>93</td><td>100%</td><td>100%</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<u>Formalización de la Ley de Laplace</u>

En la sesión 3 (enfoque clásico), el profesor expone el proceso de cálculo de probabilidad; a través de la formalización de la Ley de Laplace. Para este fin, emplea la siguiente tabla de frecuencias, la formalización algebraica de la ley y la respectiva representación gráfica con un diagrama de barras.

Número del Pimpón	Cantidad de Pimpones introducidos dentro de la bolsa	Fracción	Porcentaje
0	4	4/24	$16.\overline{6}$
1	5	5/24	$20.8\overline{3}$
2	5	5/24	$20.8\overline{3}$
3	4	4/24	$16.\overline{6}$
4	3	3/24	12.5
5	2	2/24	$8.\overline{3}$
6	1	1/24	$4.1\overline{6}$
	24	24/24	100%



$$P(Número\ de\ Pimpon)\ \frac{Número\ de\ Resultados\ Favorables}{Número\ Total\ de\ posibles\ rescultados}$$

$$\frac{Cantidad\ de\ Pimpones\ correspondiente\ al\ número}{Número\ Total\ de\ Pimpones}$$

Comparación de enfoques (intuitivo, frecuencial y clásico)

En la sesión 4, al consolidar los valores de probabilidad de los diferentes enfoques se realiza una comparación entre ellos. Ante el ítem "***Argumente con base en los resultados obtenidos, el éxito o fracaso de su estrategia teniendo en cuenta los tres procedimientos vistos para el cálculo de probabilidades***" se obtuvieron respuestas como:

Nivel Preestructural

E36 "*Pues con mi estrategia pude ganar; por esto no la cambio y con los tres procedimientos me parece muy bien ya que nos sirve para mirar las probabilidades*".

E31 *"Considero que aunque perdí, mi estrategia fue buena porque esparcí mis fichas de manera equilibrada y no perdí por mucho"*

Algunos estudiantes registraron incorrectamente los porcentajes de probabilidad en especial para el enfoque frecuencial; evidenciando así incomprensión en el manejo de tablas de frecuencia.

	Porcentajes			
	ENFOQUES			
Resultado	Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
0	23.3	10	**4.8**	16.6
1	20	16.6	**2.88**	20.8
2	10	16.6	**2.88**	20.8
3	16.6	13.3	**3.36**	16.6
4	13.3	13.3	**1.92**	12.5
5	10	16.6	**1.44**	8.33
6	66	13.3	**0.96**	4.16
Total	99.8	**9.97**	**18.24**	99.79

Nivel Uni-estructural

El estudiante E20 trata de comparar los resultados obtenidos bajo los tres enfoques; pero esta comparación no constituye un argumento válido para justificar el éxito de su estrategia

	Porcentajes			
	ENFOQUES			
Resultado	Intuitiva Jugador uno	Intuitiva Jugador dos	Frecuencial	Proporcional (Clásica)
0	6.66	6.66	15.17	16.66
1	33.3	10	8.92	20.83
2	33.3	13.3	25.87	20.83
3	10	13.3	18.75	16.6
4	10	26.66	14.28	12.5
5	6.66	26.66	11.60	8.33
6	0	3.33	5.35	4.16
Total	100	100	100	100

"Yo gané porque puse un 33.3% de las fichas en la casilla "1" que tienen una frecuencia de 8.92% y una proporcionalidad del 20.83% y puse un 0% donde hay una frecuencia del 5.35% y una proporcionalidad del 4.16%

Nivel Multi-estructural

Algunos estudiantes reconocen el éxito de su estrategia al relacionar el número de pimpones con la disposición más exitosa de las fichas en el juego.

E29 *"Pues considero que tuve éxito por lo que coloqué menor número de fichas en donde era menor el número de pimpones*

Nivel Relacional

El estudiante reconoce que el conocimiento probabilístico del experimento le permite obtener mejores resultados cuando vuelva a realizar el juego (Importancia del análisis probabilístico para la toma de decisiones)

E18 "*Con base a los resultados fue un fracaso porque acomodé las fichas al azar y colocarlas al azar en los números que habían pocos pimpones con ese número fue en donde coloqué más fichas y se me dificultó sacar ese número*

pues así tendría oportunidad de sacar o terminar las fichas en donde había mayor número de pimpones"	*y debido a eso fue mi fracaso* " Utiliza los resultados de los enfoques intuitivo y clásico comparándolos para justificar el éxito de la estrategia

	Clásica	*Intuitiva*
1	*20.83%*	*20%*
2	*20.83%*	*26.6%*
6	*4.16%*	*3.3%*

Cálculo de probabilidades de eventos bajo los enfoques (intuitivo, frecuencial y clásico)

En la sesión 5 se compara los valores de probabilidad de diferentes eventos bajo los tres enfoques. Para ello, se llevaron a cabo las siguientes actuaciones: realización el cálculo de las probabilidades de eventos simples y compuestos a partir de la lectura de las distribuciones de probabilidad; para lo cual se tomaron los resultados del enfoque clásico y se resolvieron los diferentes resultados de probabilidad solicitados. Además se introdujo el empleo de la notación formal de la probabilidad.

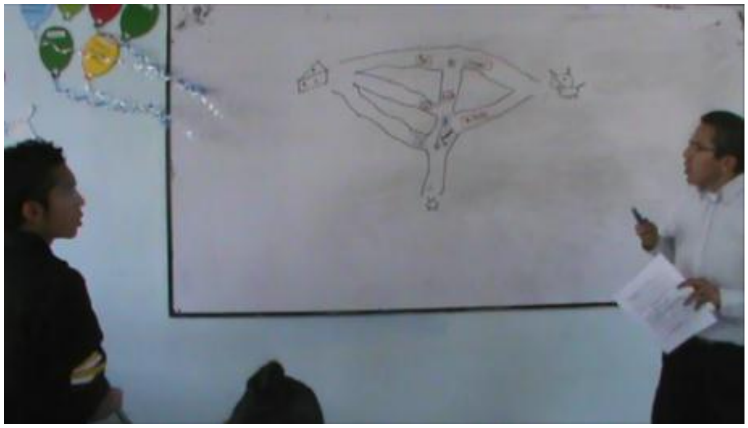
En la siguiente tabla se muestra el procedimiento socializado en el grupo utilizando la distribución de probabilidad obtenida con el enfoque clásico. Para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos emplea la regla de la suma para la unión de eventos mutuamente excluyentes.

	Pregunta: Cuál es la probabilidad de obtener un resultado:	**ENFOQUE** Proporcional (Clásica)
1	Igual a 3	P(igual a 3) = P(3)= 16.67%
2	Mayor que 3	P(mayor a 3) = P(4)+P(5)+P(6) = 12.50%+8.33%+4.17%
3	Mayor igual a 3	P(mayor igual a 3) = P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 16.67%+12.50%+8.33%+4.17%
4	Menor a 3	P(menor a 3)=P(0)+P(1)+P(2) = 16.67%+20.83%+20.83%
5	Menor igual a 3	P(menor igual a 3) = P(0)+P(1)+P(2)+P(3)= 16.67%+20.83%+20.83%+16.67%
6	Un número primo	P(número primo)= P(2)+P(3)+P(5) = 20.83%+16.67%+8.33%
7	Un número par	P(número par) = P(2)+P(4)+P(6)=20.83%+12.50%+4.17%
8	Un número impar	P(número impar) = P(1)+P(3)+P(5)= 20.83%+16.67%+8.33%
9	Mayor a 2 y Menor a 5	P(Mayor a 2 y Menor a 5) =P(3)+P(4)= 16.67%+12.50%
10	Mayor igual a 2 y Menor igual a 5	P(Mayor a 2 y Menor igual a 5) = P(2)+P(3)+P(4) +P(5)= 20.83%+16.67%+12.50%+8.33%
11	Mayor a 2 y Menor igual a 5	P(Mayor a 2 y Menor igual a 5) = P(3)+P(4) +P(5)= 16.67%+12.50%+8.33%
12	Mayor igual a 2 y Menor a 5	P(Mayor igual a 2 y Menor a 5) = P(2)+P(3)+P(4) 20.83%+16.67%+12.50%

Como ejercicio en casa los estudiantes desarrollaron los cálculos de probabilidad de los anteriores eventos bajo los enfoques intuitivos y frecuencial.

ANEXO I. REPORTE DE IMPLEMENTACIÓN TAREA LABERINTOS

En esta actividad, se lee las reglas de juego y se socializan a través de la realización de un juego con la ayuda de un estudiante.



Concepciones previas

A través de la pregunta "**¿Qué le parece más fácil: salvarse o ser devorado por el gato? ¿Por qué?"** se pretende explorar las concepciones previas de los estudiantes acerca de la probabilidad de ocurrencia de los resultados del juego; reportándose las siguientes respuestas.

Nivel Preestructural.	**Nivel Uni-estructural**
Se reportaran respuestas arbitrarias o argumentos basados en opiniones personales. E8 "*Me parece más fácil salvarme porque si el gato quiere comerme tendrá que trabajar muy duro*" E26 "*Salvarse porque nadie quiere ser devorado…*" Se plantea una justificación contradictoria respecto a la interpretación que hace del trazado de los caminos del tablero.E12 "*Me parece más fácil ser devorado por el gato porque hay solo dos opciones*" Tuvo en cuenta los desvíos de los caminos, sin asumir las condiciones (resultados de los dados) en ellos. E1-E6 "*Es más fácil que el ratón se salve y se coma el queso porque el camino izquierdo es más directo*" E25 "*Salvarse ya que hay más caminos para llegar al queso*" E36 "*Salvarme porque estoy más cerca yo del queso que del gato*" Este estudiante trata de realizar el análisis probabilístico tomando uno de los desvíos (B) pero asume equiprobabilidad en los resultados del mismo E30 "*Salvarse porque en la puerta B hay las mismas posibilidades de ir al Queso y más caminos hacia el gato*"	Analiza el experimento compuesto considerando únicamente uno de los experimentos simples que lo componen (uno de los tres desvíos)E2 E10 "*Yo creo que es más probable que sea devorado por el gato porque hay más posibilidad de sacar un número diferente a uno*" E17 "*Pues ser devorado por el gato porque tiene las acciones más posibles 4,5,6 casi siempre cuando uno tira un dado cae en 4,5,6*" Analizan parcialmente las opciones de los desvíos para la toma de decisiones. E5 "*Me parece que es más fácil ser devorado porque para el camino del gato hay tres opciones 4,5,6 en cambio en las otras hay 1 ó 2*" E7 "*Devorado por el gato porque hay más números que le hacen llegar al gato por consiguiente las posibilidades son muy reducidas*"

Nivel Multi-estructural

Asume el evento con mayor probabilidad de ocurrencia, aquel que tiene más números (resultados de los dados) en los desvíos de los caminos. E13 "*Pues lo más fácil es ser devorado por el gato porque el número al lanzar el dado cae más veces al irse al lado del gato*"E19 "*Ser devorado por el gato porque son más los números asignados a los caminos que nos conducen hacia el gato y es mayor la probabilidad de llegar a ese punto*"
El siguiente argumento es más completo porque analiza los desvíos A y B sin considerar al desvío C ya que este desvío tiene dos destinos equiprobables tanto hacia el "queso" como hacia el "gato" E21 "*Ser devorado porque tiene más posibilidades de sacar un número mayor a uno y después hay 3 posibilidades de pasar directo al gato*"

Cuantificación de probabilidades bajo el enfoque intuitivo

Con los siguientes ítems se pide al estudiante cuantificar el grado de probabilidad de los eventos finales del juego (Ratón o Queso)

B) Si se colocan 80 ratones en la entrada ¿Cuántos cree que llegarán al queso? ¿Por qué?
C) De los 80 ratones ¿Cuántos se espera que sean comidos por el gato? ¿Por qué?
D) Diligencie la siguiente tabla a partir de la información registrada en los puntos B y C.

Resultado	**Número de Ratones**	**Porcentaje**
Queso		
Gato		
Total	80	100%

Para los ítems B y C los estudiantes reconocen que los resultados "Queso" y "Gato" son excluyentes y que la suma de sus cardinales es igual al cardinal del espacio muestral. En el caso del laberinto, el número de ratones que se dirigen al queso más el número de ratones que se dirigen al gato es igual al total de ratones en este caso 80. Ante estos ítems se reportan las siguientes respuestas.

Nivel Preestructural

En algunos estudiantes, sus justificaciones contradicen los valores establecidos en la distribución de probabilidad:
Ejemplo de ello, es el estudiante E14 quien afirma: "*Es más probable ser devorado por el gato porque hay más opciones de ser devorado y casi siempre con el dado sacó números grandes como 4,5,6*"; Sin embargo, al diligenciar la tabla de frecuencia, asume igualmente probable ambos desvíos.

Esta es la distribución de probabilidad planteada por este estudiante quien otorga una mayor probabilidad de obtener el resultado "Gato" pero la distribución muestra que los dos eventos finales tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Resultado	**Número de Ratones**	**Porcentaje**
Queso	**40**	**50%**
Gato	**40**	**50%**
Total	80	100%

En otro caso, el estudiante E11 establece la distribución de probabilidad del experimento; pero al dar respuesta a las preguntas, ellas no coinciden con los valores de la tabla de frecuencia.
A la pregunta B responde *"Porque hay **18** ratones ya que es muy difícil que ellos lleguen al **queso**"*
A la pregunta C responde "*El **62** sobrante de los ratones que llegan al queso ya que es más posible que caiga en el **gato***" Esta es la distribución de probabilidad planteada por el estudiante

Resultado	**Número de Ratones**	**Porcentaje**
Queso	**10**	**37.5%**
Gato	**70**	**62.5%**
Total	**80**	100%

En una minoría de estudiantes, persiste el cálculo incorrecto de porcentajes. A continuación se presenta la distribución de probabilidad planteada por el estudiante E8.

Resultado	Número de Ratones	Porcentaje registrado por el estudiante	Porcentaje Correcto
Queso	30	30%	37.5%
Gato	50	70%	62.5%
Total	80	100%	100%

Nivel uni-estructural

La mayoría de estudiantes dan respuestas consistentes a los valores establecidos en la distribución de probabilidad, asumiendo su opinión con respecto al juego. Por ejemplo, el estudiante E5 responde las preguntas con la siguiente tabla de frecuencias:

Resultado	**Número de Ratones**	**Porcentaje**
Queso	**30**	**37.5%**
Gato	**50**	**62.5%**
Total	80	100%

• A la pregunta B responde "*Yo creo que llegarán aproximadamente unos 30 porque tendrían más posibilidades de llegar al gato*"
• A la pregunta C responde "*50 porque creo que los otros 30 van a salvarse y como son 80*"

Nivel multiestructural

Posterior al trabajo individual de la actividad, se socializan los resultados. En dicho momento, llama la atención la aplicación de las estrategias de dos estudiantes en la asignación del número de ratones hacia los resultados "Queso" y "Gato". Teniendo en cuenta la información del tablero, se describen las estrategias 1 y 2, las cuales se asumen como argumentos en el nivel multiestructural.

Estrategia 1: Repartir los 80 ratones en proporción al número de caminos que conducen hacia los dos resultados finales del juego

	Queso	Total
Caminos	3	5
Ratones	X	80

X= 48 Ratones

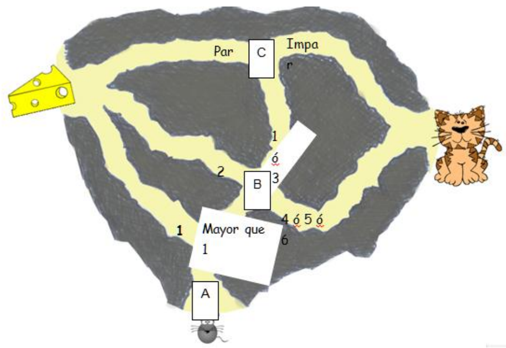
	Gato	Total
Caminos	2	5
Ratones	X	80

X= 32 Ratones

Bajo este procedimiento se obtendría esta distribución

Resultado	Número de Caminos	Número de Ratones	Porcentaje
Queso	**3**	**48**	**60%**
Gato	**2**	**32**	**40%**
Total	5	80	**100%**

Estrategia 2: Repartir los 80 ratones en proporción a los resultados obtenidos por el dado a través de los caminos que conducen hacia los dos resultados finales del juego



El estudiante diligencia una tabla de recuento así:

Queso	Gato
//////	///////

Bajo este procedimiento se obtendría esta distribución

Resultado	Número de Caminos	Número de Ratones	Porcentaje
Queso	6	37	46.25%
Gato	7	43	53.75%
Total	13	80	100%

A continuación se presenta un fragmento de la explicación dada por el estudiante a la estrategia 2, en donde tiene en cuenta los resultados del dado.

Estudiante1: *La posibilidad para el queso y el para el Gato*
Yo lo tomé por estos
Aquí dice que para irse para el gato o para el Queso
Aquí es mayor que uno; entonces sería para los dos
[Traza una marca para el Queso y otra para el Gato]
Entonces el uno para el Queso [Traza una marca para el Queso]
El 4; el 5 y el 6 entonces serían tres para el Gato [Traza tres marcas para el Gato]
Después aquí uno y dos [Traza dos marcas para el Queso]
uno y dos [Traza dos marcas para el Gato]
Para el Queso uno [Traza una marca para el Queso]
Para el par/impar ambos [Traza una marca para el Queso y otra al Gato]

Profesor: *Como el par/impar es como un empate, cierto; usted lo asigna por igual*
Estudiante1: *2;4;6 [Cuenta las marcas asignadas al Queso] 2;4;6;7 [Cuenta las marcas asignadas al Gato]. Entonces hay una de más la posibilidad puede ser para el Gato porque hay más*

Otro estudiante interviene haciendo un comentario acerca de las posibilidades que surgen en el primer desvío A

Estudiante2: *Debe tener en cuenta que hacia el Gato hay más posibilidades porque hay una posibilidad hacia allá [señalando al Queso] y para coger el camino hacia allá [señalando al Gato]*

Son 5 posibilidades

El profesor, interpretando los argumentos de la estrategia 2, propone otra estrategia en la que suma el número de resultados por cada una de las rutas.

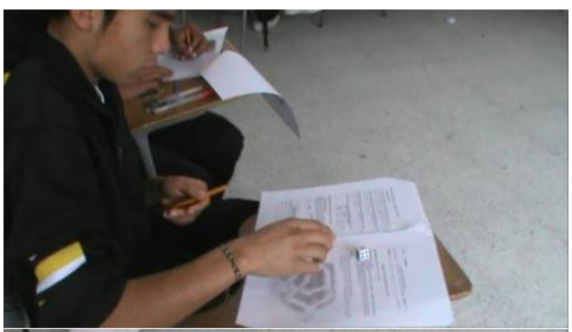
Ruta	**Resultado Final**	**Cantidad de resultados del dado**	**Cantidad de resultados del dado**
A-Queso	Queso	1	1
A-B-Queso	Queso	5+1	6
A-B-C-Queso	Queso	5+2+3	10
A-B-Gato	Gato	5+3	8
A-B-C- Gato	Gato	5+2+3	10
	Total	5	80

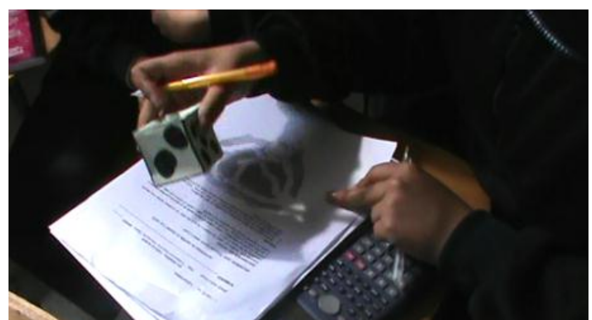
Bajo este procedimiento se obtendría esta distribución

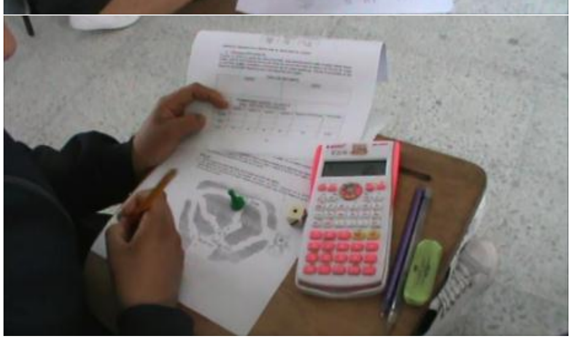
Resultado	Cantidad de resultados del dado	Cantidad de resultados del dado	Número de Ratones	Porcentaje
Queso	1+6+10	17	39	**48.75%**
Gato	8+10	18	41	**51.25%**
Total	35	35	80	**100%**

Experimentación y secuencias de los resultados del juego

Para el desarrollo de la sesión 7; los estudiantes realizaron 30 veces el experimento, consignaron los resultados en la tabla de recuento y consolidaron los resultados por tres compañeros más en la tabla de frecuencia







A continuación se analizan las respuestas obtenidas por algunos estudiantes frente a la siguiente situación:

Suponga que se liberan 6 ratones y se registran los resultados obtenidos:
***Secuencia A** Queso, Queso, Queso, Gato, Gato, Gato*
***Secuencia B** Queso, Gato, Queso, Gato, Queso, Gato*

Secuencia C *Queso, Gato, Queso, Queso, Queso, Gato*
a. *¿Cuál de las tres anteriores secuencias considera verdadera**?*** ***A,B,C*** *Justifique su respuesta.*
b. *¿Cuál de las tres anteriores secuencias considera la más probable? La C Justifique su respuesta.*
c. *¿Cree usted que se puede predecir con seguridad el resultado del próximo ratón liberado? Explique su respuesta.*

Algunos estudiantes utilizaron los resultados obtenidos bajo el enfoque frecuencial para sustentar sus ideas acerca de la aleatoriedad

Nivel Preestructural
Algunos estudiantes; como el E24 registraron argumentos arbitrarios **Pregunta a:** *Pues para mí cualquiera de las tres son ciertas por la suerte que uno tenga que le salga la secuencia A,B,C* **Pregunta b:** *La B; Pues como dije anteriormente la suerte que uno tenga* **Pregunta c:** *Pues la verdad no creo que se pueda predecir con seguridad por la forma en que está planteado el juego* (Sesgo del resultado aislado) E1: Bajo el enfoque frecuencial el estudiante registra una probabilidad de 58.3% para el evento “Queso” y una probabilidad del 41.7% para el evento “Gato” **Pregunta a:** *Considero que la c ya que por el resultado del anterior ejercicio hay más posibilidad hacia el queso* **Pregunta b:** *La c porque la probabilidad está en el queso por los resultados del juego anterior* **Pregunta c:** *No al ser un juego de azar no se puede predecir el último resultado* El siguiente estudiante E35 realiza una secuencia de 6 resultados del experimento; la considera suficiente para argumentar sus ideas acerca de la aleatoriedad; evidenciando una excesiva confianza en la muestra que generó del experimento (Ley de los pequeños números) **Pregunta a:** *A; porque cuando estaba jugando me salían 4 veces seguidas el queso y ya después me salían solo gatos y por una vez en cuando otra vez queso* Para el siguiente estudiante E37 no considera verdadera ninguna de las tres secuencias presentadas del experimento. **Pregunta a:** *Ninguna; porque es un juego al azar entonces es dependiendo como caiga* **Pregunta b:** *Ninguna; porque puede empezar cualquiera no siempre el gato por el queso eso depende* El estudiante E45 toma como argumento el hecho que el resultado “Queso” se repite en la secuencia “a” 3 veces, en la secuencia “b” 3 veces y en la secuencia “c” 4 veces, considerando que todas las secuencias tienen el mismo grado de probabilidad. **Pregunta a:** *Todas; porque tienen la misma probabilidad* **Pregunta b:** *Todas; ya que todas tienen la misma probabilidad de llegar a su objetivo* **Pregunta c:** *No; porque las seis caras del dado tienen la misma probabilidad de salir y uno no sabe cuál va a salir cuando lo lance* Para la pregunta B; el estudiante E30 plantea que la secuencia más probable es aquella que no presenta un patrón predecible; además de tener presente todavía el enfoque intuitivo sin utilizar los resultados del enfoque frecuencial **Pregunta b:** *C; porque no sigue un orden en el resultado y hay más caminos que llegan al queso* **Pregunta c:** *Se pueden contar las posibilidades de cada camino pero nunca se puede predecir el resultado del dado* Las siguientes respuestas presentadas por este estudiante E18 son contradictorias ya que asume como una de las opciones más probables una que no considera como verdadera

Pregunta a: *A y B* **Pregunta b:** *B y* ***C***

Nivel Uni-estructural
El siguiente estudiante E8 atribuye que las secuencias más probables son aquellas en las cuales los resultados se presentan el mismo número de veces y de forma alternada; obteniendo la misma respuesta tanto para las preguntas a y b. *La Secuencia B porque hay una probabilidad de 50/50* Las siguientes respuestas presentadas por este estudiante E23 plantea que la única secuencia y la más probable es la C por ser la más irregular **Pregunta a:** *La C; porque no es posible predecir el resultado y menos que sea constante una respuesta* **Pregunta b:** *La C; porque no es constante una respuesta* La siguiente respuesta planteada por el estudiante E21 a la pregunta C; presenta una interesante conclusión acerca de la predictibilidad de los resultados de los experimentos aleatorios: Se puede establecer su probabilidad pero no el resultado del próximo evento **Pregunta c:** *No; se pueden sacar los porcentajes del camino que puede tomar*

Finalmente, respecto a las actuaciones de los estudiantes se pudo observar:

• La mayoría de los estudiantes asumen la impredecibilidad de los resultados, evidenciando una comprensión en la naturaleza de los experimentos aleatorios

• Los estudiantes no plantean argumentos contundentes a las preguntas.

Al momento de institucionalizar los resultados de la actividad anterior, el profesor plantea las siguientes ideas como válidas:

Pregunta a: Cualquiera de las tres secuencias se pueden presentar en el experimento ya que los resultados “Queso” y “Gato” pueden ocurrir en cualquier cantidad y orden.
Pregunta b: Todas las secuencias tienen el mismo grado de probabilidad
Pregunta c: No, al ser un experimento aleatorio se conocen los posibles resultados pero no se pueden pronosticar

Sin embargo, la idea planteada en la pregunta b ***“Todas las secuencias tienen el mismo grado de probabilidad”*** es incorrecta debido que al determinar el valor de probabilidad y al realizar la simulación del experimento en Excel el cual se encuentra respaldado en el archivo “*Simulación Secuencias Laberintos.xls*” se observó que la secuencia “c” tiene menos posibilidad de ocurrencia.

El valor de Probabilidad obtenido con la aplicación del enfoque clásico para los eventos compuestos “Queso” y “Gato” son:

Evento	Resultado
Queso	4/9
Gato	5/9

Como la secuencia consiste en la presentación simultánea de los resultados; se puede aplicar el principio de la multiplicación

Secuencia	Total	Porcentaje Clásico
Queso-Queso-Queso-Gato-Gato-Gato	4/9* 4/9* 4/9* 5/9* 5/9* 5/9	1.51%
Queso-Gato-Queso-Gato-Queso-Gato	4/9* 5/9* 4/9* 5/9* 4/9* 5/9	1.51%
Queso-Gato-Queso-Queso-Queso-Gato	4/9* 5/9* 4/9* 4/9* 4/9* 5/9	1.20%

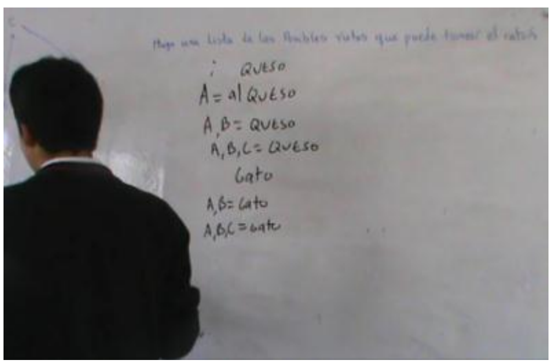
Realizando una simulación con 1.000.000 secuencias se obtuvieron estos resultados.

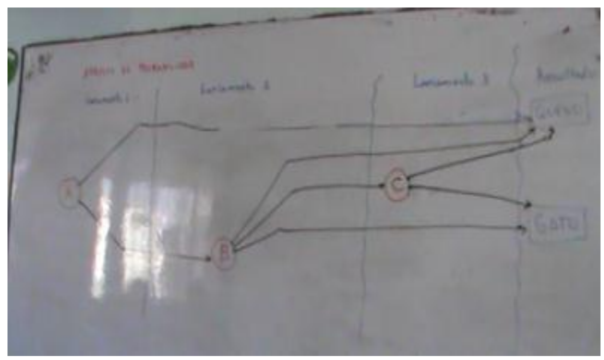
Secuencia	Total	Porcentaje Frecuencial	Porcentaje Clásico
Queso-Queso-Queso-Gato-Gato-Gato	14927	1.49%	1.51%
Queso-Gato-Queso-Gato-Queso-Gato	15017	1.50%	1.51%
Queso-Gato-Queso-Queso-Queso-Gato	11917	1.19%	1.20%

Asumiendo los análisis probabilísticos respecto a la secuencia de datos, la pregunta B debió plantearse así: ordene las secuencias por su mayor de ocurrencia. Ante ello, se considera que las secuencias A y B tienen la misma probabilidad de ocurrencia y la secuencia C la de menor valor de probabilidad.

Determinación de probabilidades en experimentos compuestos

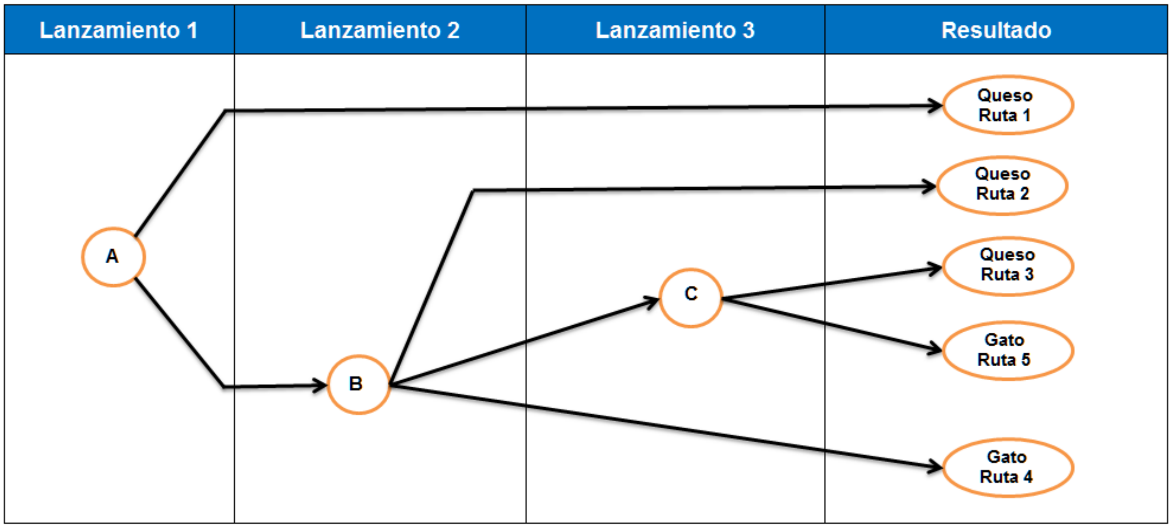
En la sesión No 8**,** el profesor pide a los estudiantes hacer una lista de las posibles rutas que puede tomar el ratón; tal como se observa en la siguiente imagen





Adicionalmente, el profesor expone a los estudiantes la manera de representar los resultados de un experimento compuesto a través de los árboles de probabilidad como sistema de representación gráfico; se aclara que el recorrido hecho por el ratón se interpreta como un experimento compuesto por tres experimentos simples, correspondientes a cada uno de los tres lanzamientos de un dado, el cual determina el desvío que debe tomar la ficha.

El profesor expone que en el caso del Laberinto los nodos corresponden a los desvíos del tablero de tal manera que corresponden a cada uno de los experimentos simples que componen; también se aclara que este experimento compuesto se puede realizar con uno; dos o tres experimentos aleatorios simples. En los ejemplos habituales de experimentos compuestos; el número de experimentos aleatorios simples que lo componen es fijo.



Después de realizar la representación gráfica del experimento los estudiantes completan la tabla marcando las rutas posibles.

Paso 1

Ruta	A	B	C	Queso	Gato
1	X			X	
2	X	X		X	
3	X	X	X	X	
4	X	X			X
5	X	X	X		X

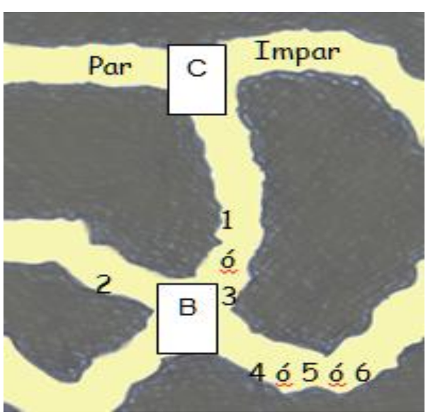
A partir de la información en la tabla anterior responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al queso? 3

b) ¿Cuántos caminos totales puede recorrer el ratón para llegar al gato? 2

Paso 2 A continuación se les pide a los estudiantes calcular la probabilidad en cada uno de los ramales del camino.

Para el cálculo de probabilidad de un desvío a otro (desde el punto B al punto C); uno de los estudiantes plantea el siguiente procedimiento de cálculo con una interpretación Preestructural de la Ley de Laplace.



Como desde el punto B se desprenden los números 2;1;3;4;5;6 el número total de resultados es:
2+1+3+4+5+6 = 21 resultados posibles

Como el desvío B-C se tienen los números 1 ó 3
Entonces el número total de resultados es:
1+3 = 4 resultados posibles

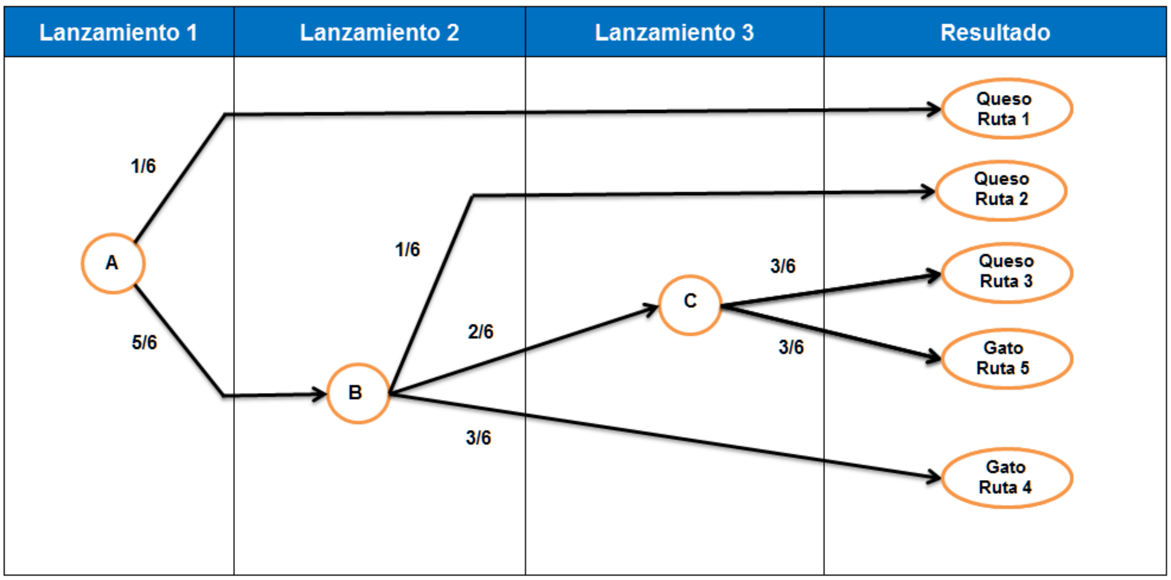
Entonces para el estudiante la probabilidad de pasar de B a C es $\frac{4}{21}$

En este caso este estudiante interpreta los números que aparecen en las caras del dado como el número de resultados y no como una etiqueta.

A través de esta actividad los estudiantes aplicaron la Ley de Laplace para establecer la probabilidad en cada uno de los ramales del camino cuya solución se muestra a continuación:

Ruta	Punto de Partida	Punto de llegada			
	A	B	C	Queso	Gato
1	X			1/6	
2	X	5/6		1/6	
3	X	5/6	2/6	3/6	
4	X	5/6			3/6
5	X	5/6	2/6		3/6

Así mismo el profesor mostró la manera como se asignan las probabilidades a las flechas del árbol de probabilidad; haciendo un cambio de representación tabular a uno gráfico.



Paso 3 En este paso los estudiantes aplicaron el principio de la multiplicación para el cálculo de las probabilidades de cada una de las rutas del laberinto

En este proceso; la mayoría de estudiantes reportaron dudas acerca del proceso de multiplicación de fracciones. Ante esta situación el profesor les recuerda el algoritmo habitual de multiplicación de fracciones.

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} * \frac{e}{f} = \frac{a * c * e}{b * d * f}$$

De tal manera que el cálculo de las probabilidades de cada uno de los puntos muestrales se ilustra en la siguiente tabla

Ruta	Cálculo	Resultado
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2	$\frac{5}{6} * \frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{5}{6} * \frac{2}{6} * \frac{3}{6}$	$\frac{30}{216}$
4	$\frac{5}{6} * \frac{3}{6}$	$\frac{15}{36}$
5	$\frac{5}{6} * \frac{2}{6} * \frac{3}{6}$	$\frac{30}{216}$

El profesor relaciona el operador “y” con la operación multiplicación;; por ejemplo para la ruta 3 A-B-C-Queso; se deben cumplir los tramos:

A-B	B-C	C-Queso

Cada uno con probabilidades $\frac{5}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}$ respectivamente

Como los tres tramos se deben cumplir para poder completar esta ruta; sus probabilidades deben multiplicarse

En la sesión 9 se tratan la aplicación del Principio de la Suma y la Comparación de los resultados obtenidos a través de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico

El profesor les recuerda que para llegar a los destinos finales del juego “Queso” y “Gato” se puede hacer por las cinco rutas; Por lo tanto la probabilidad de llegar a estos resultados se obtiene con la suma de las probabilidades de las rutas que llegan estos destinos.

P(Queso)= P(Ruta 1) + P(Ruta 2)+ P(Ruta 3)
P(Gato)= P(Ruta 4) + P(Ruta 5)

Paso 4

En este paso los estudiantes siguieron las instrucciones para obtener la probabilidad de ocurrencia de los eventos compuestos “Queso” y “Gato”; esperando obtener estos resultados

Resultado Final	Cálculo	Resultado	Porcentaje
Queso	$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{30}{216}$	$\frac{4}{9}$	44.44%
Gato	$\frac{15}{36} + \frac{30}{216}$	$\frac{5}{9}$	55.56%
TOTAL			100.00%

El profesor explica que el evento “Queso” se puede obtener por tres rutas y que su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de las rutas por las cuales se puede llegar a este evento Ruta 1 + Ruta 2 + Ruta 3 y que la probabilidad de ocurrencia del evento “Gato” se obtiene sumando las probabilidades de las rutas por las cuales se puede llegar a este evento Ruta 4 + Ruta 5.

La mayoría de los estudiantes manifestaron recordar el proceso de multiplicar y sumar fraccionarios; ante esta dificultad el profesor recordó a los estudiantes los algoritmos habituales; también se valió de la calculadora científica para la obtención directa de los resultados con la intención de concentrar al estudiante en la comprensión del principio y no en la realización de las operaciones suma y multiplicación de fraccionarios.

Posterior al ejercicio de cálculo de probabilidad; los estudiantes resuelven las siguientes preguntas para conocer el significado que estos le atribuyen a las nociones.

Defina con sus propias palabras el uso de la regla del producto
Defina con sus propias palabras el uso de la regla de la suma

A continuación se reportan algunas respuestas planteadas por los estudiantes acerca de la regla del Producto

Nivel Preestructural
Algunas respuestas no definen la regla E7: "*Nos ayuda a hallar el camino correcto al Gato o al Queso"* E23*: "Es más fácil utilizar la regla de la suma para obtener un porcentaje de un resultado"*
Nivel Uni-estructural
Algunos estudiantes definen este concepto utilizando aspectos concretos del juego; sin llegar a generalizar el concepto E24: "*.. nos sirve para hallar la probabilidad de los caminos que llevan al gato o al queso "* E21: "*Nos permite hallar la probabilidad de llegar por los diferentes caminos"* E6: "*Esa regla nos ayuda a definir las probabilidades de lanzamientos en los caminos del juego"* E13: "*Es la regla que nos permite calcular la probabilidad teniendo en cuenta la cantidad de rutas tomando una por una"* E45: "*La regla del producto trata sobre la probabilidad de obtener una de tantas rutas que nos plantean"* Algunos estudiantes asumieron la definición de la regla del producto como el procedimiento matemático para multiplicar números fraccionarios E32: "*Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador"* E25: "*Se multiplican los denominadores y se realiza la operación de la suma para sacar los numeradores luego se simplifica"* Estas definiciones describen los pasos empleados para la aplicación de la regla del producto E3-E14: "*Es un proceso en el cual cogemos los porcentajes de los caminos y los multiplicamos para así hallar los valores de cada ruta"* E16: "*Es un proceso mediante el cual se multiplican las probabilidades para hallar los porcentajes de cada camino"*
Nivel Multiestructural
Esta definición es más general E5: "*Es aquella en la que multiplicamos todas las probabilidades para llegar a un resultado"*

Al observar las anteriores respuestas se evidencia que la mayoría de los estudiantes no lograron formalizar este concepto. Después de socializar estas definiciones; el profesor presenta la siguiente definición: *"El Principio de la Multiplicación permite calcular la probabilidad de cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio compuesto"*

A continuación se reportan algunas respuestas planteadas por los estudiantes acerca de la regla de la Suma

Nivel Preestructural
Algunas respuestas no definen la regla E23: "*Nos sirve para obtener resultados de porcentajes"*
Nivel Uni-estructural
Algunos estudiantes definen este concepto utilizando aspectos concretos del juego; sin llegar a generalizar el concepto E3: "*Es un proceso en el cual cogemos las tres rutas de llegar al Queso y las sumamos; cogemos las dos rutas para llegar al Gato y así sacamos el porcentaje de cada uno "* E5: "*Es aquella en la que sumamos todos los resultados para sacar un porcentaje de los caminos"*

E6: "*Esa regla nos ayuda a definir los porcentajes de las sumas de los productos"* E13: "*..nos permite calcular el resultado final del recorrido para llegar al Queso o al Gato…"* E16: "*Es un proceso en el cual se suman las probabilidades totales de los caminos pero juntos"* E24: "*.. nos sirve para calcular ciertas rutas de llegada a un destino "* Esta respuesta refleja únicamente el algoritmo matemático para obtener el valor de probabilidad del evento E32: "*Se hace la suma de fraccionarios y se le saca el porcentaje al resultado"* E21: "*Es el método para obtener el porcentaje de llegada de cada resultado sumando los fraccionarios"*

Después de socializar estas definiciones; el profesor presenta una definición más formal
"El Principio de la suma permite calcular la probabilidad de la unión de varios de los posibles resultados de un experimento compuesto"

A través de los siguientes ítems se recolecta información acerca de los significados personales que los estudiantes atribuyeron a los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad; dando cuenta acerca de su definición, sus semejanzas, sus diferencias, sus ventajas y sus desventajas; a partir de la experimentación previa que tuvieron los estudiantes con las tareas "Travesía del Río" y "Laberintos". A continuación revisaremos algunas de las respuestas consignadas por los estudiantes en esta conceptualización.

Cabe notar que la mayoría de estudiantes no lograron formalizar los conceptos involucrados; en este ejercicio gran parte de estos conceptos no son definidos o son explicados a partir de aspectos específicos de las tareas desarrolladas; sin lograr plantear definiciones generales que sean aplicables a cualquier experimento aleatorio.

Para el ítem "Para usted ¿Qué significa enfoque de probabilidad?" se reportaron las siguientes respuestas

Nivel Preestructural o
Estas respuestas toman argumentos arbitrarios *E26: "Que como el Queso o el Gato tenemos las mismas posibilidad de ganar"* *E44: "Buscar como ganar; pero la probabilidad es perder y ganar .. obtener resultados"* *E33: "Es la forma como yo busco un resultado que se asimile"* *E20: "Es mirar todos los caminos y ver cuál es el mejor pero calculando"*
Nivel Uni-estructural
La siguiente definición no responde la pregunta; esta respuesta responde mejor al concepto de enfoque intuitivo. *E24: "Es un grado de certeza que uno de la a algo"* Algunos estudiantes plantean algunos aspectos verdaderos pero que no responden a la pregunta E18: *"Es cuando miramos las probabilidades por medio de porcentajes"* Esta respuesta tiene presente que los enfoques de probabilidad generan valores que se pueden comparar E28: "*Nos ayuda a comparar el resultado intuitivo; frecuencial y clásico y con ella podemos mirar cuál es más probable"* Esta definición toma elementos concretos del experimento E5: "*El enfoque de probabilidad es ver todos los caminos posibles y a través del cálculo llegar al más aceptado"*
Nivel Multiestructural
Esta definición se acerca al concepto usual de enfoque de probabilidad *E22: "Son diferentes maneras en las cuales se pueden hallar probabilidades"* Esta definición es un significado personal que atribuyó un estudiante a este concepto E25: "*La probabilidad vista desde todos los ángulos"* De hecho bajo esta definición este estudiante evidencia su capacidad de generalizar el concepto de enfoque de probabilidad; este concepto muestra como existen diferentes miradas para abordar la probabilidad

El siguiente ítem indaga las ideas presentes en los estudiantes acerca de los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad

Defina con sus propias palabras		
Enfoque intuitivo	**Enfoque Frecuencial**	**Enfoque Clásico**

Con respecto a la definición del enfoque intuitivo se reportan las siguientes respuestas:

Nivel Preestructural
Algunos estudiantes reportaron respuestas arbitrarias E24: "*Es el resultado que uno le da al azar al experimento*" E35: "*Es tener como una pregunta intuitiva de cómo se desarrollará el juego…*" E33: "*Es como yo pienso acerca de una operación*" El siguiente estudiante no define el enfoque sino que describe el procedimiento utilizado E18: *"Yo lo saqué porque me guié por la cantidad de pimpones"*
Nivel Uni-estructural
Estas respuestas contemplan de manera parcial algún aspecto del concepto E28: "*Organizamos los datos como creemos mejor*" Bajo las siguientes respuestas se plantea que este enfoque depende de la opinión de las personas. E25: "*Es el que yo creo e intuyo*" E27: "*Lo que yo opino y puedo deducir a partir de algo*" E23: "*Es aquel que asignamos nosotros mismos*" E7: "*Es el que nosotros creemos que es el más probable empíricamente*"
Nivel Multiestructural
Esta definición está asociada a una manera menos elaborada de asignar probabilidades E22: "*Es un análisis informal en el cual se puede opinar acerca de la probabilidad*" E21: "*Es un análisis informal en el cual decimos lo que creemos*" Esta respuesta está asociada a una asignación de probabilidades a priori E17: "*Es lo que nosotros pensamos que va a suceder con algo*" E20: "*Es lo que se hace antes de jugar según lo que yo crea*" E9: "*Es dar a conocer unos porcentajes pero sin haber jugado basado en una opinión personal*"

Con respecto a la definición del enfoque frecuencial se reportan las siguientes respuestas:

Nivel Preestructural
Algunos estudiantes reportaron el procedimiento E17: "*Es pedir el porcentaje de algunos compañeros para compararlos con los míos*"
Nivel Uni-estructural
Estas respuestas contemplan algunos aspectos del concepto E23: "*Es aquel que es más probable en el juego*"
Nivel Multiestructural
La siguiente respuesta está relacionada con el enfoque clásico E21: "*Es un análisis que hacemos con respecto a los resultados que nos da el juego*" Las siguientes respuestas planteadas por la mayoría de estudiantes reconocen que para la aplicación de este enfoque se requiere de la experimentación directa con el juego E25: "*Las operaciones me las da el resultado del juego*" E24: "*Es el resultado del experimento*" E19: "*Es el proceso donde nosotros experimentamos el ejercicio para obtener una respuesta más acertada*" E45: "*Es cuando se realiza el juego y se obtienen los resultados*"

E20: "*Es lo que se hace cuando se juega*" E35: "*Es como obtener los resultados del juego*"

Con respecto a la definición del enfoque clásico se reportan las siguientes respuestas:

Nivel Preestructural
Algunos estudiantes reportaron respuestas arbitrarias E17: "*Es hallar los diferentes procesos de algo*" La siguiente respuesta explica mejor el enfoque frecuencial E24: "*Es el resultado más probable según los cálculos estadísticos*" La siguiente respuesta plantea en parte el procedimiento de obtención de probabilidades bajo este enfoque E1: "*sumando las rutas y sacando el porcentaje*" E41: "*Se utilizan fraccionarios para llegar a un porcentaje*" E21: "*Es el análisis que hacemos según la cantidad de caminos y opciones que tenga el juego*"
Nivel Uni-estructural
La siguiente respuesta corresponde mejor al concepto enfoque de probabilidad E9: "*Es tomando diferentes métodos para dar a conocer una probabilidad*" Esta percepción de estos estudiantes tiene presente que en el enfoque clásico no hay que experimentar con el juego E28 E35: "*Se basa solamente los posibles resultados sin experimentar*"
Nivel Multiestructural
Bajo las siguientes respuestas los estudiantes asumen que la aplicación del enfoque clásico obedece a un análisis matemático de los resultados del juego E23: "*Es un análisis matemático del juego*" E20: "*Es lo que se hace analíticamente*" E7: "*Es lo que calculamos la probabilidad según cálculos matemáticos*" E22: "*Es un análisis en el cual gracias a las operaciones matemáticas podemos hallar probabilidades*" E19: "*Es el proceso analítico donde tratamos de hallar la respuesta utilizando procedimientos matemáticos*

Además de dar una definición se procede a explorar las ideas presentes en los estudiantes acerca de las semejanzas y diferencias de estos enfoques

¿Qué semejanzas y diferencias encuentra en cada uno de los enfoques?

Estas son algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes acerca de las semejanzas:

Nivel Preestructural
Esta respuesta considera que la aplicación de los tres enfoques se traduce al enfoque intuitivo E43: "*Busca una estrategia ya que casi todos los enfoques nos da un porcentaje intuitivo*" E19: "*En todos se trata de llegar a la respuesta más acertada en cada uno se halla su porcentaje*" E42: "*Buscan llegar a un objetivo el cual es el resultado*"
Nivel Uni-estructural
E23: "*Que puede dar el mismo resultado sólo cambiaría el método*" E22: "*Que los tres enfoques llegan a una probabilidad*" E21: "*Los tres enfoques nos arroja un resultado con porcentajes*"
Nivel Multiestructural
E18: "*Pues con los tres puedo hallar los porcentajes pero de diferente manera*" En la siguiente respuesta el estudiante muestra semejanza entre dos enfoques E7: "*En el enfoque intuitivo y el clásico no toca jugar*" E8: "*Que el frecuencial y el clásico nos llevan a algo más exacto*"

Estas son algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes acerca de las diferencias:

Nivel Preestructural
E43: "*Con intuición experimentando lo que nos da"*
E25: "*Diferentes datos para el mismo problema"*
E44: "*Los dos usan medidas diferentes para hallarlos"*
E42: "*Tienen diferentes formas de llegar a un resultado"*
Nivel Uni-estructural
E23: "*No son el mismo método se toman diferentes números"*
E22: "*Las operaciones que se utilizan cambian"*
E19: "*En cada enfoque se utiliza un método diferente…"*
E14: "*Las operaciones que se utilizan cambian*
E35: "*Uno es experimentando; el otro es lo que puede esperar y uno es por intuición"*
E41: "*Se hallan de diferente forma y utilizan diferentes técnicas"*
Nivel Multiestructural
Los siguientes estudiantes resaltan que los enfoques frecuencial y clásico permite la obtención de probabilidad de una manera más confiable que el enfoque intuitivo
E21: "*Que el frecuencial y el clásico es más seguro que el intuitivo"*
E9: "*Que el frecuencial y el clásico nos llevan más a algo exacto"*

Para cada uno de los enfoques se busca indagar las ideas presentes en los estudiantes acerca de las ventajas y las desventajas de la aplicación de los enfoques de probabilidad

Estas son algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes acerca de las ventajas dela aplicación de cada uno de los enfoques:

Ventajas Enfoque intuitivo

Nivel Preestructural
La siguiente respuesta no responde la pregunta
E26: "*lo hacemos según la idea que formemos"*
E21: "*nos deja opinar sin tener en cuenta un punto de referencia"*
E14: "*nos deja dar un punto de vista para calcular probabilidades"*
E37: "*que se haya más rápido sin necesidad de tantas operaciones"*
Nivel Uni-estructural
Esta respuestas plantean que la facilidad en la aplicación de este enfoque
E17: "*pues el enfoque intuitivo es fácil porque es lo que opinamos.."*
E9: "*que no hay procedimiento y es a nuestro antojo"* E19: "*tenemos en cuenta nuestra opinión"*
E24: "*pues uno puede dar una opinión o unos resultados así no se haya hecho el experimento"*
E23: "*se pude realizar sin necesidad de haber jugado"*
E7: "*ofrece un rápido análisis de un posible resultado"*
E45: "*… uno pone en práctica los sentidos ya que es lo que uno siente"*

Ventajas Enfoque frecuencial

Nivel Preestructural
Esta respuesta plantea que la facilidad en la aplicación de este enfoque
E17: "*me parece fácil porque es de sacar porcentajes"*
Las siguientes respuestas no responden la pregunta
E18: " *… aquí podemos ver la cantidad de probabilidad que tuve en la cantidad de tiros con el dado "*
E6: "*aquí podemos ver la probabilidad"*
Nivel Uni-estructural
E19: "*tenemos la experiencia de comprobar por nuestro medio los resultados"*
E33: "*dan un resultado aproximado a la respuesta"* E23: "*Es el más preciso de los tres"*
E24: "*.. por medio de una experiencia ya obtiene unas probabilidades"*
E22: *"son métodos objetivos para calcular probabilidades"*
E21: "*este analiza según la experiencia del juego"* E16: "*se basa en los resultados del juego"*
Nivel Multiestructural

Nivel Relacional

Ventajas Enfoque Clásico

Nivel Preestructural
Las siguientes respuestas toman en cuenta aspectos específicos del juego sin concluir acerca de las ventajas de este enfoque. E22: *"miramos la probabilidad a la cual podemos llegar"* E43: "*el resultado nos lo da el juego"* E21: "*sabemos dónde es más probable que puede llegar el ratón"* E16: "*se hace teniendo en cuenta los cálculos matemáticos"* E17: "*nos dan el número de caminos para el ratón nos dan el resultado en los mismos problemas"* E14: "*miramos las probabilidades a las cuales podemos llegar"* E9: "*tomamos algo del frecuencial"* E7: "*es el cálculo más probable que salga en un experimento"* E6: "*el enfoque de las rutas"*E26: "*el resultado lo hallamos obteniendo del juego"*
Nivel Uni-estructural
E37: "*puede ser más exacto"* E23: "*se pude realizar sin necesidad de haber jugado"*
Nivel Multiestructural
Este estudiante considera que este enfoque es el más certero E19: "*nos damos cuenta con más certeza el resultado y planteamos cálculos matemáticos"*
Nivel Relacional

Estas son algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes acerca de las desventajas dela aplicación de cada uno de los enfoques:

Desventajas Enfoque intuitivo

Nivel Preestructural
Las siguientes respuestas no responden la pregunta E6: "*de pronto nos equivocamos"*E26: "*que debemos tener algo propio para así ir ganando"* E43: "*no sabemos si estamos en lo cierto o no"* E30: "*que no conquistemos como debe ser"* E27: "*no sabemos si funcione o sea correcto"* E33: "*que las respuestas todas son diferentes y no son exactas"* E45: "*… que puede haber menos probabilidades de llegar al objetivo"* E19: "*No llegamos a la respuesta y a veces llegamos lejos de la respuesta"*
Nivel Uni-estructural
E24: "*tiene más probabilidad de error"* E23: "*no es muy exacto y confiable"* E22: "*no podemos tener un cálculo seguro"*E18: "*… depende del pensamiento de la persona"* E16: "*no se tiene en cuenta el desarrollo del juego"* E7: "*tiene más margen de error"*

Desventajas Enfoque frecuencial

Nivel Preestructural
E32: "*que las respuestas son diferentes y no son exactas"* Aquí el estudiante describe la forma del tablero del juego E18: "*… es que aquí el dado tiene 6 caras y hay 3 hacia el gato y 1 hacia el queso directo y dos con ruta diferente para llegar a cualquiera de los dos lados "* E17: "*que podemos saber las probabilidades de otros compañeros …"* E11: "*Que hay más probabilidades hacia el gato que hacia el queso"* E6: "*..los resultados son más inciertos"*
Nivel Uni-estructural
E23: "*tiene que haber jugado para ser utilizado"* La respuestas de estos estudiantes muestran que el tiempo invertido para la aplicación del enfoque

frecuencial es una de sus mayores desventajas E15-E19: "*Nos da un poco de demora hasta hacer el experimento"* E33: "*podemos hacerlo y demorarnos pero es el más aproximado"* E45: "*... que necesita un poco más de tiempo"* Las siguientes respuestas tienen en cuenta la variabilidad de los resultados de probabilidad que se pueden obtener bajo el enfoque frecuencial E21: "*puede variar según los resultados que nos del juego"* E22: "*.puede cambiar según el resultado a lo largo del juego"*
Nivel Multiestructural
A través de esta idea este estudiante plantea que la exactitud de las estimaciones depende si se realiza el experimento muchas veces E16-E20: "*que si no se hace muchas veces no se puede tener una probabilidad segura"* E31: "*que a veces no se puede sacar un resultado bueno con poquitos datos"*

Desventajas Enfoque Clásico

Nivel Preestructural
Esta respuesta es falsaE16: "*que no se tiene en cuenta los resultados del juego"* Bajo esta respuesta, el estudiante plantea que este enfoque es más difícil de comprender y aplicar.E18: " .. *muchas veces nos confundimos al hacer este enfoque "*
Nivel Uni-estructural
E23: "*.trabaja con porcentajes"* E21-E14: "*.solo nos da un resultado viendo el tablero del juego sin experimentar"* E8: "*.tomamos algo del frecuencial"* E27: "*varia respecto al juego experimentado"* E26: "*que debemos tener en cuenta que si ganamos o perdemos debe ser igual al juego"* E43: "*el resultado nos lo da el juego"* E35: "*que puede variar respecto al juego experimentado"*
Nivel Multiestructural
La siguiente idea hace alusión a la aplicación de la Ley de Laplace y a los principios del producto y la suma para el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos E24: "*.ya tiene sus pasos para hallar el resultado y no se puede hallar por otro que no sea el mismo"* E19: "*Es más complicado ya que tenemos que emplear muchos cálculos"* E7: "*tiene unos parámetros estrictos que seguir"* E45: "*... que necesita un proceso matemático más elaborado"*

ANEXO J. REPORTE DE IMPLEMENTACIÓN TAREA APARATO DE GALTON

<u>Análisis bajo el enfoque clásico</u>

En la sesión 10; inicialmente se les presenta a los estudiantes el recurso informático empleando el simulador en movimiento

A los estudiantes se les pide hacer un listado de todas las posibles rutas que puede tomar una bola en este laberinto. Frente a lo cual se muestran algunas rutas planteadas por los estudiantes.

El estudiante E21 comete un error en la determinación de una de algunas de las posibles rutas

D1-D2-D4-A	**D1-D4-D2-B**	**D1-D2-C**	**D1-D3-C**	**D1-D**

El estudiante E1 plantea todos los posibles caminos pero no lo hace de manera ordenada

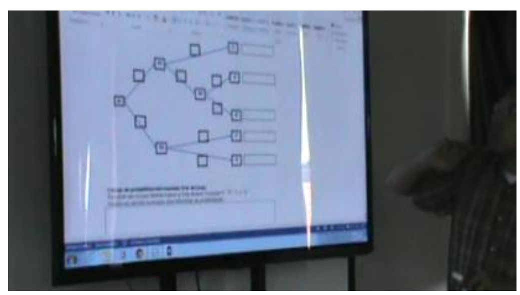
D1-D2-D4-A	**D1-D3-D**	**D1-D2-C**	**D1-D2-D4-B**	**D1-D3-C**

El estudiante E15 plantea todos los posibles caminos pero sigue un ordenamiento.

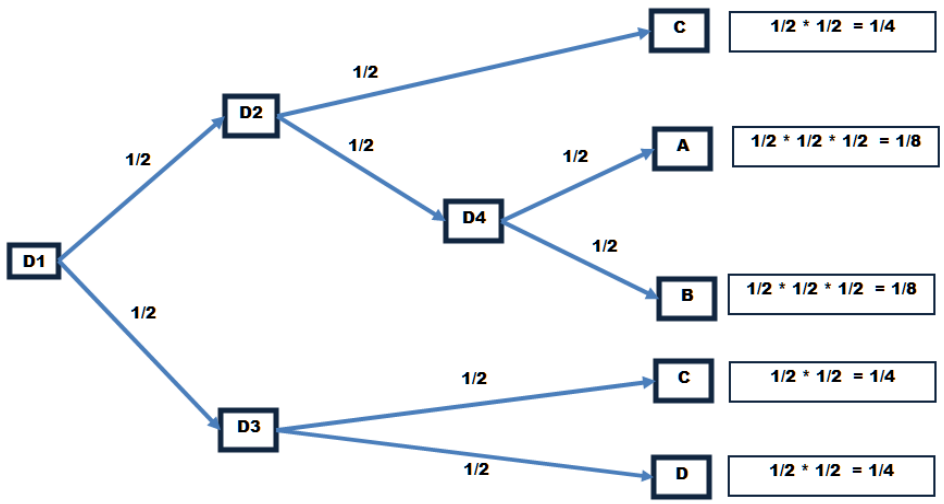
D1-D2-C	D1-D2-D4-B	D1-D2-D4-A	D1-D3-C	D1-D3-D

A continuación el profesor les pregunta a los estudiantes:

- Cuántas posibles rutas hay?
- Cuántos experimentos simples se pueden presentar en el aparato de Galton?



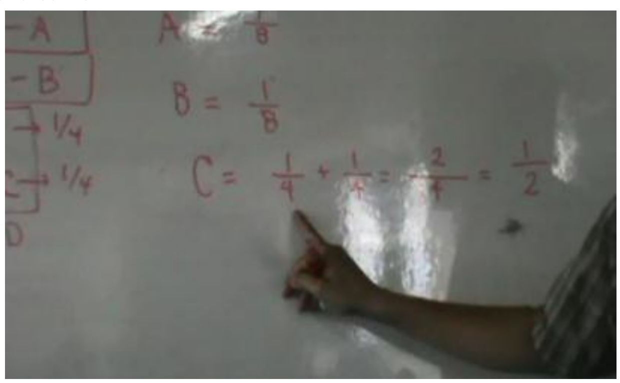
Con el fin de recordar el cálculo de probabilidades de eventos en experimentos compuestos bajo el enfoque clásico; se asignaron las probabilidades a las flechas del gráfico y se calcularon las probabilidades de los puntos muestrales con el principio de la multiplicación



De tal manera que las probabilidades de los diferentes caminos quedaron calculadas así

Camino	Destino	Probabilidad
D1-D2-C	C	1/4
D1-D2-D4-A	A	1/8
D1-D2-D4-B	B	1/8
D1-D3-C	C	1/4
D1-D3-D	D	1/4

Para el cálculo de las probabilidades de los resultados finales del juego; se les recordó a los estudiantes la aplicación del principio de la suma

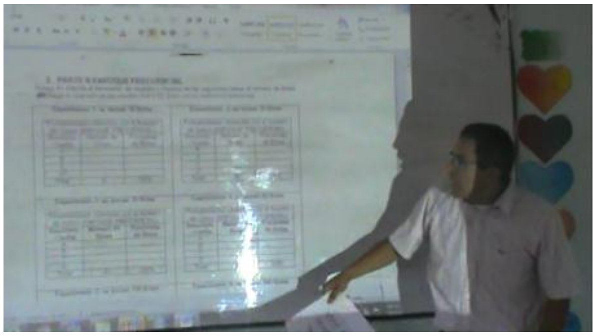


A los estudiantes se les pide convertir los resultados de probabilidad de fracción a porcentaje

Destino	Procedimiento	Resultado	Porcentaje
A	1/8	1/8	12.5%
B	1/8	1/8	12.5%
C	1/4+1/4	1/2	50%
D	1/4	1/4	25%

Análisis bajo el enfoque frecuencial

Este aspecto de la tarea se trabajó en las sesiones 11 y 12. Durante estas sesiones se pone en marcha el simulador y los estudiantes procedieron a registrar los resultados obtenidos en las diferentes corridas



Algunos estudiantes elaboraron tablas de recuento para cada uno de los experimentos

El procedimiento original para la toma de datos propone realizar las diez corridas de manera independiente como lo ilustra el siguiente cuadro:

Corrida	Procedimiento
10 Bolas	Correr la simulación con 10 Bolas y registrar resultado de10 bolas
20 Bolas	Correr la simulación con 20 Bolas y registrar resultado de 20 bolas
30 Bolas	Correr la simulación con 30 Bolas y registrar resultado de 30 bolas
60 Bolas	Correr la simulación con 60 Bolas y registrar resultado de 60 bolas
120 Bolas	Correr la simulación con 120 Bolas y registrar resultado de 120 bolas
240 Bolas	Correr la simulación con 240 Bolas y registrar resultado de 240 bolas
480 Bolas	Correr la simulación con 480 Bolas y registrar resultado de 480 bolas
600 Bolas	Correr la simulación con 600 Bolas y registrar resultado de 600 bolas
1000 Bolas	Correr la simulación con 1000 Bolas y registrar resultado de 1000 bolas
1500 Bolas	Correr la simulación con 1500 Bolas y registrar resultado de 1500 bolas

Bajo el anterior plan se repite el experimento 4060 veces.

Con los estudiantes se acuerda el siguiente procedimiento para la toma de los datos del experimento con el fin de ahorrar tiempo en la toma de datos; bajo este plan se repite el experimento 1500 veces.

Corrida	Procedimiento
10 Bolas	Correr la simulación con 10 Bolas y registrar resultado de 10 bolas
20 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 10 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 20 bolas.
30 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 10 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 30 bolas.
60 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 30 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 60 bolas.
120 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 60 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 120 bolas.
240 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 120 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 240 bolas

480 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 240 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 480 bolas
600 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 120 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 600 bolas
1000 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 400 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 1000 bolas
1500 Bolas	Tomar el resultado de la corrida anterior; realizar una corrida con 500 Bolas reunir los resultados de ambas corridas para completar una corrida de 1500 bolas

Un ejemplo del anterior plan de recolección de datos se ilustra a continuación

Experimento 1: se lanzan 10 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	0	1	1
B	0	2	2
C	0	4	4
D	0	3	3
Total	0	10	10

Experimento 2: se lanzan 20 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	1	3	4
B	2	3	5
C	4	2	6
D	3	2	5
Total	10	10	20

Experimento 3: se lanzan 30 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	4	1	5
B	5	0	5
C	6	5	11
D	5	4	9
Total	20	10	30

Experimento 4: se lanzan 60 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	5	1	6
B	5	1	6
C	11	20	31
D	9	8	17
Total	30	30	60

Experimento 5: se lanzan 120 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	6	6	12
B	6	8	14
C	31	23	54
D	17	23	40
Total	60	60	120

Experimento 6: se lanzan 240 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	12	18	30
B	14	17	31
C	54	55	109
D	40	30	70
Total	120	120	240

Experimento 7: se lanzan 480 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	30	32	62
B	31	25	56
C	109	120	229
D	70	63	133
Total	240	240	480

Experimento 8: se lanzan 600 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	62	16	78
B	56	14	70
C	229	60	289
D	133	30	163
Total	480	120	600

Experimento 9: se lanzan 1000 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	78	52	130
B	70	59	129
C	289	190	479
D	163	99	262
Total	600	400	1000

Experimento 10: se lanzan 1500 Bolas

Resultado - Casilla	Número Inicial de Bolas	Número de Bolas lanzadas	Número Final de Bolas
A	130	64	194
B	129	60	189
C	479	248	727
D	262	128	390
Total	1000	500	1500

Con el ánimo de minimizar el tiempo de recolección de la información un estudiante realiza el experimento únicamente para una corrida de 10 bolas y calcula el número de bolas correspondiente a las demás corridas empleando una regla de tres obteniendo el siguiente resultado:

Resultado - Casilla	10 Bolas	20 Bolas	30 Bolas	60 Bolas	120 Bolas
A	1	2	3	6	12
B	1	2	3	6	12
C	4	8	12	24	48
D	4	8	12	24	48
Total	10	20	30	60	120

Resultado - Casilla	240 Bolas	480 Bolas	600 Bolas	1000 Bolas	1500 Bolas
A	24	48	60	100	150
B	24	48	60	100	150
C	96	192	240	400	600
D	96	192	240	400	600
Total	240	480	600	1000	1500

Obteniendo los siguientes porcentajes

Resultado - Casilla	10 Bolas	20 Bolas	30 Bolas	60 Bolas	120 Bolas
A	10%	10%	10%	10%	10%
B	10%	10%	10%	10%	10%
C	40%	40%	40%	40%	40%
D	40%	40%	40%	40%	40%
Total	100%	100%	100%	100%	100%

Resultado - Casilla	240 Bolas	480 Bolas	600 Bolas	1000 Bolas	1500 Bolas
A	10%	10%	10%	10%	10%
B	10%	10%	10%	10%	10%
C	40%	40%	40%	40%	40%
D	40%	40%	40%	40%	40%
Total	100%	100%	100%	100%	100%

Ante estos resultados; el estudiante reporta que los porcentajes obtenidos no cambian; para tal fin se le aclara que este procedimiento no es el correcto puesto que se generan unos resultados basados en un supuesto; la anterior situación refleja una confianza excesiva en los resultados de una muestra pequeña (Ley de los pequeños números)

Con respecto a la agrupación de los estudiantes; estos se organizaron por parejas; en la cual uno de los estudiantes observa el simulador indicándole en que puerta ingresaba la pelota mientras que el otro estudiante registraba los resultados en tablas de recuento

Por limitante de tiempos; Para los Tamaños de experimento de 1000 y 1500 el profesor entrega los resultados para estas corridas.

Construcción Gráficas – Comparación de resultados

Este aspecto de la guía se trata en la sesión 13. Con respecto a la construcción de las gráficas; los estudiantes reunieron la información de los porcentajes registrados por medio de la siguiente tabla; a continuación se presenta un ejemplo

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B						
Resultado – Casilla	**Probabilidad Clásica Parte A**	**Experimento 1**	**Experimento 2**	**Experimento 3**	**Experimento 4**	**Experimento 5**
		10 Bolas	**20 Bolas**	**30 Bolas**	**60 Bolas**	**120 Bolas**
A	12.50%	10.00%	20.00%	16.67%	10.00%	10.00%
B	12.50%	20.00%	25.00%	16.67%	10.00%	11.67%
C	50.00%	40.00%	30.00%	36.67%	51.67%	45.00%
D	25.00%	30.00%	25.00%	30.00%	28.33%	33.33%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

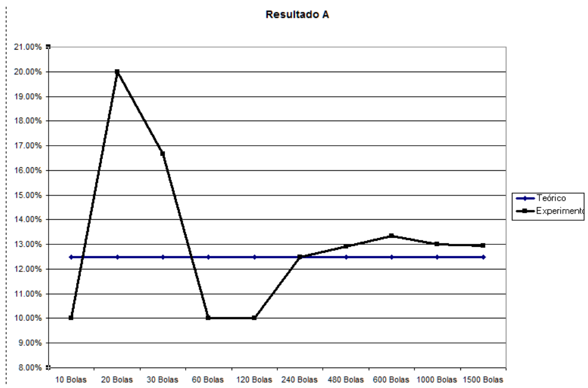
Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato (ENFOQUE FRECUENCIAL) Parte B					
Resultado - Casilla	**Experimento 6**	**Experimento 7**	**Experimento 8**	**Experimento 9**	**Experimento 10**
	240 Bolas	**480 Bolas**	**600 Bolas**	**1000 Bolas**	**1500 Bolas**
A	12.50%	12.92%	13.33%	13.00%	12.93%
B	12.92%	11.67%	11.67%	12.90%	12.60%
C	45.42%	47.71%	50.00%	47.90%	48.47%
D	29.17%	27.71%	25.00%	26.20%	26.00%
Total	100%	100%	100%	100%	100%

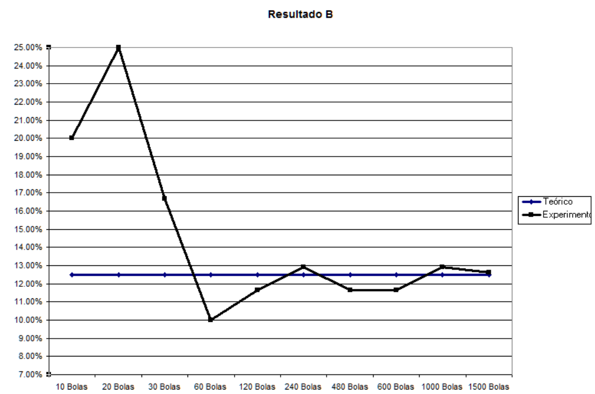
El profesor les aclara a los estudiantes que para cada una de las gráficas; el resultado obtenido por el enfoque clásico se grafica como una línea recta; y los porcentajes obtenidos en las diferentes corridas se graficarían uniendo los puntos en la gráfica

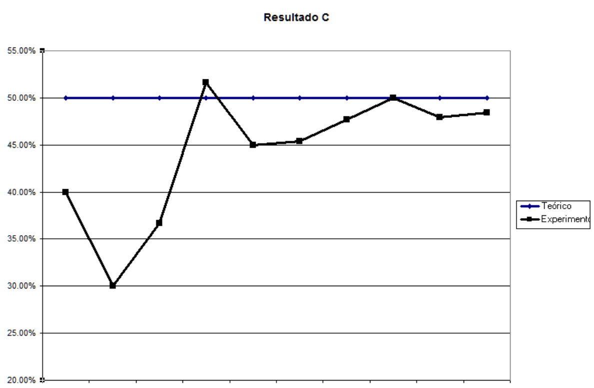
La escala en el eje vertical estaba graduada de 0 a 1; surgió en varios estudiantes la dificultad de ubicar los puntos en las gráficas al traducir de la notación porcentual a la notación decimal

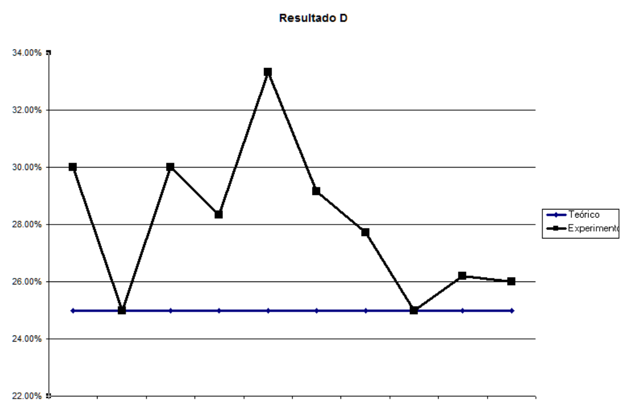
Como la escala estaba graduada entre 0 y 1 algunos estudiantes; a través de la observación de las gráficas no pudieron detectar la convergencia de las probabilidades obtenidas por el enfoque frecuencial hacia los valores de probabilidad obtenidos por el enfoque clásico.

Ante este inconveniente presentado en la gráfica el profesor proyectó con unos datos obtenidos el comportamiento









A continuación se examinan algunas de las respuestas acerca de la siguiente pregunta

¿Qué sucede con los porcentajes obtenidos para las casillas A, B, C, D al aumentar el número de bolas en el experimento?

Nivel Preestructural
La siguiente interpretación de la respuesta no explica lo sucedido con el comportamiento de los porcentajes- E23: " *cambia el orden de los resultados"*
Nivel Uni-estructural
E9: "*que siempre tiende a acercar o alejarse de la línea teórica"*

E20: "*Que al aumentar el número de bolas la probabilidad se acerca mucho más a la línea teórica y en algunos sea cruzan el teórico con el experimento*"
Nivel Multiestructural
E26: " *con el aumento de más balotas se van acercando a la probabilidad clásica*"
Nivel Relacional
E1: " *se acerca más al enfoque clásico*" E5: "*a medida de que el número de ensayos es más grande se acerca a la teoría clásica*"

Finalmente con la última actividad se pide a los estudiantes realizar una estimación de los valores de las frecuencias absolutas y relativas de una tabla de frecuencia para una corrida correspondiente a 1 025 320 bolas.
Algunos estudiantes manifestaron tener desconocimiento de cómo responder la pregunta; ante lo cual el profesor los remite a las conclusiones. Algunos estudiantes plantearon dos procedimientos para resolver la situación:

El primero contempla tomar los porcentajes obtenidos con el mayor número de observaciones 1500 bolas; para este caso:

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A	132,574	12.93%
B	129,190	12.60%
C	496,973	48.47%
D	266,583	26.00%
Total	1,025,320	100.00%

El segundo contempla tomar los porcentajes obtenidos con la aplicación del enfoque clásico

Probabilidades obtenidas al poner en marcha el Aparato		
Resultado – Casilla	**Número de Bolas**	**Porcentaje de Bolas**
A	128,165	12.50%
B	128,165	12.50%
C	512,660	50.00%
D	256,330	25.00%
Total	1,025,320	100%

ANEXO K. REPORTE DE IMPLEMENTACIÓN TAREA QUINIELAS

Determinación del espacio Muestral

En la sesión 14, los estudiantes realizaron el listado de las diferentes posiciones que pueden tomar los tres caballitos en el pódium. Algunos resultados a esta actividad fueron:

Nivel Preestructural: El estudiante E4 determinó tres combinaciones del podio y las repitió dos veces, olvidando así determinar las tres faltantes combinaciones.

Opción	Primer Lugar	Segundo Lugar	Tercer Lugar
A	**Bucéfalo**	**Strategos**	**Marengo**
B	**Marengo**	**Bucéfalo**	**Strategos**
C	**Strategos**	**Marengo**	**Bucéfalo**
D	**Strategos**	**Marengo**	**Bucéfalo**
E	**Bucéfalo**	**Strategos**	**Marengo**
F	**Marengo**	**Bucéfalo**	**Strategos**

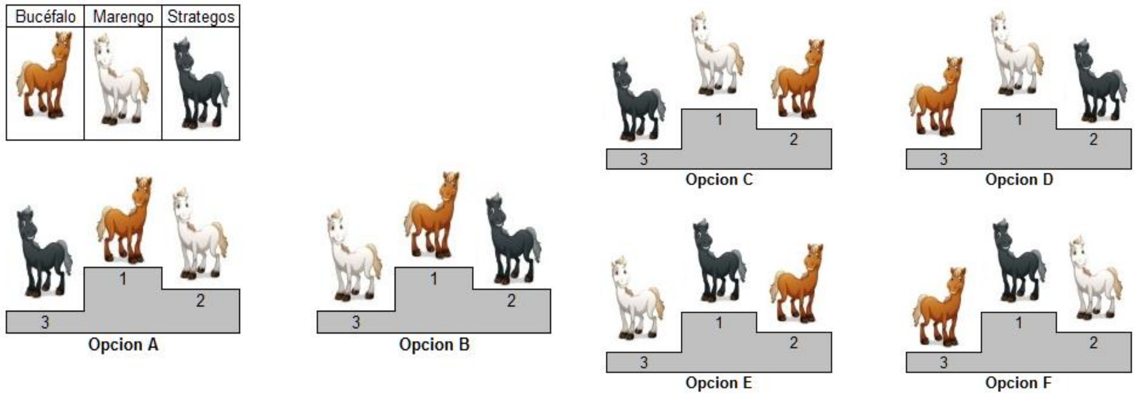
Nivel Uni-estructural: En este nivel, se determinan todas las posibles opciones sin tener en cuenta un orden en la asignación de las posiciones; esta estrategia de enumeración fue evidenciada en la mayoría de los estudiantes. El siguiente es el ejemplo del estudiante E7.

Opción	Primer Lugar	Segundo Lugar	Tercer Lugar
A	Strategos	Bucéfalo	Marengo
B	Bucéfalo	Marengo	Strategos
C	Marengo	Strategos	Bucéfalo
D	Bucéfalo	Strategos	Marengo
E	Strategos	Marengo	Bucéfalo
F	Marengo	Bucéfalo	Strategos

Nivel Multi-estructural: Se plantea todas las posibles opciones siguiendo un orden en la asignación de los valores fijos. La siguiente tabla es el ejemplo realizado por el estudiante 15.

Opción	Primer Lugar	Segundo Lugar	Tercer Lugar
A	Bucéfalo	<u>Marengo</u>	Strategos
B	Bucéfalo	Strategos	<u>Marengo</u>
C	Marengo	<u>Bucéfalo</u>	Strategos
D	Marengo	Strategos	<u>Bucéfalo</u>
E	Strategos	<u>Bucéfalo</u>	Marengo
F	Strategos	Marengo	<u>Bucéfalo</u>

Nivel Relacional: A partir de la intervención de un estudiante se realiza una representación pictórica de las diferentes opciones de primer; segundo y tercer lugar



<u>Enfoque intuitivo</u>

A continuación se desarrolla el enfoque intuitivo analizando las estrategias de varios clientes hipotéticos del casino. Esta es la situación que se presenta en la tarea

> ***ESTRATEGIAS DE VARIOS JUGADORES***
> *Entre los clientes del casino ha venido corriendo el rumor, en los últimos días, que el dueño del casino ha decidido manipular la máquina, al registrar en las últimas semanas pérdidas al negocio debido a la entrega de bastantes premios a los clientes que apostaron por los caballos Bucéfalo y Marengo como favoritos.*
>
> ***Aníbal,*** *cliente frecuente del casino, cree que el dueño del casino manipulará la máquina a su favor. Si usted fuera Aníbal y tuviera la opción de apostar, indique en cuántas carreras, de doscientas posibles, le apostaría a las posiciones de primer, segundo y tercer lugar. Justifique la estrategia*

A continuación se presentan las respuestas reportadas por los estudiantes acerca del tratamiento de las intuiciones del Cliente Aníbal.

Nivel Preestructural

- Para la siguiente respuesta; el estudiante E10 se pone en el papel del Dueño del Casino y no del Apostador Aníbal
  E10: "*Le coloqué a la carrera a Strategos para confundir a los apostadores y tener más ganancias en el casino y menos pérdidas"*
- La siguiente respuesta corresponde una interpretación incorrecta de la situación; tal como lo presenta el siguiente estudiante E6

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	60	30%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	30	15%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	60	30%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	30	15%
Strategos	**Bucéfalo**	**Marengo**	**10**	**5%**
Strategos	**Marengo**	**Bucéfalo**	**10**	**5%**
		Total	200	100%

E6: "*El número mayor de carreras era para Marengo y Bucéfalo porque fueron los dos más favoritos "*

- Los datos presentados por el anterior estudiante no reflejan la creencia de "Aníbal" de que el dueño del casino puede manipular los resultados de la máquina a Favor del Caballo Strategos.

E7: "*porque la máquina últimamente daba más premios a Bucéfalo y Marengo; entonces eso quiere decir que el mayor número de carreras fue para ellos dos y un poco más bajo para Strategos"*

Nivel Uni-estructural
E1: "*Pues para mí el dueño lo que quiere obtener es ganancias de modo que va a poner a Strategos que casi no es el favorito de la gente; entonces yo coloqué carreras de modo que ganara Strategos como lo dice Aníbal "*

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos	15	7.5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	30	15%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	15	7.5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	40	20%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	50	25%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	50	25%
		Total	200	100%

E3: "*Yo opino que Aníbal al ver que no estaba teniendo buenos resultados alteraría la Máquina a favor de Strategos que es el menos elegido por las personas"*

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos	10	5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	25	12.5%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	10	5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	25	12.5%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	65	32.5%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	65	32.5%
		Total	200	100%

Otros argumentos que respaldan una asignación volcada hacia el caballito "Strategos" se presentan a continuación
E8: "*Sabiendo que Aníbal cree que el dueño manipulará la máquina a su favor; entonces le apostará más a Strategos que a Bucéfalo y Marengo"*
E12: "*La idea de Aníbal es que Bucéfalo y Marengo pierdan para que el ganador sea Strategos porque la gente apuesta mayor número de veces por bucéfalo y Marengo"*
E13: "*Pues Aníbal le apostó más a Strategos por lo que él estaba pensando que el dueño irá a modificar la máquina"*
E14: "*Como dice que el dueño manipulará la máquina entonces las posibilidades de ganador es para Strategos porque se cambian los ganadores"*
E15: "*pues cuando el dueño ve que Bucéfalo y Marengo son los que más están ganando pues modifica la máquina para que Strategos sea el mayor ganador"*
E17: "*la estrategia es ponerle mayor número de carreras a Strategos y menos a Bucéfalo y Marengo para que así el dueño del casino gane y los clientes que apuesten por Bucéfalo y Marengo pierdan"*
E20: " *Aníbal le apostaría a Strategos porque el cree que el dueño manipulará la máquina para hacer que Bucéfalo y Marengo bajen de rendimiento y hacer que Strategos pueda ganar"*
E21: "*La estrategia consiste en poner mayor número de carreras al caballo menos favorito ya que el dueño intentará manipular la máquina a su favor "*

A continuación se presentan las respuestas reportadas por los estudiantes acerca del tratamiento de las intuiciones del Cliente Magno.

***Magno**, funcionario del casino, conoce la calibración de los caballos. Él sabe que Bucéfalo es asignado con un nivel de competitividad entre "1" al "4", Marengo es asignado con un nivel de competitividad entre "3" al "6", y Strategos es asignado con un nivel de competitividad entre"5" al"9" (ver tabla de la página 1). Si usted fuera **Magno** y tuviera la opción de apostar en doscientas carreras, indique en cuántas de éstas apostaría para las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar. Justifique la estrategia*

A continuación se muestran algunas de las respuestas obtenidas por los estudiantes así como sus argumentos:

Nivel Uni-estructural

El estudiante E21 plantea la siguiente distribución refiriéndose a la tabla que relaciona los niveles de competitividad con el rango de puntaje

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	20	10%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	20	10%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	10	5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	20	10%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	70	35%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	60	30%
		Total	200	100%

E21: "*Esta estrategia se asemeja a la de Aníbal; pero éste si pone mayor número de carreras a Strategos pero de acuerdo con la tabla"*

El estudiante E1 plantea la siguiente distribución

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	5	2.5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	25	12.5%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	5	2.5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	35	17.5%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	65	32.5%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	65	32.5%
		Total	200	100%

E1: *"Para mí le coloqué más a Strategos ya que Magno le colocó un nivel más alto a los demás ya que sabe la calibración de los caballos"*

El estudiante E16 plantea la siguiente distribución

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	10	5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	10	5%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	30	15%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	30	15%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	60	30%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	60	30%
		Total	200	100%

E16: *"Strategos tiene mayor nivel de competitividad tiene más probabilidad de ganar "*

El estudiante E18 plantea la siguiente distribución

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	5	2.5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	15	7.5%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	20	10%

Marengo	Strategos	Bucéfalo	30	15%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	50	25%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	80	40%
		Total	200	100%

E18: "*Según los puntajes de cada caballo y el promedio de los tres les coloco el total de carreras*"

Después de socializar las respuestas con los estudiantes; el profesor propuso dos procedimientos de asignación de probabilidad utilizando la información disponible del problema (Los niveles de competitividad así como los puntajes mínimo y máximo asignados a cada uno de los 10 niveles de competitividad):

Procedimiento 1: Repartir las doscientas carreras proporcionalmente al puntaje promedio obtenido por el caballito; empezando por el primer puesto y luego por el segundo y el tercer lugar.

Caballito	Nivel		Puntaje		
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Medio
Bucéfalo	1	4	5800	7400	6600
Marengo	3	6	6600	8200	7400
Strategos	5	9	7400	9400	8400
					22400

A través de las siguientes razones se distribuyen los primeros lugares entre las doscientas carreras

	Bucéfalo	Total
Puntaje	6600	22400
Carreras	X	200

X= 59 Carreras

	Marengo	Total
Puntaje	7400	22400
Carreras	X	200

X= 66 Carreras

	Strategos	Total
Puntaje	8400	22400
Carreras	X	200

X= 75 Carreras

Para repartir el segundo y el tercer puesto se deja fijo el primer lugar

Caballito	Primer Puesto		
	Bucéfalo	Marengo	Strategos
Bucéfalo		6600	6600
Marengo	7400		7400
Strategos	8400	8400	
	15800	15000	14000

A través de las siguientes razones se distribuyen el segundo y el tercer lugar

Primer Lugar

Bucéfalo

	Marengo	Total
Puntaje	7400	15800
Carreras	X	59

X= 28 Carreras

	Strategos	Total
Puntaje	8400	15800
Carreras	X	59

X= 31 Carreras

Marengo

	Bucéfalo	Total
Puntaje	6600	15000
Carreras	X	66

X= 29 Carreras

	Strategos	Total
Puntaje	8400	15000
Carreras	X	66

X= 37 Carreras

Strategos

	Bucéfalo	Total
Puntaje	6600	14000
Carreras	X	75

X= 35 Carreras

	Marengo	Total
Puntaje	7400	14000
Carreras	X	75

X= 40 Carreras

Con base en estos valores se asignaron las posibles combinaciones de las doscientas carreras

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Carreras Asignadas	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	59	28	14.00%
Bucéfalo	Strategos	Marengo		31	15.50%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	66	29	14.50%
Marengo	Strategos	Bucéfalo		37	18.50%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	75	35	17.50%
Strategos	Marengo	Bucéfalo		40	20.00%
		Total	200	200	100%

Procedimiento 2 Repartir las doscientas carreras proporcionalmente al nivel promedio obtenido por el caballito; empezando por el primer puesto y posteriormente por el segundo y el tercer lugar

Caballito	Nivel		
	Mínimo	Máximo	Medio
Bucéfalo	1	4	2.5
Marengo	3	6	4.5
Estrategos	5	9	7
			14

A través de las siguientes razones se distribuyen los primeros lugares entre las doscientas carreras

	Bucéfalo	Total
Nivel	2.5	14
Carreras	X	200

X= 36 Carreras

	Marengo	Total
Nivel	4.5	14
Carreras	X	200

X= 64 Carreras

	Strategos	Total
Nivel	7	14
Carreras	X	200

X= 100 Carreras

Para repartir el segundo y el tercer puesto se deja fijo el primer lugar

Caballito	Primer Puesto		
	Bucéfalo	Marengo	Strategos
Bucéfalo		2.5	2.5
Marengo	4.5		4.5
Strategos	7	7	
	11.5	9.5	7

A través de las siguientes razones se distribuyen el segundo y el tercer lugar

Primer Lugar

Bucéfalo

	Marengo	Total
Nivel	4.5	11.95
Carreras	X	36

X= 14 Carreras

Marengo

	Bucéfalo	Total
Nivel	2.5	9.5
Carreras	X	64

X= 17 Carreras

Strategos

	Bucéfalo	Total
Nivel	2.5	7
Carreras	X	100

X= 36 Carreras

	Strategos	Total
Nivel	7	11.95
Carreras	X	36

X= 22 Carreras

	Strategos	Total
Nivel	7	9.5
Carreras	X	64

X= 47 Carreras

	Marengo	Total
Nivel	4.5	7
Carreras	X	100

X= 64 Carreras

Con base en estos valores se asignaron las posibles combinaciones de las doscientas carreras

Puesto			Número de Carreras	Número de Carreras	Porcentaje
Primer	Segundo	Tercer			
Bucéfalo	Marengo	Strategos	36	14	7.00%
Bucéfalo	Strategos	Marengo		22	11.00%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	64	17	8.50%
Marengo	Strategos	Bucéfalo		47	23.50%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	100	36	18.00%
Strategos	Marengo	Bucéfalo		64	32.00%
		Total	200	200	100%

A continuación se presentan las respuestas reportadas por los estudiantes acerca del tratamiento de las intuiciones del Cliente Sancho Panza

Finalmente ***Sancho Panza,*** *inspector de juegos, considera que la máquina no favorece a ningún caballo en particular. Si usted fuera* ***Sancho Panza*** *y tuviera la opción de apostar en doscientas carreras, indique en cuántas de éstas apostaría para las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar. Justifique la estrategia*

Frente a este ítem; todos los estudiantes repartieron las doscientas carreras entre las 6 posibilidades de manera equitativa. Algunos estudiantes dividieron las 200 carreras entre 6 obteniendo la siguiente distribución

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos	33.33	16.66%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	33.33	16.66%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	33.33	16.66%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	33.33	16.66%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	33.33	16.66%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	33.33	16.66%
		Total	200	100%

Algunos estudiantes ajustaron el número de carreras a valores enteros

Primer Puesto	**Segundo Puesto**	**Tercer Puesto**	**Número de Carreras**	**Porcentaje**
Bucéfalo	Marengo	Strategos	34	17%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	34	17%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	33	16.5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	33	16.5%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	33	16.5%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	33	16.5%

		Total	200	100%

A continuación se muestran algunos argumentos:

Nivel Preestructural
E18: "*Colocar los puntajes con reparto proporcional a cada uno de ellos* "   E10: "*Le coloqué casi a todos la misma cantidad de carreras*"   E3: "*Se deben colocar valores similares a la capacidad de cada caballo*"   Este estudiante no realiza el análisis de las posiciones sino de los caballos   E1: "*Pues que puede caer en cualquiera de los tres caballos* "
Nivel Uni-estructural
E20: "*El inspector apuesta equitativamente creyendo que todos los caballos tienen el mismo rendimiento* "   E16: "*Si la máquina no favorece a ninguno; todos deben tener la misma posibilidad de ganar* "   E19: "*Pues como a ningún caballo favorece pues lo repartí casi por igual número de carreras porque cualquier caballo puede ganar según Sancho Panza*"
Nivel Multiestructural
E21: "*Pues; esta estrategia se basa en la igualdad de los valores colocados equitativamente*"
Nivel Relacional

Enfoque Frecuencial

En la sesión 15 se trató la siguiente situación:

Espartaco, *cliente frecuente del casino, ha decidido registrar el resultado de doscientas carreras durante la última semana, obteniendo los siguientes resultados (Ver tabla REGISTRO DEL RESULTADO PARA 200 CARRERAS). A partir de la información obtenida por Espartaco, indique en cuántas de éstas apostaría para las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar.*

Primer Puesto	*Segundo Puesto*	*Tercer Puesto*	*Número de Carreras*	*Porcentaje*
Bucéfalo	*Marengo*	*Strategos*	*10*	
Bucéfalo	*Strategos*	*Marengo*	*4*	
Marengo	*Bucéfalo*	*Strategos*		
Marengo	*Strategos*	*Bucéfalo*		
Strategos	*Bucéfalo*	*Marengo*		
Strategos	*Marengo*	*Bucéfalo*	*87*	
		Total	*200*	*100%*

Una estrategia empleada por los estudiantes fue la de identificar con un color cada una de las 6 posibles combinaciones con el fin de facilitar el conteo de las 6 posibles opciones

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Bucéfalo	Marengo	Strategos
Bucéfalo	Marengo	Strategos	1	2	3
Bucéfalo	Strategos	Marengo	1	3	2
Marengo	Bucéfalo	Strategos	2	1	3
Marengo	Strategos	Bucéfalo	3	1	2
Strategos	Bucéfalo	Marengo	2	3	1
Strategos	Marengo	Bucéfalo	3	2	1

REGISTRO DEL RESULTADO PARA 200 CARRERAS

Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos	Bucéfalo	Marengo	Strategos
3	2	1	2	1	3	3	2	1	3	2	1
2	1	3	3	2	1	3	1	2	3	2	1
3	1	2	3	1	2	2	3	1	3	2	1
3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
3	2	1	3	2	1	2	1	3	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	2	1	3	3	1	2	3	2	1
3	1	2	2	3	1	2	3	1	2	1	3
2	1	3	3	2	1	2	1	3	3	2	1
3	2	1	2	1	3	2	3	1	3	2	1
3	1	2	2	1	3	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	2	1
2	3	1	3	2	1	2	1	3	3	2	1
3	1	2	2	1	3	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	2	1	2	1	3	3	2	1
2	1	3	3	1	2	3	2	1	1	2	3
2	1	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	2	1	2	3	1	3	2	1	2	1	3
1	2	3	3	2	1	3	2	1	3	1	2
2	1	3	3	2	1	3	2	1	1	2	3
2	3	1	3	2	1	2	1	3	2	3	1
1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	1	2	3	2	1
2	1	3	3	2	1	2	3	1	3	2	1
3	2	1	2	1	3	1	3	2	2	3	1
1	2	3	2	1	3	3	2	1	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	2	1
3	2	1	3	1	2	3	2	1	3	1	2
3	1	2	2	3	1	2	3	1	3	2	1
2	1	3	3	1	2	3	2	1	3	2	1
3	2	1	1	2	3	3	2	1	3	1	2
3	2	1	3	1	2	3	1	2	3	2	1
3	1	2	2	3	1	3	2	1	3	1	2
3	2	1	2	3	1	2	3	1	3	1	2
3	2	1	2	3	1	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	2	1	2	1	3	3	1	2	3	2	1
3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	2	3
3	2	1	2	1	3	3	1	2	3	2	1
3	2	1	3	2	1	2	3	1	1	2	3
3	1	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	3	1	2	1	3	2	2	1	3
2	1	3	2	3	1	3	2	1	2	3	1
2	1	3	3	1	2	2	3	1	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	2	1	3	2	1
2	1	3	3	2	1	3	1	2	3	2	1

3	1	2	3	2	1	3	2	1	3	1	2
1	2	3	3	1	2	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	3	1	3	2	1	3	2	1

Al realiza el conteo se obtiene la siguiente tabla de frecuencias

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	10	5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	4	2%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	31	15.5%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	21	10.5%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	47	23.5%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	87	43.5%
		Total	200	100%

A partir de la información obtenida por Calígula, indique en cuántas de éstas apostaría para las diferentes combinaciones de primer, segundo y tercer lugar.

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Conteo	Número de Carreras	Bucéfalo	Marengo	Strategos
Bucéfalo	Marengo	Strategos		0	1	2	3
Bucéfalo	Strategos	Marengo		0	1	3	2
Marengo	Bucéfalo	Strategos	//	2	2	1	3
Marengo	Strategos	Bucéfalo	//	2	3	1	2
Strategos	Bucéfalo	Marengo		0	2	3	1
Strategos	Marengo	Bucéfalo	//////	6	3	2	1
		Total		10			

Los datos correctos de esta tabla de frecuencias para este ítem son:

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	0	0%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	0	0%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	2	20%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	2	20%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	0	0%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	6	60%
		Total	10	100%

Algunos estudiantes no tuvieron en cuenta la información recolectada por Calígula y obtuvieron las siguientes distribuciones de probabilidad como el estudiante E13

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje
Bucéfalo	Marengo	Strategos	0.5	5%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	0.5	5%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	1.5	15%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	1.5	15%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	3	30%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	3	30%
		Total	10	100%

O Algunos cometieron errores de conteo como el registro del estudiante E19

Primer Puesto	Segundo Puesto	Tercer Puesto	Número de Carreras	Porcentaje

Bucéfalo	Marengo	Strategos	0	0%
Bucéfalo	Strategos	Marengo	1	10%
Marengo	Bucéfalo	Strategos	1	10%
Marengo	Strategos	Bucéfalo	1	10%
Strategos	Bucéfalo	Marengo	1	10%
Strategos	Marengo	Bucéfalo	6	60%
		Total	10	100%

El anterior ítem es un muestreo de 10 observaciones tomado del registro de 200 observaciones
A continuación se revisan algunas de las respuestas reportadas por los estudiantes frente a la siguiente pregunta:

Está en favor de la actuación de Calígula respecto a la estrategia de registrar sólo 10 carreras *SI____ NO____ ¿Por qué?*

Está en favor de la actuación de Calígula respecto a la estrategia de registrar sólo 10 carreras
A continuación se presentan las respuestas de quienes contestaron estar de acuerdo con el registro de Calígula

Nivel Preestructural
E8: "Strategos es un buen competidor y no se necesita mucha estadística para saberlo" *E24: "Porque es más fácil de hacer el conteo y porque también es más claro el ejercicio"* *E23: "No había necesidad de hacer tantos cálculos"* *E7: "No es necesario hacer o realizar tantas cuentas para llegar a darnos cuenta que Strategos es el ganador"* *E16: "Casi siempre no van a ser constantes los resultados"*

A continuación se presentan las respuestas de quienes contestaron no estar de acuerdo con el registro de Calígula

Nivel Preestructural
E20: "*Es muy poquito el muestreo para sacar un resultado bueno*"
Nivel Uni-estructural
E22: "*Porque es más acertado registrar mayor cantidad de carreras aunque se demora más; pero es más acertado*" E19: "*Porque con 200 carreras puede dar mayor para apostar al más ganador aunque en esta tabla dan sólo 10; así pues las carreras las gana Strategos; luego Marengo y Luego Bucéfalo; aunque las 10 carreras es poquito, puede cambiar el resultado*" E10: "*Porque nunca hubo un cero por ciento (0%) de resultado en el registro de las 200 carreras*"

Para el ítem
"Entre los siguientes clientes: **Aníbal, Magno y Sancho Panza,** explique cuál podría tener la razón."
Se reportan las siguientes respuestas

Nivel Preestructural
E19: "Cualquiera puede tener la razón; es lo que creo" *E8: "Puede ser Sancho Panza porque tienen la misma posibilidad pero al recorrer los análisis anteriores nos damos cuenta que Strategos gana si la máquina se manipula"*
Nivel Uni-estructural

E10: "Yo opino que quien podría tener razón es el señor Aníbal"   *E20: "Aníbal porque hizo un enfoque frecuencial para tomar una decisión"*

Para el ítem
"Si usted fuera al casino ¿cuál de las propuestas registradas tendría en cuenta para hacer las apuestas? Explique"
Se reportan las siguientes respuestas

Nivel Preestructural
E19: "*tendría en cuenta Todas las propuestas; son datos muy similares*"   E21: "*yo pienso que todas porque cualquier cosa puede pasar con la máquina*"   E7: "*Para mí es Calígula porque hace un experimento con menos turnos para saber a qué caballo apostarle*"   E10: "*La de Magno pues se ve una buena probabilidad por los porcentajes están muy cercanos uno de otro*"   E16: "*La de Calígula porque podría ser más exacta*"   E20: "*El de Aníbal por el rango de muestra que tiene*"
Nivel Uni-estructural
E17-E15: "*yo creo que el de Espartaco pues es lo más acertado y lo más seguro*"

Para el ítem
"¿Es posible confirmar o desmentir el rumor generado en el casino? Justifique su afirmación"
Se reportan las siguientes respuestas

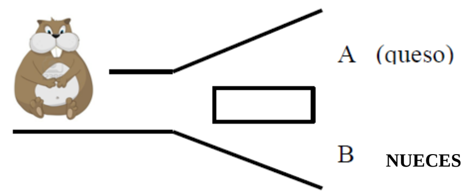
Nivel Preestructural
E19: "*SI porque puede ganar cualquier sin manipular*"   E21: "*SI; porque algunas probabilidades son muy parecidas y todo indica que favorece al dueño del casino*"   E15: "*Yo creo que NO pues como vemos en casi todos los resultados el resultado es igual*"   E20: "*Se puede confirmar porque el casino no siempre va a dejar que gane el mismo*"
Nivel Uni-estructural
E7: "*SI porque antes el ganador era solo Bucéfalo y ahora es Strategos*"   E8: "*SI porque con los datos nos damos cuenta que Bucéfalo era el ganador y ahora es Strategos*"   E16: "*Es posible afirmarlo porque se cambió todo a favor de Strategos*"

ANEXO L. EJEMPLOS DE RESPUESTAS CATEGORIZADAS

Este anexo presenta ejemplos de respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, las cuales se identifican con el siguiente código: (código de la prueba/cuestionario, ítem, código de estudiante).

Aleatoriedad

Concepto experimento aleatorio

Prueba Diagnóstica 1- ítem 1B (PD1-1B)	
1. Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después, Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la que considere verdadera. **1. B.** ¿Cree usted que se puede predecir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda? Explique su respuesta.	
Prueba Diagnóstica 1- ítem 3B (PD1-3B)	
3. Al inicio del camino, mostrado en la figura, se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces. Los otros 20 prefieren las nueces.	**3B.** Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensa que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué? 
Cuestionario evaluativo 2- ítem A (CE2-A)	
Se tienen tres productos a los cuales le falta un dígito del precio. Los dígitos 5, 9 y 3 deben ser asignados, sin repetir, a cada una de las casillas vacías de los precios.	

		
Patineta Atom 21"	**Bicicleta Junior**	**Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas**
1 5 1 ☐ 0 0	2 6 9 4 ☐ 0	4 4 9 ☐ 0 0

A. ¿Considera posible predecir con seguridad los precios de los artículos? ¿Por qué?

Preestructural

P1. Asume que resultados de una variable física se pueden predecir con certeza como si los resultados siempre fueran determinísticos.

Se podría predecir con un procedimiento matemático o físico (PD1-1B-E26)

P2.Piensa que el azar se puede llegar a reducir si se manipulan las variables físicas asociadas al experimento.

"No porque tendría que ser muy preciso al tirarla para que caiga exactamente donde el predijo"(PD1-1B-E9)

P3.Asume la probabilidad de acierto del próximo resultado de un experimento aleatorio como cambiante.

"Tal vez pero no es seguro ya que puede cambiar la probabilidad de que caiga lo que se ha predecido"(PD1-1B-E1)

P4. Explica la obtención de un resultado de un experimento sin atender a evidencia frecuencial asociada al experimento aleatorio.

"Pensaría que se equivoca porque el Hámster escogería lo que para él es natural comer nueces" (PD1-3B-E44)

P5. Consideran válidas las probabilidades en los eventos, cuando la distribución de probabilidad de los resultados obtenidos por experimentación coinciden con la distribución de probabilidad dada en la situación.

"Si porque él está muy seguro de que le gustan los Quesos"(PD1-3B-E3)

P6. Considera posible predecir el resultado del experimento debido a un conocimiento aparente de las condiciones del mismo.

"Si pues pienso que los precios de los artículos son estos porque dependiendo el premio pequeño número pequeño; artículo mediano número mediano y número grande número grande" (CE2-A-E1). *"No porque no me los sé y la única persona que puede decir acertadamente los precios es la persona que creó el juego"* (CE2-A-E7)

P7. Sustenta la impredecibilidad del próximo resultado en un experimento aleatorio a partir de argumentos personales.

"No creo posible predecir con seguridad porque no sé cuánto vale ..."(CE2-A-E3)

Uniestructural

U1. Justifica la imposibilidad de predecir un resultado aleatorio debido a condiciones cambiantes del azar.

"No porque con las cosas del azar no hay nada asegurado, la suerte puede cambiar de un momento a otro" (PD1-1B-E5)

U2. Considera que no es posible predecir el próximo resultado, ya que su comportamiento depende de diferentes factores como el azar, teniendo en cuenta que en las secuencias se puede presentar cualquier orden en los resultados.

"No, porque no sabremos que va a caer y si se pudiera predecir sería muy rara vez que le daría el resultado que se está prediciendo entonces sería algo al azar " (PD1-1B-E42)" *"No porque puede caer cualquiera de las dos; sin importar si lo haya asegurado o no "* (PD1-1B-E27)" *"No porque de todas formas no va a dar igual pues digamos a la primer vez da cara-sello y a la segunda da cara-sello y a la tercera da cara-cara no se puede predecir con seguridad "* (PD1-1B-E29)"

U3. Aunque reconoce el carácter aleatorio del experimento no tiene en cuenta las frecuencias presentadas en la situación.

No porque no es seguro de lo que puede elegir el Hámster nosotros no podemos predecir su decisión" (P1-3B-E4)

U4. Considera imposible predecir el resultado del experimento al reconocer que existen diferentes combinaciones de resultados

"*No porque hay tres números diferentes para tres artículos diferentes "*(CE2-A-E8)"

Multiestructural

M1. Asume que los resultados con menor probabilidad de ocurrencia se pueden presentar en el próximo resultado del experimento.

"No porque también está la probabilidad de que el Hámster prefiera las nueces " (PD1-3B-E2)"

M2. Establece la validez del ensayo del experimento como un caso particular del experimento realizado por el experto.

"No pensaría que él estuviera equivocado porque este Hámster pudiera ser de los 20 restantes que prefieren las nueces "(PD1-3B-E19).

M3. Considera que no se puede predecir el resultado del experimento analizando el número de opciones posibles

"*No, porque cada cifra tiene tres posibles opciones y solo una de las tres es verdadera "*(CE2-A-E18)

Relacional

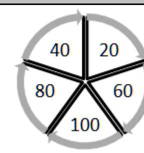
R1. Reconoce la impredecibilidad del próximo resultado y además calcula la probabilidad de ocurrencia de uno de los eventos del experimento.

"No, puede llegar a caer cara o sello porque es al azar; esto sería 1/2 "(PD1-1B-E11).

R2. Asume que los resultados menos frecuentes también puede ocurrir, sustentándola con la probabilidad de dicho evento.

"No, porque el dijo que el 20% de los hámsteres prefieren las nueces entonces no se equivoca "(PD1-3B-E36)

Ideas sobre secuencias aleatorias

Prueba Diagnóstica 1- ítem 1A (PD1-1A)
1. Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después, Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la que considere verdadera **1. A.** ¿Cuál cree que sería la verdadera de las tres siguientes? Justifique su respuesta. **A)** Cara, Cara, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Sello, Sello, Sello **B)** Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello, Cara, Sello **C)** Cara, Sello, Cara, Cara, Cara, Sello, Sello, Cara, Sello, Cara **D)** Cualquiera de las anteriores
Cuestionario evaluativo 3- ítem 1C (CE3-C)
Juego la Rueda. El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez.  **C.** Un televidente lleva el registro de los resultados presentados en veinte juegos ¿Cuál de las siguientes secuencias de resultados se podría presentar en el juego? ¿Por qué? a) 40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40,40 b) 40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20,40,60,80,100,20 c) 40,100,80,20,20,40,80,60,60,60,20,40,20,100,100,40,20,100,60,60 d) Cualquiera de las anteriores

Preestructural

P1. Argumenta la aparición de las secuencias sin patrón a través de justificaciones físicas u opiniones personales.

"Considero que la moneda podría variablemente dependiendo que si juan tira la moneda siempre por la misma cara "(PD1-1A-E44)

P2. Asume en la secuencia la presencia de valores no contemplados en el espacio muestral.

"Cualquiera de las anteriores ya que la moneda puede caer todas las veces en sello o cara o puede caer de refilón "(PD1-1A-E7).

P3. Argumenta la aparición de cualquier secuencia a partir de opiniones personales.

"Cualquiera de las anteriores porque debido a la fuerza en que se lance o empuje la rueda podrá caer alguno de los resultados "(CE3-C-E12)

Uniestructural

U1. Consideran únicamente probables los resultados obtenidos directamente a través de la experimentación.

"para tener este tipo de respuesta la posibilidad es de 1 de 10 porque son 10 tiros y la mía fue 8 caras, 1 sello y 1 cara "(PD1-1A-E33).

U2. Indica que cualquier secuencia es probable, debido al carácter impredecible del experimento.

"Creo que es la D porque no podemos decir con exactitud cuáles son los resultados que podría presentar el juego " (CE3-C-E11)

Multiestructural

M1. Asume que la secuencia sin patrón es la más probable, porque estas son más aleatorias; por lo que las secuencias regulares o con algún patrón son poco probables.

"La C porque se da la lógica de que en la A es poco probable tener tantas veces el mismo resultado y la B es poco posible tener intercalada la respuesta " (PD1-1A-E1)

M2. Asume las secuencias igualmente probables debido a su carácter aleatorio; pero no se puede asegurar el orden de aparición de los resultados.

"Cualquiera de las anteriores porque el resultado puede ser aleatorio " (PD1-1A-E27), *"Cualquiera de las anteriores, porque no se sabe cómo puede caer la moneda al momento de tirarla "*(PD1-1A-E32), *"Cualquiera de las anteriores, porque él pudo lanzar la moneda y pudo dar 5 caras al principio y 5 sellos al final o pueden dar intercaladas pero las respuestas dadas anteriormente son válidas "* (PD1-1A-E16).

M3. Al realizar el experimento es poco probable obtener el mismo resultado en varias repeticiones seguidas

"Yo creo que cualquiera de estas respuestas es posible pues si nosotros hacemos el ejercicio podemos ver que es muy difícil acertar más de dos veces al próximo resultado " (PD1-1A-E21)

M4. Se consideran poco probables las secuencias constantes o con algún patrón definido.

"Porque es muy difícil sacar 20 veces seguidas, se podría decir que es imposible; sería muy difícil sacar números en el mismo orden como lo da la respuesta b pero si sería posible sacar los otros números en desorden y de vez en cuando uno que otro seguido " (CE3-C-E3),

Relacional

R1. Asume que cualquiera de las secuencias son igualmente probables, respalda esta afirmación con el valor de probabilidad de cada uno de los elementos que la conforma.

"Lanzar una moneda no se puede calcular exactamente como cae sólo se dice que sus resultados serán cara o sello: matemáticamente ½ "aleatorio " (PD1-1A-E11)

6.3.1.3. Tratamiento de Intuiciones

Cuestionario Evaluativo 2- ítem D (CE2-D)
D ¿Considera acertadas las probabilidades establecidas por este Concursante? SI ____ NO ____ ¿Por qué?
Cuestionario Evaluativo 2- ítem E (CE2-E)
E. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Es imposible obtener 2 premios	Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.

Preestructural

P1. No contrasta los resultados obtenidos bajo el enfoque intuitivo con el enfoque clásico o frecuencial.

"Si, porque me parece que todas sobresalen y creo que si son las correctas" (CE2-D-E3)

P2. Emite un juicio acerca de la razonabilidad de los valores de una distribución de probabilidad a partir de un juicio personal como la equiprobabilidad de eventos.

"Si, porque él es el que sabe los precios y es el dueño del juego"(CE2-D-E6), *"No; porque pienso que todas las opciones de obtener premios tienen la misma probabilidad"*(CE2-D-E4).

P3. Para establecer la validez de las intuiciones de un individuo, asume supuestos personales (intuiciones primarias). (CE2-E-E7)

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Falso: porque si no piensa nada pierde y no gana ningún premio	*Verdadero: si pensamos cual sería el valor a poner y sea correcto*
Es imposible obtener 2 premios	Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.
Verdadero: Si pensamos, analizamos el valor correcto de los precios y siempre pensaremos en ganar los mejores premios	*Falso: son muy pocos concursantes que alcanzan los precios acertados correctamente*

Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales - Determinación del resultado más probable

Prueba Diagnóstica 1- ítem 3A (PD1-3A)
3A. ¿A qué lugar es más probable que llegue el hámster? ¿Por qué?
Cuestionario evaluativo 1- ítem G1 (CE1-G1)
Un segundo fanático ha realizado muchas veces la simulación del juego por computador y concluye que de cada 100 juegos, en 87 de ellos no se obtiene la clave ganadora. **G1**.Si se realiza el juego una vez y en este se obtiene la clave ganadora, ¿cree que este televidente estaba equivocado? ¿Por qué?

Preestructural

P1. Anteponen opiniones personales al resolver situaciones de índole probabilística.

"Lógicamente a las nueces porque los hámsteres no comen queso" (PD1-3A-E38)

P2. A través de la representación pictórica de la situación da opiniones personales a la misma, sin tener en cuenta las frecuencias dadas en el enunciado.

“Porque el piso va en bajada y es más factible que ruede a que suba que corresponde a un menor esfuerzo” (PD1-3A-E13).

P3. Considera más probable, el evento con menor frecuencia.

“A las nueces es más probable porque el 80% ha ido al queso y porque hay menos queso; o sea el 80% es Nueces y hay más que el 20% del Queso” (PD1-3A-E33)

P4. Considera que el próximo resultado es equivalente al valor más probable, de tal manera que éste no se puede establecer con seguridad.

“Pues pienso que no se podría saber exactamente hacia dónde llegue el hámster; porque puede que el Hámster prefiera el Queso como puede preferir el camino de las Nueces” (PD1-3A-E20)

P5. Considera que no es posible la ocurrencia del evento menos probable.

“Si, porque es muy difícil hallar la combinación ganadora” (CE1-G1-E13)

Uniestructural

U1. No es posible predecir un resultado particular en un experimento aleatorio.

“No porque no es posible coincidir en que momento acertará” (CE1-G1-E3).

Multiestructural

M1. Establece más probable el evento con mayor frecuencia.

“A la A porque la mayor parte de los hámsteres prefieren el Queso y no las Nueces” (PD1-3A-E45)

M2. Es posible obtener el evento menos probable del experimento.

“No, porque también hay probabilidad de ganar, no en todos los intentos se pierde”(CE1-G1-E12)

M3. Identifica el evento más probable a partir de las frecuencias obtenidas por la aplicación del enfoque frecuencial.

“Yo creo que el Hámster se iría más hacia el lado del Queso que a las Nueces porque muy poco porcentaje de hámster prefieren las nueces al queso. Aunque él se puede dirigir hacia las nueces que el queso es algo incierto” (PD1-3A-E16)

Relacional

R1. Considera que el evento menos probable puede presentarse en un ensayo del experimento justifica el resultado con las frecuencias presentadas en la situación.

“No porque éste estaría entre los 13 que harían falta de los 87” (CE1-G1-E16)

Interpretación de enunciados de probabilidades en términos frecuenciales - Comparación de valores de probabilidad obtenidos a partir de corridas de diferente tamaño del mismo experimento.

Prueba Diagnóstica 1- ítem 3C (PD1-3C)
3C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces), ¿pensaría que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?
Cuestionario evaluativo 1- ítem G2 (CE1-G2)
Un segundo fanático ha realizado muchas veces la simulación del juego por computador y concluye que de cada 100 juegos, en 87 de ellos no se obtiene la clave ganadora. **G2.**Si se realiza el juego 10 veces y en 7 de estos no se obtiene la clave ganadora ¿cree que este personaje estaba equivocado? ¿Por qué? ____________________________

Preestructural

P1. Respalda su respuesta con supuestos que no se basan en la información de la situación.

“No porque tal vez los otros hámsteres que les gusta el queso están en los 90 restantes o también, algunas razas puede que les guste más uno que el otro ”(PD1-3C-E5), *“No porque nosotros mismos no podemos predecir lo que el hámster desea y quiere ”*(PD1-3C-E4),

P2. Valida enunciados probabilísticos basándose en argumentos personales.

“Si, porque sería muy bueno para los precios ”(CE1-G2-E2)

Uniestructural

U1. Asume que las frecuencias relativas obtenidas de dos corridas de diferente tamaño, extraídas del mismo experimento, deben ser iguales.

“Está un poco equivocado porque sería el 30% y él nos dijo que el 20% prefería las nueces” (PD1-3C-E11).

Multiestructural

M1. Asume que para diferentes corridas, de un mismo experimento, se debe mantener el orden de los eventos de acuerdo a la posibilidad de ocurrencia.

"No porque aún siguen siendo más los que van a la A y pocos a la B" (PD1-3C-E9).

Relacional

R1. Al comparar las frecuencias de dos repeticiones del experimento, de diferente tamaño, evalúa la validez del enunciado comparando el orden de los eventos de acuerdo al grado de ocurrencia.

"Pues no porque nuestro amigo nos dio un porcentaje que de cada 100; 80 prefieren Queso y en este ejercicio nos dicen que de cada 10 3 prefieren nueces; entonces mi amigo no estaba equivocado porque los hámsteres prefieren más el queso que las nueces"(PD1-3C-E41)

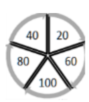
R2. En diferentes corridas, compara las proporciones de las frecuencias de los eventos.

"No pensaría que como son solo 3 los que pertenecen a los 20 que prefieren las nueces y pues a los 7 son de los 80 que prefieren el queso" (PD1-3C-E24).

Espacio Muestral

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Simple

Cuestionario evaluativo 3- ítem A (CE3-A)
El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez.



A. ¿Cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener en el juego?

Prestructural

P1. Conjetura acerca del grado de probabilidad de ocurrencia de los resultados del experimento

"*Creo que todas son posibles porque puede caer en cualquier número*" (CE3-A-E10)

P2. Se dificulta enumerar los elementos del espacio muestral.

"Puede tener todos los posibles resultados ya que las probabilidades son iguales porque tiene todos sus lados iguales" (CE3-A-E7).

P3. Asume los resultados de un experimento simple como un experimento compuesto (CE3-A-E3)

20	*20+100=120*	*80+100=180*	*20+80=100*	*60+80=140*
40	*40+100=140*	*20+40 = 60*	*60+40=100*	
60	*60+100=160*	*20+60= 80*	*80+40=120*	
80				
100				

Uniestructural

U1. Realiza el listado de todos los puntos muestrales del experimento sin seguir un patrón definido.

40 – 20 – 80 – 60 – 100 (CE3-A-E4)

Multiestructural

M1. Realiza el listado de los todos los puntos muestrales del experimento siguiendo un patrón definido

Son 5 20 – 40 – 60 – 80 – 100 (CE3-A-E8)

Relacional

R1. Lista todos los puntos muestrales y establece su respectivo valor de probabilidad

Que salga 40, 20, 60, 80 y 100
20% 20% 20% 20% 20% (CE3-A-E6)

R2. Indica el número de veces que se repiten cada uno de los resultados del experimento

20 *40(Resultado)/1(giro de la rueda)*

40 *20/1 100/180/1 100/1*
60
80
100 (CE3-A-E1)

6.3.2.2. Cardinal de espacio muestral – Experimento Simple

Cuestionario evaluativo 3- ítem B (CE3-B)
B. Cuántos posibles resultados se pueden obtener al realizar el giro de la rueda una vez?

Preestructural

P1. Considera el cardinal del espacio muestral como el número de experimentos o al número de resultados formados por un punto muestral.

"*1 resultado* (CE3-B-E10)"

P2. Considera que el cardinal del espacio muestral es el máximo valor del experimento.

"100 (CE3-B-E16)"

P3. Asume el cardinal del espacio muestral como un listado de las combinaciones de algunos resultados del experimento simple realizado varias veces.

20:20 *40:20* *60:20* *80:20*
20:40 *40:40* *60:40* *80:40*
20:60 *40:60* *60:60* *80:60*
20:80 *40:80* *60:80* *80:80*
20:100 *40:100* *60:100* *80:100*(CE3-B-E6)

Uniestructural

U1. Considera el cardinal del espacio muestral como el listado de los puntos muestrales del experimento.

20-40-60-80-100(CE3-B-E3)

Multiestructural

M1. Menciona el número de resultados presentes en el experimento sin justificar el resultado. Además, se resalta que el experimento simple se compone de una sola repetición..

5 (CE3-B-E13), ***al hacer un solo giro*** *se pueden obtener 5 resultados posibles* (CE3-B-E11)

Relacional

R1. Obtiene el cardinal del espacio muestral respaldando su respuesta con el listado de los posibles resultados del experimento.

20, 40, 60, 80,100 son 5 posibles resultados (CE3-B-E14)

R2. Obtiene el cardinal del espacio muestral y muestra este valor asignando una posición a cada elemento del espacio muestral.

En la rueda es posible obtener 5 resultados 1=20 2=40 3=60 4=80 5=100 (CE3-B-E1)

Enumeración de puntos muestrales – Experimento Compuesto

Prueba Diagnóstica 2- ítem 2 (PD2-2)
2. En una urna se encuentran bolitas numeradas del 1 al 4. Si se sacan 2 bolitas seguidas, sin devolverlas a la urna. Indique todas las posibles opciones.
Prueba Diagnóstica 3- ítem 1 (PD3-1)
1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente: a) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro b) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro c) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro d) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique
Cuestionario evaluativo 2- ítem B (CE2-B)
Se tienen tres productos a los cuales le falta un dígito del precio. Los dígitos 5, 9 y 3 deben ser asignados, sin repetir, a cada una de las casillas vacías de los precios.

		
Patineta Atom 21"	**Bicicleta Junior**	**Bicicleta Elíptica: Twister y Mancuernas**
1 5 1 ▇ 0 0	2 6 9 4 ▇ 0	4 4 9 ▇ 0 0

B. Haga una lista de todos los precios posibles que se pueden obtener en estos tres artículos.

Preestructural

P1. Lista varios resultados posibles asumiendo una suposición "física" que podría explicar el resultado del experimento.

*"Que en la urna saque la 4 y la 1 o que saquen la 3 y la 2 que quede la de menor **"peso"*** (PD2-2-E44)

P2. Utiliza una representación pictórica para comprender la situación, pero no la responde.

Tenemos muchas probabilidades de sacar cualquiera de las bolitas pero no sabemos que vamos a sacar (PD2-2-E34)

P3. Lista puntos muestrales no presentes en el experimento.

2+41+51+3 (PD2-2-E30)

P4. Intenta describir el desarrollo del experimento pero no lista las combinaciones.

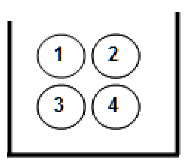
Pues si hay 5 bolas dentro de una bolsa numeradas del 1 al 5 y si sacamos la primera bolita que es el número 1 y si volvemos a sacar la segunda bolita que es el número 5 dentro de la bolsita quedan los números 3,4,2 y volvemos a guardar el número 1 y el número 5 y si volvemos a hacer la misma jugada (PD2-2-E4)

Uniestructural

U1. Realiza un listado incompleto de los puntos muestrales del experimento y asume el valor de probabilidad con la enumeración de los casos posibles del experimento (PD2-2-E16)

Pimpón 1) *1/4 = 0.25* ***Pimpón 2)*** *1/4 = 0.25* ***Pimpón 3)*** *1/4 = 0.25* ***Pimpón 4)*** *1/4 = 0.25*
1,2 1,3 1,4 2,3 3,4 2,4
Las mismas opciones tienen la misma probabilidad ya que ningún número está más veces que el otro
(PD2-2-E16)

U2. Enumera de manera incompleta los casos posibles del espacio muestral.



Se puede sacar
1.2 3.1
3.4 4.2
3.2
4.1 (PD2-2-E7)

U3. Al listar elementos del espacio muestral repite puntos muestrales, sin mantener un orden.

*1,2 2,3 **3,4** **4,3** 4,1 1,3 2,4 2,1 3,2 **4,3** 3,1 4,2 **3,4** 1,4* (PD2-2-E15)

U4. Lista resultados del experimento combinando puntos muestrales del mismo experimento simple

3 1 *Ya que para obtener cualquier probabilidad tenemos que mirar a ver cuál podremos obtener*
3 2 *porque se puede girar para cualquier parte*
2 3
2 1 (CE1-B-E10)

Multiestructural

M1. No sigue un patrón definido al listar todos los elementos del espacio muestral

2-33-11-22-11-33-2 *2-44-11-44-24-33-4* (PD2-2-E2)

*151**5**00*	*2694**9**0*	*449**3**00*
*151**9**00*	*2694**3**0*	*449**9**00*
*151**3**00*	*2694**5**0*	*449**5**00*

(CE2-B-E4)

M2. Determina el espacio muestral de un experimento sin reemplazamiento como si éste fuera un experimento con reemplazamiento asumiendo un patrón. (PD2-2-E41) (PD2-2-E25)

Podría ser ***4 y 4*** *3 y 4* *2 y 4* *1 y 4* *4 y 3* ***3 y 3*** *2 y 3* *1 y 3* *4 y 2* *3 y 2* ***2 y 2*** *1 y 2* *4 y 1* *3 y 1* *2 y 1* ***1 y 1*** (PD2-2-E41)

M3. Lista la mayoría de combinaciones del espacio muestral siguiendo un patrón.

Cara-Cara ; Sello-Sello ; o Cara - Sello (PD3-1-E16)

M4. Hace un listado de todas las opciones posibles en cada uno de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto siguiendo un patrón definido (CE2-B-E13)

*151**5**00*	*2694**5**0*	*449**5**00*
*151**9**00*	*2694**9**0*	*449**9**00*
*151**3**00*	*2694**3**0*	*449**3**00*

Relacional

R1. Determina todas las combinaciones posibles del espacio muestral siguiendo un patrón definido

1,2 - 1,3 - 1,4 2,1 - 2,3 - 2,4 3,1 - 3,2 - 3,4 4,1 - 4,2 - 4,3(PD2-2-E21)

Cardinal de espacio muestral – Experimento Compuesto

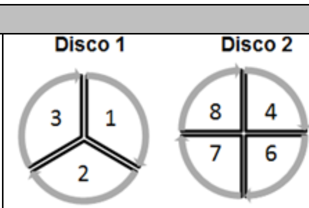
Prueba Diagnóstica 3- ítem 1 (PD3-1)

1.Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente:

a) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro
b) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro
c) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro
d) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

Cuestionario evaluativo 1- ítem A (CE1-A)

En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos. **A** ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación ganadora? Justifique su respuesta



Cuestionario evaluativo 4- ítem 2A (CE4-2A)

Opciones Precio Carro

Cifra 1	Cifra 2
3	7
4	8
5	9

En esta versión, el jugador debe adivinar únicamente dos cifras para obtener el precio del premio.

2A. ¿Cuántos posibles resultados se pueden obtener en el juego *espejito-espejito*? Explique**.**

Preestructural

P1. Debido al carácter impredecible del experimento, no es posible establecer la cantidad de resultados del mismo.

Yo creo que es la (d) porque al lanzar las monedas no tenemos nada seguro como si puede salir cualquiera de las dos. (PD3-1-E5)

P2. Asume el cardinal del experimento compuesto como el número de los experimentos simples.

"*Si yo lanzo **dos** monedas puede caer cualquiera.* (PD3-1-E19)", "*porque los tres tienen la misma probabilidad de salir en carro ya que cada uno tiene **dos oportunidades*** (PD3-1-E40)"

P3. Considera el cardinal del experimento como un listado de posibles opciones del experimento, combinado los resultados de los experimentos simples. (CE4-2A-E4)

3-3 4-3 5-3 7-3 8-3 9-3 *3-4 4-4 5-4 7-4 8-4 9-4*
3-5 4-5 5-5 7-5 8-5 9-5 *3-7 4-7 5-7 7-7 8-7 9-7*

3-8	*4-8*	*5-8*	*7-8*	*8-8*	*9-8*	*3-9*	*4-9*	*5-9*	*7-9*	*8-9*	*9-9*

P4. Considera el cardinal de un experimento compuesto como la suma de los cardinales de los experimentos simples que lo conforman

Opciones Precio Carro

Cifra 1	Cifra 2
534	*978*
345	*789*
453	*897*

6 posibles resultados porque en lo que yo adiviné pues solo son 6(CE4-2A-E11)

Uniestructural

U1. Asume el cardinal del experimento compuesto como el cardinal de uno de los experimentos simples que conforman dicho experimento.

Los tres hermanos tienen la misma probabilidad ya que en cualquier lanzamiento caerá cualquiera de las ***dos*** *(cara o sello).*(PD3-1-E2)

U2. Determina los elementos del espacio muestral pero no establece su cardinal (CE1-A-E9)

1-4 2-4 3-4 1-6 2-6 3-6 1-7 2-7 3-7 1-8 2-8 3-8

Multiestructural

M1. Determina los elementos del espacio muestral estableciendo su cardinal

Se puede tener (CE1-A-E16) *Se pueden obtener 12 posibilidades*

3-8 1-8 2-8 3-4 1-4 2-4 3-7 1-7 2-7 3-6 1-6 2-6

3-7 4-7 5-7 3-8 4-8 5-8 3-9 4-9 5-9

9 opciones posibles resultados(CE4-2A-E1)

M2. Determina el cardinal del experimento a partir de la enumeración de las diferentes combinaciones del mismo; además utiliza este valor para el cálculo de probabilidades de los eventos (PD3-1-E33)

Santiago tiene más probabilidad ya que si se lanzan las monedas pueden caer caray sello dos veces, en cambio cara-cara una vez y sello-sello 1 vez, la probabilidad es de Santiago es de 2 / 4 = 0.5=50%

Eventos

Eventos Simples– Experimento Simple

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1B (PD2-1B)

La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

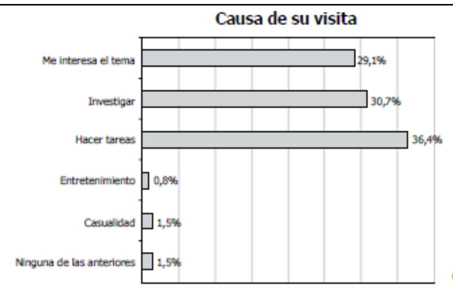
Calificación	**Número de estudiantes**
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	**Clasificación cualitativa**
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

1B) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación de 4? Justifique.

Prueba Diagnóstica 3- ítem 2A (PD3-2A)

<table>
<tr><td>Radio Nacional de Colombia creó una página Web en conmemoración del bicentenario de la independencia de Colombia. La gráfica representa las causas por las cuales se visitó la página por los primeros 261 visitantes. Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique.
2A) Menos de 130 visitantes acudieron a la página para hacer tareas.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuestionario evaluativo 3- ítem D1 (CE3-D1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:
D1. El número 100</td></tr>
</table>

Preestructural

P1. Se dificulta determinar el punto muestral y el cardinal del evento, de tal manera que recurre a una opinión sin tener en cuenta los datos de la situación.

"*Para mí fue que el examen que le practicaron a los estudiantes sacaron más puntaje que los demás alumnos* (PD2-1B-E4)"

P2. Utiliza información irrelevante para interpretar el enunciado del evento.

" *No porque no son 130 visitantes y no eran tareas del bicentenario* (PD3-2A-E30)", "*No porque el porcentaje está mayor en la tabla* (PD3-2A-E31)".

P3. Asume el número de eventos simples como el cardinal del evento.

*De **5** entre **40** estudiantes es el 8%* (PD2-1B-E25)

Uniestructural

U1. Asume el valor numérico del punto muestral como el cardinal del evento

Porque aprobó 4 (PD2-1B-E22)

Probabilidad de obtener el número 100
*100*100/5 = 20%* (CE3-D1-E7)

U2. Asume el valor numérico del punto muestral como su probabilidad de ocurrencia

La probabilidad es de un 4% (PD2-1B-E24)

U3. Asume el valor numérico del evento como el cardinal del espacio muestral

40/4 = 10 Sería la probabilidad porque entre 40 estudiantes sacan 4 (PD2-1B-E41)

U4. Identifica el cardinal del evento y asume que el valor numérico del evento es igual al número total de casos posibles.

*5***10**/**4** =12.5%*
La probabilidad es del 12.5% (PD2-1B-E2)

U5. Identifica el punto muestral del evento y el cardinal del experimento, pero no el cardinal del evento.

40/4=10
Porque hay 40 estudiantes y si decimos que 40/4 son 10% la probabilidad de sacar un 4 (PD2-1B-E9)

Multiestructural

M1. Realiza el cálculo del número de veces que se presenta el evento expresándolo en forma de porcentaje.

261---100%
X --- 36.4
*X= 261*36.4/100 = **95%***
Falso porque más de 130 visitantes acuden a la página para hacer tareas (PD3-2A-E6)

M2. No emplea los operadores de orden para comparar la frecuencia de ocurrencia de un evento

Falso, porque el ingreso habrá podido ser 95 personas, porque si a las 261 personas la multiplicamos por 36.5% y lo dividimos en 100 la encuesta de personas al entrar a la página para realizar tareas sería 95 personas (PD3-2A-E25)

Relacional

R1. Establece de manera correcta el cardinal del evento simple para interpretar un enunciado probabilístico

10/40 Número de estudiantes que sacaron 4 y el resto de los estudiantes (PD2-1B-E19)

100 261

36.4   X
X=95.004
Verdadera, ya que 95 visitantes acuden a la página para hacer tareas
(PD3-2A-E2) (PD3-2A-E8) (PD3-2A-E14) (PD3-2A-E32)

R2. Identifica tanto el cardinal del evento simple como del espacio muestral; relacionando estos valores con el cálculo de probabilidad por medio de la Ley de Laplace

1/5 = 20% (CE3-D1-E1)

Eventos Compuestos– Experimento Simple

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1C (PD2-1C)

1. La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

1C) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido no esté como "Aprobado"?

Prueba Diagnóstica 2- ítem 3 (PD2-3)

3. En una caja Anita tiene 26 pelotas. De las cuales 10 son verdes, 5 son azules y 11 son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde?

Cuestionario evaluativo 3- ítem D (CE3-D)

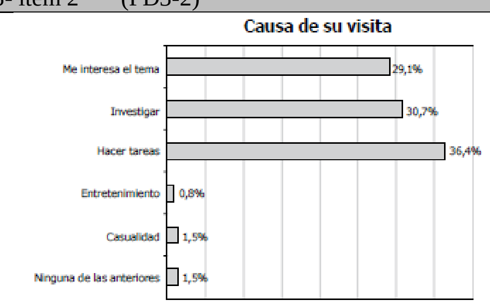
D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D2. Un número terminado en 0	**D3.** Un número menor a 80
D4. Un número mayor a 40	**D5.** Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80
D6. Un número que no comience en 4	

Prueba Diagnóstica 3- ítem 2 (PD3-2)

2. Radio Nacional de Colombia creó una página Web en conmemoración del bicentenario de la independencia de Colombia. La gráfica representa las causas por las cuales se visitó la página por los primeros 261 visitantes.

Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique.
2B) Más de 200 visitantes acudieron a la página investigar o para hacer tareas.
2C) Aproximadamente 165 visitantes no consultan la página porque requieren hacer tareas.



Cuestionario evaluativo 3- ítem E (CE3-E)

E. Marque con "X" el grado de probabilidad a cada uno de los siguientes eventos. Justifique

Evento	Grado de Probabilidad			Justificación
	Imposible	Probable	Seguro	
Obtener un número par				
Obtener un número mayor a 100				
Obtener un número menor a 200				
Obtener un número terminado en cero y mayor a 40.				

Preestructural

P1. No identifica ningún punto muestral que hace parte del evento compuesto ni sus respectivos cardinales, empleando un supuesto acerca de la situación, ni emplea la información suministrada por el enunciado de la situación.

"Que el alumno tuvo que tener las notas más altas que los alumnos por eso es la posibilidad que aprueben solo uno (PD2-1C-E3)", "*4*4/5 =3.2 La probabilidad de que el estudiante no esté aprobado es del 3.2% a un 12.5% la probabilidad es un 9.3%* (PD2-1C-E2)"

P2. No identifica los eventos simples que componen el evento compuesto.

14 sería la cantidad de estudiantes aprobados y 40 el total de estudiantes
40 100%
14 X
X= 35%
La probabilidad es del 35% (PD2-1C-E39)

P3. Asume el valor numérico del evento como su cardinal

40/1=40 40/2=20 40/3=13.3 40/4=10 40/5=8
Al dividir la cantidad de estudiantes en la nota nos damos cuenta que el porcentaje es muy alto ya que 102 da 40 y 20 los otros de menos (PD2-1C-E41)

Uniestructural

U1. Considera los eventos compuestos disyuntos como eventos simples asumiendo equiprobabilidad entre éstos.

33.33% cada uno la probabilidad (PD2-1C-E35)

U2. Establece el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto

Porque si solo pasaron 4 (Número de estudiantes con calificación 5) (PD2-1C-E8)

U3. Asume el evento compuesto como uno de los eventos simples que lo componen (PD3-2B-E19) (PD3-2C-E15)

No es verdad
261 100%
X 30.7%
X= 80 (PD3-2B-E19)

U4. Identifica algunos puntos muestrales que hacen parte del evento pero no establece su cardinal.

"*Porque de los 10 estudiantes de 40; 10 están entre la calificación de 1 y 2* (PD2-1C-E28)".

U5. Identifica un punto muestral que hacen parte del evento pero no establece su cardinal.

"Sería en las rojas porque hay más pelotas rojas que las demás (PD2-3-E23)"

U6. Identifica el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto; a partir de este calcula su probabilidad asumiendo este valor como la probabilidad del evento compuesto.

10/20=5 Hay probabilidad de sacar una roja o verde (PD2-3-E7)

U7. Asume cardinal del evento compuesto como el mayor de los cardinales uno de los eventos simples que lo componen.

11(rojas) / 26 = 0.42 x 100%= 42% (PD2-3-E19)

U8. Identifica los cardinales de los todos los puntos muestrales del experimento sin identificar los puntos muestrales que forman el evento compuesto

26/10 = 2.6 probabilidad de sacar una verde
26/5 = 5.2% probabilidad de sacar azules
26/11 = 2.36% probabilidad de sacar rojas (PD2-3-E41)

Multiestructural

M1. No reconoce la negación del evento como su complemento

Falso al hacer la regla de tres
Personas %
261 100%
X 36.4%
Da un total de 95 personas (PD3-2C-E9)

14 sería la cantidad de estudiantes aprobados y 40 el total
Estudiantes %
40 100
14 X
X= 35% La probabilidad es del 35% (PD2-1C-E39)

M2. Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto planteado en la situación pero no los relaciona para el cálculo de su probabilidad

"*Puedo hacer una regla de tres porque me están preguntando cómo encontrar una pelota roja o verde; no me preguntan azul entonces lo puedo hacer…"*
10 x 11 / 26 =4.2 (PD2-3-E6)

Verdes:10 Azules:5 Rojas:11
10+5+11= 26 pelotas de colores
De que las rojas hay 11 y las verdes hay 10
Las rojas serían más que las verdes serían menos saldría una roja (PD2-3-E13)

M3. Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto planteado en la situación pero no relaciona el operador "o" con la suma de estos cardinales

26 pelotas 26 10
10 verdes 100 X 2.6 de probabilidad de verdes
5 azules
11 rojas 26 11 2.86 probabilidad de rojas
100 X
Hay más probabilidad de encontrar una pelota roja (PD2-3-E32)

M4. Establece los cardinales de los puntos muestrales de todos eventos compuestos planteados en la situación y con estos calcula su probabilidad sin identificar el evento compuesto planteado en la pregunta

Reprobado 2+6=8 8/40=0.2 0.8/0.2=4 Estudiante Porcentaje
Pendiente 3=18 18/40=0.45 40 100
Aprobado 10+4=14 14/40=0.35 14 X
*14*100/40=35%*
(PD2-1C-E30)

M5. Identifica un evento compuesto como la unión de varios eventos compuestos equiprobables; asumiendo estos eventos como los puntos muestrales del experimento.

"La probabilidad de que no haya aprobado es del 66.66% porque al dividir 100% entre las posibles clasificaciones (Reprobado, Pendiente, Aprobado) cada uno es del 33.33% y dos no pueden aprobar, entonces los sumé y me da 66.66% (PD2-1C-E48)"

M6. Identifica por separado las probabilidades de los puntos muestrales que componen el evento

V 10 /26% = 38.16%
A 5/26% = 19.23%
R 11/26% = 42.30%
38.16% / 42.30%
La probabilidad de encontrar una pelota roja o verde es un 9.07 de probabilidad (PD2-3-E38)

Relacional

R1. Identifica todos los puntos muestrales que hacen parte del evento estableciendo sus cardinales aplicando la Ley de Laplace para calcular su probabilidad de ocurrencia.

"*18+6+2=26/40=0.65*100=65% Es la probabilidad de que no esté como aprobado* (PD2-1C-E12)"

R2. Identifica el evento compuesto por la unión de los puntos muestrales de los eventos del experimento

1,2,3=2+6+18=26 40 100%
4,5=10+4=14 26 X
X=65%
La probabilidad de que NO esté aprobado es mayor con un 65% (PD2-1C-E18)

R3. Establece el cardinal de los puntos muestrales que hacen parte del evento compuesto los suma para obtener el cardinal del evento compuesto y aplica la Ley de Laplace para obtener su probabilidad

10 Verdes <u>11 Rojas</u> 21 Pelotas verdes o rojas 21 x 100 / 26 = 80.76% (PD2-3-E33)

R4. Asume la frecuencia relativa de este evento como la suma de las frecuencias relativas de los eventos simples que lo componen (PD3-2B-E2).

30.7 100 261
<u>36.4</u> 67.1 X
67.1 X=175.131
Falso ya que son 175.131 los que acudieron a alguna de las dos páginas

R5. Identifica la negación del evento como la unión de los puntos muestrales que no pertenecen al evento, calculando el cardinal de la negación del evento como la diferencia entre el cardinal del espacio muestral y el cardinal del evento

36.4 X
100 261
X=95.0004 = 95
261 -95=166 Si, aproximadamente, 166 personas no entran a hacer tareas (PD3-2C-E32)

R6. Identifica los puntos muestrales que conforman los diferentes eventos analizados así como sus respectivas probabilidades sumándolas para establecer la probabilidad en cada uno de los eventos compuestos (CE3-D-E6).

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

Un número terminado en 0	*Es del 100% porque todos los números de la rueda terminan en cero: 20,40,60,80,100*
Un número menor a 80	*20=20%* *40=20%* *60=20%* *60% es el 60% probable*
Un número mayor a 40	*60=20%* *80=20%* *100=20%* *60% es el 60% probable*
Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	*40=20% 80=20%* *60=20% 60=20%* *80=20% 40=20%* *100=20% 20=20%* *80% 80%* *Mayor o igual a 40 es 80% probable* *Menor o igual a 80 es 80% probable*
Un número que no comience en 4	

Eventos Simples – Experimento Compuesto

Prueba Diagnóstica 3- ítem 1 (PD3-1)

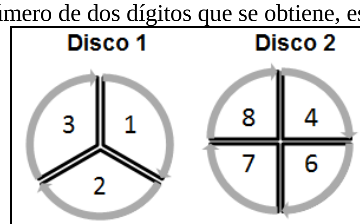
1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente:
a) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro b) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro
c) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro d) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

Prueba Diagnóstica 3- ítem 3 (PD3-3)

3. Si en una bolsa hay 4 pelotitas verdes, 3 pelotitas rojas y 4 pelotitas azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelotita azul y luego, sin reponerla, sacar otra azul?

Cuestionario evaluativo 1- ítem A (CE1-A)

En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.

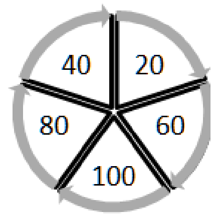


A ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación ganadora? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 4- ítem 1A (CE4-1A)

1. Juego la Rueda.

El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez. Cuando el jugador no obtiene el número 100 al girar la rueda por primera vez, tiene la oportunidad de girar la rueda por segunda vez. Si la suma de los puntos obtenidos en ambas oportunidades es un número mayor que 100, queda inmediatamente eliminado del juego. Recuerde: Si el jugador obtiene en la primera oportunidad el número 100, no tiene que girar de nuevo la rueda.



1A. A continuación responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor más pequeño que se puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	
¿Cuál es el valor más grande que puede obtener con la suma de los puntos? ¿Por qué?	

Cuestionario evaluativo 4- ítem 1B (CE4-1B)

1B.

¿Qué valor o valores de la suma son más probables? ¿Por qué?	
¿Qué valor o valores de la suma son menos probables? ¿Por qué?	
¿Qué es más probable: que la suma sea 80 o que la suma sea 100? ¿Por qué?	

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2B1 (CE4-2B1)

2B Calcule la probabilidad de**:**

2B1 Ganar el premio	

Preestructural

P1. No identifica los puntos muestrales del experimento. asume que cualquier resultado se puede presentar y que tanto los eventos simples como los compuestos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

"La respuesta es la d porque las dos monedas pueden caer por cualquiera de sus dos caras (PD3-1-E9)","*Los tres hermanos tienen la misma posibilidad de salir en el carro porque el sorteo con las mismas monedas es totalmente al azar…* (PD3-1-E8)"

P2. Asume que los resultados de un experimento compuesto se pueden dar de diferentes formas.

d) porque las monedas pueden caer de diferentes formas y no siempre de una forma (PD3-1-E20)

P3. No identifica el punto muestral de un experimento compuesto asumiendo el experimento como simple

4 Verdes *4 -- 1*
3 Rojas *x -----11* *x=11*4/1*
4 Azules
11 pelotas (PD3-3-E4)

P4. Asume como punto muestral el resultado del uno de los experimento simples que componen el experimento compuesto; sin considerar el enunciado de la pregunta

1 A 1 *80 porque es el más cercano a 100*
1 A 2 *100 porque si se pasa de 100 queda eliminado* (CE4-1A-E12)

P5. No identifica o los identifica de manera incorrecta los puntos muestrales que cumplen con la condición planteada.

20+40; porque al sumar daría 60, 80+20; porque al sumar daría 100 (CE4-1A-E7)

P6. Considera el experimento compuesto como un experimento simple asumiendo el cardinal del evento simple como el número de experimentos simples que componen el experimento compuesto.

100 *11*
X *2* *X=18.8* (PD3-3-E10)

P7. Asume como puntos muestrales del experimento compuesto los puntos muestrales de uno los experimentos simples que componen el experimento compuesto.

"*Los tres hermanos tienen la misma probabilidad ya que en cualquier lanzamiento caerá cualquiera de las dos (cara o sello)* (PD3-1-E2)"

Uniestructural

U1. Identifica un punto muestral del experimento como la combinación de puntos muestrales de varios experimentos simples, asume los puntos muestrales en los cuales la combinación se repite el resultado como un punto muestral de un experimento simple.

"*Los tres hermanos tienen la probabilidad de salir porque puede salir alguna cara, sello,* ***cara y sello ,*** *eso está en la suerte que ellos tengan* (PD3-1-E4)"

U2. Reconoce el tipo de reposición de las extracciones y el número de experimentos simples que conforman el experimento compuesto; sin identificar el número de casos favorables. (PD3-3-E6)

4+3+4 = 11 pelotas 10 100 = 0.11 la probabilidad de sacar una pelota azul es de 0.11%
X ***1***
4+3+4-1 = 10 pelotas 10 100 = 0.1 la probabilidad de sacar otra pelota azul es de 0.1%
X ***1*** (PD3-3-E8)

U3. Obtiene; sin justificar el punto muestral del experimento que cumple ciertas condiciones; tiene en cuenta todas las restricciones del experimento.

"*El 40 sumando 20 y 20* (CE4-1A-E4)".

U4. Contempla un punto muestral del experimento que no pertenece al espacio muestral del mismo

180 porque 100+80=180 (CE4-2B-E14)

Multiestructural

M1. Identifica los puntos muestrales del experimento compuesto como la combinación de los puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto.

"*Porque uno nunca va a saber que va a caer las monedas y porque los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro* ***o sea que puede salir 2 caras o 2 sellos o cara y sello*** (PD3-1-E17)"

M2. Realiza una lista incompleta de puntos muestrales del experimento y a partir de esta identifica el punto muestral que pertenece al evento simple

4 verdes 3 rojas 4 azules
Pues hay muy poca probabilidad porque uno puede sacar
2 verdes
1 verde y 1 roja
2 rojas
1 azul y 1 roja
2 azules
1 azul y 1 verde
Debe ser muy de buenas para sacar 2 azules (PD3-3-E17)

M3. Identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples correspondientes al punto muestral del experimento compuesto pero no reconoce el tipo de extracción (con/sin reposición).

"***4*100/11 = 36.36***
3*100/11= 27.27 *La probabilidad de sacar primero una pelotita azul está entre el 36.36% y en la segunda la probabilidad es del 27.27 ya que quedaron solo 3 azules al sacar 1* (PD3-3-E2)"

Relacional

R1. Identifica los cardinales de los eventos de los experimentos simples correspondientes al punto muestral del experimento compuesto reconoce el tipo de extracción (con/sin reposición). Además calcula su probabilidad de ocurrencia.

"*Primero tiene la probabilidad de sacar una azul de 36.36% y luego del 30% Al multiplicar 3 que es la cantidad de bolas azules por 100% y dividido por la cantidad de bolas que quedan en la bolsa* ***4*100/11=36.36% 3*100/10=30%"***(PD3-3-E7).

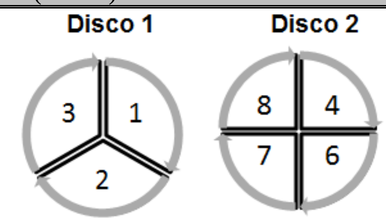
Eventos Compuestos– Experimento Compuesto

Prueba Diagnóstica 3- ítem 1 (PD3-1)
1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente: b) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro c) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro

d) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro
e) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

Cuestionario evaluativo 1- ítem B (CE1-B)

Juego 'Caja fuerte'
En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos



B ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que comienza en 3 o en 2? Justifique su respuesta.
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de dos cifras que comience en cifra impar y termine en cifra par? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 1- ítem C (CE1-C)

C. Si el concursante sabe de antemano que la clave correcta termina en 8 ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

Cuestionario evaluativo 4- ítem 1C (CE4-1C)

1C.

¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2B (CE4-2B)

2. Juego espejito, espejito
2B Calcule la probabilidad de**:** Ganar el premio ; Coincidir en la primera cifra del premio; Coincidir en la segunda cifra del premio

Preestructural

P1. No identifica los puntos muestrales que corresponden a los eventos compuestos del experimento

Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro porque al momento de lanzar la moneda uno no tiene certeza de lo que puede salir; no hay probabilidad para decir que puede. (PD3-1-E1)

P2. Asume que cualquier evento simple o compuesto del experimento tiene la misma probabilidad de ocurrencia

"*Es una competencia totalmente al azar, el porcentaje sería igual para todos* (PD3-1-E32)"

P3. No identifica eventos compuestos presentes en una situación; únicamente detecta los puntos muestrales presentes en uno de los experimentos simples del experimento compuesto.

"*Los tres hermanos tienen la misma probabilidad ya que en cualquier lanzamiento caerá cualquiera de las dos (cara o sello)*(PD3-1-E2)".

P4. No utiliza los puntos muestrales de los experimentos simples para identificar los eventos presentes en la situación.

"*Porque al lanzar las monedas puede caer cualquiera de las opciones porque no podemos saber exactamente cómo van a caer las monedas* (PD3-1-E11)"

P5. No identifica ningún evento del experimento; asumiendo que cualquier resultado se puede presentar.

"Si yo lanzo dos monedas puede caer cualquiera (PD3-1-E19)", "*Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de sacar el carro porque cuando el padre lance las monedas no se sabe cuál será el resultado y así pasará con todos* (PD3-1-E21)"

P6. Asume el valor numérico de uno de los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto como el cardinal del espacio muestral del experimento.

*"La probabilidad de obtener el número 3 ó 2 es del 16.12% porque 5x100/**31** = 16.12* (CE1-B1-E9)"

Uniestructural

U1. Asume como evento simple un evento compuesto.

"Pues porque uno no sabe si va a caer cara-cara; sello-sello o cara-sello la probabilidad es la misma para los dos (PD3-1-E16)"

U2. Intenta hallar combinaciones de los resultados de uno de los experimentos simples que hacen parte del experimento compuesto (CE1-B1-E10)

3-1 Ya que para obtener cualquier probabilidad tenemos que mirar a ver cual
3-2 podremos obtener porque se puede girar para cualquier parte
2-3
2-1 (CE1-B1-E10)

U3. Construye puntos muestrales del experimento compuesto asumiendo que los puntos muestrales de los diferentes experimentos simples que lo conforman se pueden intercambiar.

3-7 4-7 5-7 7-3 8-3 9-3
3-8 4-8 5-8 7-4 8-4 9-4
3-9 4-9 5-9 7-5 8-5 9-5
Yo combiné todos los números 18 opciones (CE4-2A-E13)

Multiestructural

M1. Lista algunos puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto

3 2
1 2
7 4 Estas son las posibilidades de impar e impar
7 6 (CE1-B2-E6)

6 8 4 8 7 8
Cualquiera de esas 3 probabilidades obtendremos el premio (CE1-C-E10)

M2. Asume el evento compuesto como un punto muestral del experimento, evaluando su grado de probabilidad a través del enfoque frecuencial (PD3-1-E28) (Sesgo de Representatividad).

"Porque hice el procedimiento de lanzar las monedas y el resultado nos da cara y sello (PD3-1-E28)"

M3. Realiza un listado de los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto; pero no establece su cardinal para el cálculo de probabilidades

3-8 Pues la probabilidad sería de 6/7 = 0.85 pues hice la lista de los números impares al
3-4 comienzo y los números pares al final y el total me da
3-6 7 100%
1-8 6 6
1-4 85%
1-6
6 (CE1-B2-E4)

Relacional

R1. Realiza una lista de los puntos muestrales de los eventos del experimento estableciendo su cardinal.

Santiago tiene más probabilidad ya que si se lanza las monedas puede caer cara y sello dos veces; a cambio cara-cara una vez y sello-sello una vez (PD3-1-E33)

Tablas de Frecuencia

Completar datos faltantes

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1A (PD2-1A)

La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de Estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

1A) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron una calificación de 2? Justifique.

Cuestionario evaluativo 1- ítem D (CE1-D)

D. A partir de los resultados obtenidos en el anterior registro complete la siguiente tabla.

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino		
No Adivino		

Cuestionario evaluativo 3- ítem F (CE3-F)

Otro televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla. **F.** Ayúdele al televidente a completar los datos de la tabla

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	
40		**10%**
60		
80	**2**	
100	**4**	**10%**

Preestructural

P1. Utiliza información irrelevante al tratar de completar datos faltantes en la tabla de frecuencias.

"La calificación 1 o 2 es reprobado. Porque si hay 40 estudiantes y reprobaron 2
2 2
40 X
*2*2/40=0.1 esta sería su nota"* (PD2-1A-E13)

P2. Intenta completar las frecuencias absolutas sin tener en cuenta las frecuencias conocidas

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	
40	*4*	**10%**
60	*31*	
80	**2**	
100	**4**	**10%**
	65	

(CE3-F-E10)

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	
40	*4*	**10%**
60		
80	**2**	
100	**4**	**10%**

(CE3-F-E4)

P3. No reconoce la proporcionalidad entre las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas(CE3-F-E17)

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	*72%*
40	*4*	**10%**
60	*20*	*6%*
80	**2**	*4%*
100	**4**	**10%**

P4. No determina ninguna frecuencia a partir de los datos. (CE1-D-E1)

Uniestructural

U1. Identifica la frecuencia absoluta faltante por tanteo aunque la verifica obteniendo la frecuencia absoluta total. (PD2-1A-E41)

Porque son 40 estudiantes y en uno hay 2 en 2=6 3=18 4=10 5=4
2+ 6 + 18+ 10 + 4= 40 estudiantes

U2. Asume que la suma de las frecuencias relativas es del 100% sin verificar este valor a partir de las frecuencias relativas de los resultados y sin calcular la frecuencia absoluta total a partir de la fila donde se conocen tanto la frecuencia absoluta como la relativa (CE3-F-E5).

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	*60%*
40	*4*	**10%**
60	*4*	*10%*
80	**2**	*5%*
100	**4**	**10%**
	38	*100% ----- 95%*

*Si 4 era 10% pues el 2 será el 5% y el 24 era 4*6=24 entonces era un 60%*
4=10% 2=5% 24=60%

Multiestructural

M1. Reconoce que falta información en la tabla, realiza dos operaciones y explica los procedimientos.

"6 estudiantes tuvieron una calificación de 2 porque 2+18+10+4 es igual a 34 y 34-40 es igual a 6" (PD2-1A-E16)

M2. Identifica resultado donde se conoce tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa; calcula la frecuencia relativa en los resultados donde sólo se conoce la frecuencia absoluta y calcula la frecuencia absoluta en resultados donde se conoce la frecuencia relativa

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	*60%*
40	*4*	**10%**
60		
80	**2**	*5%*
100	**4**	**10%**
	40	*100%*

4 10% 4 10% 4 10%
24 X 2 X X 100%
X=24*10/4 =60 X=2*10%/4= 5% X=40 (CE3-F-E13)

M3. Error en conteo de frecuencias absolutas de uno de los eventos; aunque determina sus frecuencias relativas correspondientes.

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino	*4*	*13.3%*
No Adivino	***26***	*86.6%*
	30	*100%*

*4+26=30 4*100/30=13.3% 26*100/30=86.6% 13.3+86.6 = 99.9%*
Por decimales da este resultado pero se puede aproximar a 100% (CE1-D-E6) (CE1-D-E9)

M4. Determina de manera incorrecta la frecuencia absoluta de uno de los eventos y totaliza de manera correcta el número total de datos. (CE1-D-E8)

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino	*1*	*2.38%*
No Adivino	*41*	*97.61%*
	30	*100%*

1*10/42 = 2.38% 41*100/42 = 97.61%

Relacional

R1. Presenta una expresión matemática o algoritmo para determinar los valores faltante. Además, interpreta los valores numéricos obtenidos.

Son 40 estudiantes 40 =A   34=B
1 --- 2   A-B=X
3 - - 18   X=40-34
4 - - 10   X=6
5 -- 4
Total 34
Porque a la suma de todos los estudiantes obtenemos un resultado de 34 y el examen lo presentaron 40 entonces a 40 le restamos 34 y el resultado es el número de estudiantes de calificación 2 (PD2-1A-E30)

R2. Identifica resultado donde se conoce tanto la frecuencia absoluta como la frecuencia relativa; calcula la frecuencia relativa en los resultados donde sólo se conoce la frecuencia absoluta; calcula la frecuencia absoluta en resultados donde se conoce la frecuencia relativa y calcula tanto las frecuencias absoluta y relativa en los resultados donde no se conocen ambos valores

Resultado	Cantidad de veces que ha caído el resultado	Porcentaje de veces que ha caído el resultado
20	**24**	*60%*
40	*4*	**10%**
60	*6*	*15%*
80	**2**	*5%*
100	**4**	**10%**
	40	*100%*

4   10%   24   X   2   X
X 100%   40 100%   40 100%

*X=4*100/4 =40   X= 60%   X= 5%*

40-(24+4+2+4) = 6

6   X
40 100%
X=15% (CE3-F-E8)

R3. Identifica correctamente los resultados que corresponde a los eventos compuestos; realiza de manera correcta el recuento y calcula correctamente las frecuencias absolutas y relativas

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino	*4*	*9.32%*
No Adivino	*38*	*90.47%*

42 100%   42 100%
4   ----   38   ----

9.32%   90.47%

(CE1-D-E4) (CE1-D-E7) (CE1-D-E15)

R4. Completa los valores de la tabla de frecuencia respaldando las frecuencias absolutas con el empleo de una tabla de conteo. (CE1-D-E16)

	Cantidad de Veces (Frecuencia absoluta)	Porcentaje de las veces (Frecuencia relativa)
Adivino	*//// =4*	*4*100/42=9.5%*
No Adivino	*//////////////////////////////////////= 38*	*38*100/42= 90.4%*

Interpretación de frecuencias

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1B (PD2-1B)

La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	**Número de Estudiantes**
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	**Clasificación cualitativa**
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

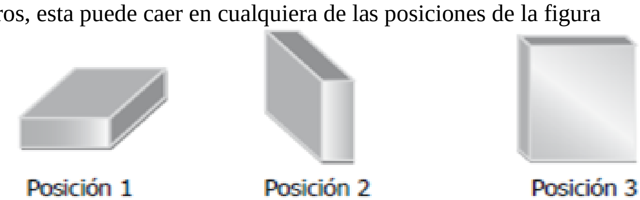
1B) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación de 4? Justifique.

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1C (PD2-1C)

1C) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido no esté como "Aprobado"?

Prueba Diagnóstica 3- ítem 4 (PD3-4)

4.Se lanza una caja de fósforos, esta puede caer en cualquiera de las posiciones de la figura



Un estudiante realiza este experimento con diferentes números de lanzamientos obteniendo los siguientes resultados.

	Lanzamientos				
Posición	10	20	50	100	500
1	3	8	22	55	330
2	4	6	12	20	100
3	3	6	16	25	70

A partir de la información anterior se puede concluir que:

a) Más de la mitad de las posiciones de caída corresponda a las posiciones 2 o 3
b) Las tres posiciones tengan aproximadamente la misma probabilidad entre ellas
c) Más de la mitad de todas las posiciones de caída corresponda a la posición 1
d) El número de veces que cae la caja en la posición 2 se aproxime al 50%

Justifique la respuesta

Cuestionario evaluativo 1- ítem E (CE1-E)

E. Con base en los resultados del ítem anterior, si se realizara el juego 500 veces. ¿cuántas veces se esperaría que el concursantes adivinara la clave ganadora?

Cuestionario evaluativo 1- ítem F (CE1-F)

F. ¿Considera que el resultado obtenido por el televidente fanático es confiable? ¿Por qué?

Preestructural

P1. No realiza lectura de los valores en tablas de frecuencias para establecer la probabilidad de ocurrencia de un evento simple.

"para mí fue que el examen que le practicaron a los estudiantes sacaron más puntaje que los demás alumnos" (PD2-1B-E4)"

P2. Respuestas basadas en creencias personales.

"Pues que en el momento que era la evaluación el estudiante estudia y sabía a no ser que de repente al estudiante se le pueda repetir y la vuelva a pasar" (PD2-1B-E23), *"porque no contestó bien, utilizó fracciones matemáticas, porque no analiza"*(PD2-1C-E13)

P3. Se dificulta identificar la frecuencia absoluta de un evento simple en una tabla de frecuencias.

"La probabilidad de encontrar un estudiante con calificación de 4 es de 30.04% porque se suma el número de estudiantes y se divide por 100% y da el anterior resultado, podría tener una probabilidad el estudiante muy baja " (PD2-1B-E38)"

P4. Se dificulta identificar las frecuencias que conforman el evento compuesto.

“Pues para que escogieran el alumno aprobado tendrá que tener la nota más alta que los demás estudiantes” (PD2-1C-E6).

P5. Se dificulta vincular información proveniente de varias tablas

4 X

5 4 4x4/5=3.2 (PD2-1C-E5)

P6. Asume el evento mismo como su frecuencia absoluta

1 + *3 + 8 + 22 + 55 + 330 = 419 Porque al lanzarse es más probable que caiga en la posición 1 (PD3-4-E5)*

P7. Al calcular la frecuencia esperada de un evento bajo las mismas condiciones con un número diferente de repeticiones no asume invariables las frecuencias relativas.

“*160*20/100 = 32 veces* (CE3-H-E6)”

P8. No establece la veracidad de enunciados probabilísticos basado en la lectura de los valores de la tabla de frecuencias, antepone su opinión personal a la información disponible del problema.

“Pues se tiene que jugar muchas veces para que sea posible” (CE4-2C1-E6), *“Si porque en todas las veces que miro el programa nunca le dio tres cifras”* (CE4-2C1-E9)”

P9. Respalda con datos que no provienen de la tabla de frecuencias

“Pues si puede ser porque si no tiene cifras es ***= 0*** *si tiene 1 es = 0.43 si tiene 2 es = 0.23”* (CE4-2C3-E10)

P10. Tiene en cuenta sólo las frecuencias que aparecen en la tabla de frecuencia.

“34”(CE3-G-E6)

P11. Asume que el número total de ensayos del experimento es igual al número de resultados posibles.

“5 juegos” (CE3-G-E7)

Uniestructural

U1. Interpreta la frecuencia absoluta del evento como valor de probabilidad.

“2+6+18=26. Es del 26% porque pues la calificación de 1 o 2 es reprobado y el 3 es pendiente entonces sumamos el número de estudiantes (PD2-1C-E49)”

U2. Se dificulta la interpretación del complemento de un evento.

“Si sumamos los aprobados que son 10 y 4 nos va a dar 14 eso lo multiplicamos por 100 y lo dividimos entre 40 nos va a dar el 35% (PD2-1C-E26)”

U3. Identifica la frecuencia absoluta del evento pero no asocia el valor de su probabilidad con la frecuencia relativa. (PD2-1C-E10)

U4. Identifica la frecuencia relativa del evento simple, pero no la frecuencia absoluta total.

Falso: Serían 47 personas que acudan a la página de hacer tarea

*130 ** ***36.4*** */ 100 = 47 personas* (PD3-2A-E44)

U5. Identifica el cardinal del espacio muestral, pero no las frecuencias del evento simple.

261---100%

130 --- X

*X= (130*100)/261 =49.80= 50* *Es verdadero porque visitaron 50 personas* (PD3-2A-E39)

U6. Asume la frecuencia relativa del evento como la frecuencia relativa del experimento, es decir con el 100% de los datos.

36.4 ---- ***100%***

X ---- *130* *X = 28 acudieron a la página de tareas* (PD3-2A-E28)

U7. Relaciona la frecuencia relativa del evento con el tamaño de la población.

Si hay 261 visitantes 36.4% ha visto la página

261 ---- 36.4%

130 ---- *X* *Yo pienso que es falso porque 73.08 personas* ***no visitarán*** (PD3-2A-E34)

U8. Asume la frecuencia absoluta del evento igual a la frecuencia relativa del mismo.

“No porque solo acudirán 36.4 personas para ver la página (PD3-2A-E36)”

U9. Se observa dificultad al determinar el valor desconocido de la igualdad de proporciones.

500/4 = 125 Si de 42 veces giro 4 veces tomé 500/4 = 125 veces (CE1-E-E11)

U10. Establece la probabilidad de un evento como un rango a partir de la lectura de las frecuencias relativas del evento para los diferentes tamaños de corrida

Un jugador tiene casi la misma probabilidad de acertar una cifra como de no coincidir cifra alguna

Según la tabla tiene un 40% y 50% de acertar una cifra y de no acertar un 40% a 60% (CE4-2C3-E1)

Multiestructural

M1. Establece la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos pero no convierte correctamente a porcentaje.

"La probabilidad es del 0.25% porque tomamos los 10 estudiantes que sacaron 4 y los dividí en los 40 estudiantes que presentaron el examen 10/40 = 0.25% (PD2-1B-E42)"

M2. Concibe el valor de la probabilidad como la razón entre el número de casos favorables del total de datos interpretado como el complemento del evento.

*10/40 = 0.25 * 100% = 25% Número de estudiantes vs. el resto de los estudiantes* (PD2-1B-E19)

Relacional

R1. Asume la probabilidad como porcentaje a partir de una razón.

*10/40 = 0.25 * 100% = 25% Que hay 10 estudiantes que sacaron 4, la probabilidad de que uno saque 4 es el 25% de probabilidad.* (PD2-1B-E7)

R2. Realiza de manera correcta una conversión de la frecuencia absoluta del evento a frecuencia relativa por medio de una regla de tres; asumiendo que el total de los individuos corresponde al 100%

40 100
10 X
X=400/40 = 25% (PD2-1B-E18)

R3. Obtiene de manera aproximada el número de veces en que se espera aparezca el evento favorable utilizando una estrategia de razonamiento proporcional

42+42+42+….
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4= 48
*42*12*
En 500 sería posible tener 48 veces correcta las respuestas ganadoras (CE1-E-E3)

R4. Realiza una regla de tres asumiendo que el tamaño de la corrida es el 100% para encontrar la frecuencia absoluta que corresponde al evento cuya frecuencia relativa se conoce de otra corrida del mismo

500 100%
X 9.52%
X=47.6
Cerca de 48 veces adivinaría la clave (CE1-E-E7)

R5. Halla la frecuencia esperada del evento sabiendo que las frecuencias absolutas del evento analizado en varias corridas del mismo experimento guardan una proporcionalidad directa

Adivinó No de todas
4 42
X 500
*4*500/42 = 47* (CE1-E-E13)

R6. Calcula la frecuencia esperada de un evento por medio de una regla de tres utilizando las frecuencias relativas de la tabla de frecuencias

X=8 5%
160 100%
8 veces
*160 * 5 / 100* (CE3-H-E8)

R7. Determina de manera correcta el tamaño de la corrida asumiendo que este valor corresponde al 100%

40 Veces (CE3-G-E8)

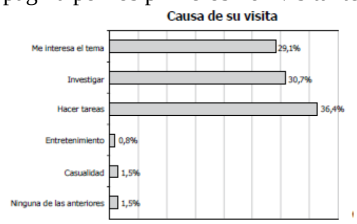
R8. Calcula la frecuencia esperada de un evento por medio de una regla de tres utilizando las frecuencias absolutas de la tabla de frecuencias

Juegos Veces
160 X
40 2
160x2/40 =8
Porque si en 40 son dos en 160 son 8 (CE3-H-E13)

Interpretación de Diagramas de Barras

Prueba Diagnóstica 3- ítem 2 (PD3-2)

2. Radio Nacional de Colombia creó una página Web en conmemoración del bicentenario de la independencia de Colombia. La gráfica representa las causas por las cuales se visitó la página por los primeros 261 visitantes.

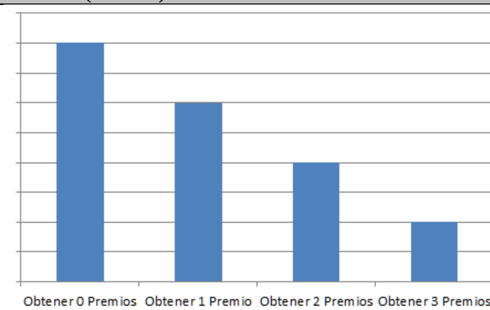


Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Justifique.

2A) Menos de 130 visitantes acudieron a la página para hacer tareas.
2B) Más de 200 visitantes acudieron a la página investigar o para hacer tareas.
2C) Aproximadamente 165 visitantes no consultan la página porque requieren hacer tareas.

Cuestionario evaluativo 2- ítem C (CE2-C)

En la siguiente gráfica se representa la opinión de un concursante acerca del grado de probabilidad de obtener los premios en este juego.



C. De acuerdo con la opinión del concursante mostrada en la gráfica anterior, determine la probabilidad de obtener:

3 Premios	**Menos de tres premios**
Más de un premio	**3 ó 1 premios**

Preestructural

P1. Se dificulta la interpretación de porcentajes

Verdadera más de 200 personas acudieron a la página 80127 visitantes visitaron la página (PD3-2B-E13)

P2. Se dificulta la identificación de todos los eventos simples que conforman el evento compuesto.

"*(261*30.7%)/100 = 80. Verdadera porque cogemos los 261 visitantes que fueron los primeros que la visitaron x 30.7% de investigar y los 100 que es la suma de todos los porcentajes y nos da 80* (PD3-2B-E10)"

P3. Asume equiprobabilidad de los eventos mostrados en la gráfica, sin tener en cuenta las frecuencias representadas en el gráfico (CE2-C-E4)

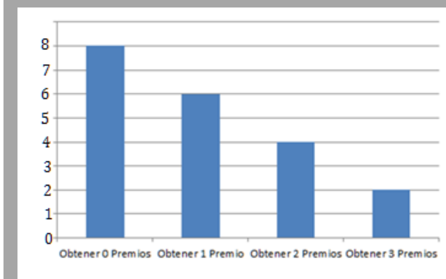
3 Premios	*La probabilidad es ¼ = 0.25 = 25%*
Menos de tres premios	*3 / 4 = 0.75 = 75%*
Más de un premio	*2 / 4 = 0.5 = 50%*
3 ó 1 premios	*2 / 4 =0.5 = 50%*

P4. Establece valores de probabilidad sin leer las frecuencias del gráfico (CE2-C-E6)

3 Premios	*La probabilidad sería de un 100% sería un 50% de probabilidad debido a que nos muestra la gráfica*
Menos de tres premios	*La probabilidad para ganar menos de tres premios sería un 30% debido a lo que nos muestra la gráfica o la información*
Más de un premio	*La probabilidad de ganar más de un premio sería un 80% debido a lo que nos muestra la gráfica*
3 ó 1 premios	*La probabilidad sería un 100%*

Uniestructural

U1. Asume la altura de las barras como las frecuencias absolutas de los eventos, pero no establece los valores de probabilidad de ellos. (CE2-C-E11)



De acuerdo con la opinión del concursante mostrada en la gráfica anterior, determine la probabilidad de obtener:

3 Premios	*2*
Menos de tres premios	*6 y 4*
Más de un premio	*4 y 2*
3 ó 1 premios	*2 y 6*

U2. Asume la frecuencia relativa como la frecuencia absoluta del evento

No porque sólo acuden 36.4 personas para ver la página (PD3-2A-E36)

U3. Asocia a la frecuencia absoluta total la frecuencia de uno de los eventos simples que conforman el evento compuesto.

261   30.7%
X   36.4%
X=309   Si porque hacemos el mismo procedimiento del anterior punto (PD3-2B-E5)

U4. Asume la frecuencia relativa del evento como su cardinal (PD3-2A-E42)

No; acudieron 364 para hacer tareas

U5. Lee de manera separada los porcentajes de los eventos simples que conforman el evento compuesto, sin establecer la frecuencia correspondiente a dicho evento.

*Para las dos tanto para investigar que fueron 30.7% y para hacer tareas fueron un 36.4% Falso (*PD3-2B-E37)

U6. Asume la barra más alta de la gráfica como el 100% de los datos. (CE2-C-E8)

3 Premios	*3*25%/100=0.75%*
Menos de tres premios	*3*22.5/100%=6.75%*
Más de un premio	*5*75/100=3.75%*
3 ó 1 premios	*3*25/100=0.75%* *1*75/100=0.75%*

Multiestructural

M1. Identifica la frecuencia relativa del evento en el gráfico, la convierte en frecuencia absoluta; pero no utiliza dicha información para dar respuesta a la pregunta planteada (PD3-2A-E7) (PD3-2B-E29)

Porcentaje   Personas
36.4   X   Verdadero
*100   261   36.4*261/100*   (PD3-2A-E7)

Relacional

R1. Identifica la frecuencia relativa del evento en el gráfico y con ella determina la frecuencia absoluta del evento.

100   261   X=95.0004   Verdadera, ya que 95 visitantes acuden a la página
36.4   X   para hacer tareas   (PD3-2A-E2)

R2. Identifica las frecuencias relativas de los eventos simples en el gráfico y aplica la regla de la suma para calcular el valor de probabilidad de la unión de dichos eventos.

30.7   Porcentaje   Personas
*<u>36.4</u>   67.1%   67.1*261/100%=175*
67.1   100%   261   Falso   (PD3-2B-E7)

R3. Interpreta la probabilidad del complemento de un evento como la resta del 100% con su probabilidad.

100Porcentaje Personas
*<u>- 36.4</u> 63.6%63.6*261/100%=165.9*
63.6 100% 261 Verdadera (PD3-2C-E7)

R4. Comprende que la probabilidad de ocurrencia del complemento del evento como la suma de las probabilidades de los eventos diferentes al evento en cuestión. (PD3-2C-E8)

29.7+30.7+0.8+1.5+1.5=63.5% Verdadero; porque exactamente 165 visitantes no consultan
*63.5%*261/100=165 la página porque requieren hacer tareas* (PD3-2C-E8)

<u>Cálculo de Probabilidades</u>

Aplicación Ley de Laplace
Aplicación Ley de Laplace en Experimentos Simples

Prueba Diagnóstica 1- ítem 2 (PD1-2)

2. En dos cajas A y B se introduce canicas rojas y azules en las siguientes cantidades

CAJA	ROJAS	AZULES
A	**6**	**4**
B	**60**	**40**

Cada caja se revuelve vigorosamente. Una persona elije una de las cajas y luego, sin mirar, saca una canica. Si la canica es azul gana $120.00 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul? Justifique su respuesta.

A. La caja A **B.** La caja B **C.** Cualquiera de las dos cajas.

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1B (PD2-1B)

La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de Estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

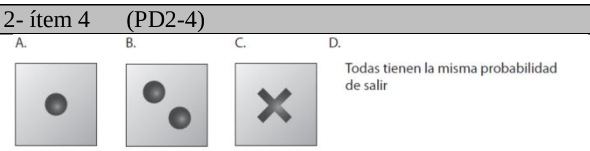
1B) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación de 4? Justifique.

Prueba Diagnóstica 2- ítem 3 (PD2-3)

3. En una caja Anita tiene 26 pelotas. De las cuales 10 son verdes, 5 son azules y 11 son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde?

Prueba Diagnóstica 2- ítem 4 (PD2-4)

4. Se lanza un dado de seis caras que tiene tres de sus caras marcadas con un punto, dos caras marcadas con "X" y una cara marcada con dos puntos, la cara que es más probable salga es:



Cuestionario evaluativo 3- ítem D (CE3-D)

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D1. El número 100	**D2.** Un número terminado en 0
D3. Un número menor a 80	**D4.** Un número mayor a 40
D5. Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	**D6.** Un número que no comience en 4

Preestructural

P1. Desconoce razones de proporcionalidad que permiten utilizar equiprobabilidad.

Puede que sea la "d" porque si nos ponemos a lanzar los dados seguidos nos salgan las tres caras seguidas y al contar los lanzamientos de cada uno puede darnos todas las caras iguales (PD2-4-E23)

La probabilidad de que un estudiante haya sacado una calificación de 4 es del 20% porque dividimos el 100% entre 5 o sea el número de calificaciones y un 20% de estudiantes obtuvo una calificación de 4 (PD2-1B-E29)

P2. Desvirtúa aleatoriedad del experimento atribuyendo la posibilidad de controlar propiedades físicas del mismo.

"*Todos tienen la misma probabilidad porque si se lanza a una velocidad muy grande o si se lanza con una velocidad mínima podría salir la "X"* (PD2-4-E29)"

P3. Asume la probabilidad de un evento simple como la suma del valor numérico de varios puntos muestrales del experimento.

D1: Probabilidad de obtener el número 100 *80+20=100*
D2: Probabilidad de obtener un número terminado en cero *20+60=80* (CE3-D-E10)

Uniestructural

U1. Asume el cardinal del evento como la probabilidad de ocurrencia del mismo

*La probabilidad de encontrar esta calificación es de **10** según en la tabla porque son el número de los que pasaron y con 4 aprobaron* (PD2-1B-E31)

*Que la probabilidad de encontrar un estudiante que haya sacado una calificación es **10** porque de un 40% de estudiantes 10 estudiantes han sacado 4* (PD2-1B-E28)

U2. Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento multiplicando el valor numérico del evento por el cardinal del espacio muestral

*La respuesta es 1.6% porque al multiplicar el número total de estudiantes **(40 por 4)** que es la calificación y al dividirlo entre 100 el resultado es 1.6* (PD2-1B-E46)

U3. Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento multiplicando el valor numérico del evento por el número de puntos muestrales del experimento

Las probabilidades de encontrar un estudiante con calificación de 4 son muy bajas diría que un 0.5% ya que son 5 calificaciones y 40 estudiantes
***(4*5)/**40 =0.5* (PD2-1B-E47)

U4. Identifica solamente el evento más probable. (PD2-3-E23)

Sería en las rojas porque hay más pelotas rojas que las demás (PD3-1-E23)

U5. Compara los cardinales de los puntos muestrales que no pertenecen al evento compuesto para establecer su grado de probabilidad

Pues que si hay 10 verdes y 5 azules y 11 rojas hay más posibilidades de sacar las rojas (PD2-3-E4)

U6. Para el cálculo de probabilidad de eventos compuestos en experimentos simples, establece el cardinal del evento compuesto a partir de la suma de los cardinales de los eventos simples que lo componen.

Podrían sacar 21 veces una pelota de cada color 11+10=21 (PD2-3-E11)

U7. Establece el cardinal de un punto muestral que hace parte del evento compuesto así como su valor de probabilidad (PD2-3-E12)

10=verdes *26* *100*
5=azules *11* *X*
11=rojas

$$\frac{100 * 11}{26} = 42\%$$

La probabilidad sería de un 42% porque se plantea una regla de tres (PD2-3-E12)

U8. Considera la probabilidad como la razón entre el valor de numérico de los eventos simples que lo conforman y el número total de casos posibles.

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D2. Un número terminado en 0	*100***20**/5=40%* *100***40**/5=12%* *100***60**/5=12%* *100***80**/5=16%* *100***100**/5=20%*
D3. Un número menor a 80	*100***40**/5=12%*

	*100*20/5=40%* *100*60/5=12%* *64%*
D4. Un número mayor a 40	*100*80/5=16%* *100*60/5=12%* *100*100/5=20%*
D5. Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	*40*5/100=2* *60*5/100=3* *80/5*100=4*
D6. Un número que no comience en 4	*60*5/100=3* *80*5/100=4* *20*5/100=1* *100*5/100=5* (CE3-D-E7)

Multiestructural

M1. Calcula probabilidades como cociente entre cardinales de eventos disyuntos.

La probabilidad de encontrar la pelota verde es más porque 11/10 es la de encontrar una verde (PD2-3-E34)

M2. Calcula el valor de probabilidad de uno de los eventos del experimento simple, que conforman el evento compuesto, a partir de ley de Laplace (PD2-3-E12).

*10 verdes 26 100 (100*11)/26 = 42%*
5 azules 11 X
11 rojas
La probabilidad sería de un 42% porque se plantea una regla de 3 (PD2-3-E12).

M3. Al calcular probabilidades de un evento compuesto, intenta determinar la probabilidad de los eventos simples que lo componen, y no asume que el cardinal del espacio muestral del experimento corresponde a una probabilidad del 100%

26 pelotas 26 10
10 verdes *100 X 2.6 probabilidad de verdes*
5 azules 26 11
11 rojas *100 X 2.86 probabilidad de rojas*
Hay más probabilidad de encontrar una pelota roja (PD2-3-E32)

M4. Identifica los eventos simples del experimento compuesto y calcula por separado sus probabilidades, aplicando la Ley de Laplace tomando como numerador el número total de casos posibles y como denominador el número de casos favorables (PD2-3-E41)

26/10=2.6 Probabilidad de sacar una verde
26/5=5.2% Probabilidad de sacar azules
26/11=2.36% Probabilidad de sacar rojas (PD2-3-E41)

M5. Reconoce el evento más probable como aquel que tiene mayor cardinalidad.

Verdes Azules Rojas
10 5 11
10+5+11=26 pelotas de colores
De que las rojas hay 11
Por las verdes hay 10
Las rojas serían más que las verdes serían menos saldría una roja (PD2-3-E13)

M6. Al determinar el valor de probabilidad de un evento compuesto, intenta aplicar la ley de Laplace en los experimentos simples de manera separada.

La probabilidad de que la pelota salga roja o verde es alta por la razón de haber más pelotas de color verde y rojo

$$\frac{26 * 11}{5} = 57.2\% \frac{26 * 10}{5} = 52\%$$

(PD2-3-E2)

M7. Identifica los cardinales de los puntos muestrales del evento compuesto plantea una regla de tres sin calcular su probabilidad

Porcentaje	*Pelotas*	*Porcentaje*	*Pelotas*
100%	*26*	*100%*	*26*
X	***10***	*X*	***11***

La probabilidad de sacar una pelota verde es muy baja; en cambio la probabilidad de sacar una roja es baja llegar a un probablemente (PD2-3-E24)

M8. Establece el cardinal de los puntos muestrales que hacen parte del evento compuesto considerándolo como su valor de probabilidad

Sería 21 veces probable sacar una pelota roja o verde porque
11*+****10****=21* (PD2-3-E9)

Relacional

R1. Calcula la probabilidad de ocurrencia del evento a partir del punto muestral y el cardinal del mismo

(PD2-1B-E7) (PD2-1B-E8) (PD2-1B-E19)
10/40 = 0.25 x 100% = 25%
Que hay 10 estudiantes que sacaron 4; la probabilidad de que uno saque 4 es del 25% de probabilidad (PD2-1B-E7)

10/40 Número de estudiantes que sacaron 4 y el resto de los estudiantes (PD2-1B-E19)

1/5 = 0.2=20%
Porque solo aparece una vez el número 100 y cinco son las secciones de la rueda (CE3-D1-E13)

R2. Establece el cardinal del evento compuesto sumando los cardinales de los eventos simples que lo componen y con base en este valor aplica la Ley de Laplace para el cálculo de su probabilidad.

*21*100/26=80.76%* (PD2-3-E33).

R3. En experimentos simples, al calcular la probabilidad de ocurrencia de un punto muestral divide al 100% entre el cardinal del espacio muestral

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

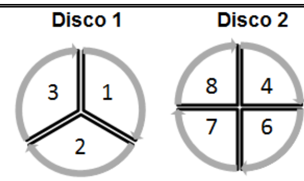
El número 100	*200/5=20%* *La probabilidad de sacar 100 en el primer giro es de 20%*
Un número terminado en 0	*Es del 100% porque todos los números de la rueda terminan en cero: 20,40,60,80 y 100*
Un número menor a 80	*20:20%* *40:20%* *60:20%* *60% es el 60% probable*
Un número mayor a 40	*60: 20%* *80: 20%* *100:20%* *60% es el 60% probable*

(CE3-D-E6)

Aplicación Ley de Laplace en Experimentos Compuestos

Prueba Diagnóstica 3- ítem 3 (PD3-3)
3.Si en una bolsa hay 4 pelotitas verdes, 3 pelotitas rojas y 4 pelotitas azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelotita azul y luego, sin reponerla, sacar otra azul?
Cuestionario evaluativo 1- ítem A (CE1-A)

Juego 'Caja fuerte'
En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.



A ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación ganadora? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 1- ítem B (CE1-B)

B ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que comienza en 3 o en 2? Justifique su respuesta.
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de dos cifras que comience en cifra impar y termine en cifra par? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 1- ítem C (CE1-C)

C. Si el concursante sabe de antemano que la clave correcta termina en 8 ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

Cuestionario evaluativo 4- ítem 1C (CE4-1C)

1C.

¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2B (CE4-2B)

Juego espejito, espejito

Opciones Precio Carro

Cifra 1	Cifra 2
3	7
4	8
5	9

En esta versión, el jugador debe adivinar únicamente dos cifras para obtener el precio del premio.

2B Calcule la probabilidad de**:**

Ganar el premio
Coincidir en la primera cifra del premio
Coincidir en la segunda cifra del premio

Preestructural

P1. Asume equiprobabilidad en los puntos muestrales del experimento.

*La posibilidad es de 0.27****=3/11*** *porque sumas 4,3,4 y nos da 11 y lo dividimos en 3* (PD3-3-E28)

P2. Da una opinión acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento, sin utilizar la información de la situación

Es muy poca la probabilidad porque todas están revueltas (PD3-3-E46)

P3. Intenta aplicar la Ley de Laplace hallando la razón entre los cardinales de los experimentos simples

3 de 4 porque en el disco 1 están los números consecutivos hasta 3; y en el disco 2 continua consecutivo hasta el 4 y luego se desordenan o se saltean hasta el 6 entonces yo pienso que son el 3 y el 4 o probabilidad (CE1-A-E8)

P4. Intenta aplicar la Ley de Laplace hallando la razón entre el número y la suma de los cardinales de los experimentos simples que forman el experimento compuesto

Pues la probabilidad sería un 30% porque si nosotros decimos un par de números que nosotros creamos puede estar bien ***2/7*** (CE1-A-E4)

P5. No aplica la Ley de Laplace al respaldar su respuesta con una opinión acerca del resultado probable el juego

Yo pienso que no se podría dar una probabilidad exacta porque como puede que saque la combinación ganadora como puede que no. (CE1-A-E5)

P6. Intenta aplicar la Ley de Laplace asumiendo un sólo caso favorable y la suma de los cardinales de los experimentos simples como el número total de resultados posibles.

P7. Muestra dificultad al identificar los casos favorables y los casos posibles (CE1-B1-E1) (CE1-C-E9)

3+1+2=6
*6*10/8=75%*
La probabilidad puede ser del 75% (CE1-C-E9)

P8. Para el cálculo de probabilidad de un evento de un experimento compuesto asume el experimento como simple

La probabilidad sería de 3/5 (CE4-C1-E10)

P9. Asume el cardinal del espacio muestral como el número de casos favorables y el valor numérico del evento como el número de casos posibles.

*5*5/**100**=0.25 Es la probabilidad de obtener el número 100* (CE4-C1-E13)

P10. Aplica de manera incorrecta la Ley de Laplace considerando que el número total de resultados posibles es igual al número de experimentos simples que componen el experimento compuesto (CE4- 2B2- E12)

1 de 2 el 50% (CE4- 2B2- E12)

P11. Da una opinión del grado de probabilidad de los eventos, sin respaldarla con la aplicación del enfoque clásico

Calcule la probabilidad de**:**

Ganar el premio	*Que salga 3,4,5 para obtener el premio*
Coincidir en la primera cifra del premio	*Es probable coincidir con la primera y la última*
Coincidir en la segunda cifra del premio	*No es tan probable*

(CE4- 2B - E7)

Uniestructural

U1. En un experimento compuesto, aplica la ley de Laplace como si fuese un experimento simple.

Son 11 pelotas sacando una azul me quedan 3
3/11=0.27 esa es la probabilidad (PD3-3-E43)

U2. En un experimento compuesto, determina el valor de probabilidad de un evento a través de una regla de tres como si fuese un experimento simple.

4 Verde 4 1
3 Rojas X 11
*4 Azules X=11*4/1*
11 pelotas (PD3-3-E4)

U3. Establece un listado de las posibles combinaciones que cumplen la condición del evento, y calcula la probabilidad de dicho evento como la suma de las probabilidades de dos puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto. (CE4-C2-E4)

20+100 80+100
80+40 80+60
40+100 80+80
60+100 60+60
Calculando las posibles opciones se deduce que la suma de los dos números da 40% porque
80: 20%
100:20%
40% (CE4-C2-E4)

U4. Establece la probabilidad como el número de veces en que puede aparecer el evento

La probabilidad es 3 porque es igual a
80+20 40+60 100 = 100 (CE4-C1-E2)

U5. Asume que el valor de probabilidad es igual al número de casos favorables

Calcule la probabilidad de**:**

Ganar el premio	*Puede tener 9 probabilidades de ganar el premio*
Coincidir en la primera cifra del premio	*Puede tener 3 posibilidades de sacar la primera cifra que es 3,4 y 5 para las cifras*
Coincidir en la segunda cifra del premio	*Puede tener 3 posibilidades de sacar la segunda cifra porque puede sacar 7,8 y 9 porque las dos cifras no se combinan*

(CE4- 2B – E3)

U6. Asume el valor de probabilidad como el número de casos que cumplen la condición del evento compuesto (CE1- B2- E17)

Multiestructural

M1. Calcula la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los puntos muestrales de los experimentos simples que conforman el experimento compuesto, reconociendo el tipo de extracción (PD2-4-E33).

4/11=0.36 ya que como solo hay 4 peloticas azules
3/10=0.3 ya que como solo quedan 3 sobre 11 (PD2-4-E33).

M2. En un experimento compuesto sin reposición, asume el mismo valor en el denominador al aplicar la Ley de Laplace

4 Verdes 11 100%
3 Rojas 3 X X=3.3% por ciento de sacar la primera pelota azul
4 Azul 11 100%
11 Pelotas 2 X X=2.2% por ciento de sacar la segunda pelota azul
(PD3-3-E23)

M3. Establece los puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto, los cuales son concebidos al aplicar la Ley de Laplace como los casos favorables y asume el número total de casos como la suma de los cardinales de los experimentos simples.

3 8 Pues la probabilidad sería 6/7= 0.85% pues hice la lista de los números impares
3 4 al comienzo y los números pares al final y el total me da
3 6 7 100%
1 8 6 6 = 85%
1 4
1 6
6 (CE1-B2-E4)

M4. Al calcular el valor de probabilidad en experimentos compuesto, establece las probabilidades de los experimentos simples que lo componen, sumando las probabilidades anteriores

1 / 4 = 0.25 = 25%
1 / 3 = 0.33 = 33.33%
58%
Pues más de la mitad ya que tomé el número de fichas que era 1 y lo dividí en el número de fichas que hay en cada ruleta
(CE1-A-E13)

Relacional

R1. Elabora una regla de tres considerando que el 100% es el cardinal del espacio muestral. Para hallar la probabilidad del evento pedido, asume la cantidad de elementos que cumple la condición del evento (CE1-B2- E7) (CE4- 2B1 – E8)

6 números que comienzan en impar y terminan en par
12 100%
6 X
X= 50%
La probabilidad es del 50% (CE1- B2- E7)
Calcule la probabilidad de**:**

Ganar el premio	*9 - 100* *1 - x* *La probabilidad de ganar es del 11.11%*
Coincidir en la primera cifra del premio	*3 - 100%* *1 - X* *X= 33.33%*
Coincidir en la segunda cifra del premio	*3 - 100%* *1 - X* *X= 33.33%*

(CE4- 2B1 – E8)

R2. A partir de un listado ordenado de los puntos muestrales del experimento; plantea una regla de tres para hallar el porcentaje que corresponde al número de puntos muestrales que pertenecen al evento compuesto con respecto al número total de puntos muestrales del experimento (CE1-A-E12) (CE4-C-E8)

La probabilidad es 1/12 = 0.083
12   100%
1   X
3-8   1-8   2-8
3-4   1-4   2-4
3-6   1-7   2-6
3-7   1-6   2-7   (CE1-A-E12)

¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	*16 100%* *4 X X=25%*
¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	*16-4=12* *16 100% X=75%* *12 X*
¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	*80 - 100 - 120 - 140 -160* *3 4 3 2 1 = 13* *16 100%* *13 X* *X= 81.25%*

(CE4-C-E8)

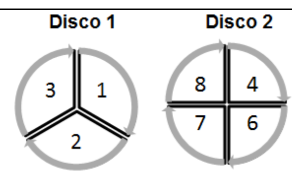
Regla del Producto

Prueba Diagnóstica 3- ítem 3   (PD3-3)

3.Si en una bolsa hay 4 pelotitas verdes, 3 pelotitas rojas y 4 pelotitas azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelotita azul y luego, sin reponerla, sacar otra azul?

Cuestionario evaluativo 1- ítem B2 (CE1-B2)

Juego 'Caja fuerte'
En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.



B2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de dos cifras que comience en cifra impar y termine en cifra par? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 4- ítem 1C (CE4-1C)

1C.

¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de no obtener un valor de 100 en la suma de los puntos?	
¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor a 60 y menor igual a 160 en la suma de los puntos?	

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2B1 (CE2-2B1)

Juego espejito, espejito

Opciones Precio Carro

Cifra 1	Cifra 2
3	7
4	8
5	9

En esta versión, el jugador debe adivinar únicamente dos cifras para obtener el precio del premio.
2B Calcule la probabilidad de**:** Ganar el premio

Preestructural

P1. Da una opinión del grado de probabilidad del evento.

La probabilidad es bastante ya que hay cuatro pelotas; pero de verdes también hay 4 verdes (75%) (PD3-3-E19)

P2. Interpreta la situación como un experimento simple.

11 100%
X 2
La posibilidad de sacar dos pelotas azules es 0.22% (PD3-3-E9)

P3. Debido al carácter aleatorio del experimento, no es posible determinar el valor de ocurrencia

4 verdes 3 rojas 4 azules
No se puede o puede ser poca porque en realidad no sabe cómo las va a sacar y que va a sacar de estas pelotas (PD3-3-E10)

P4. Se dificulta la aplicación de la regla del producto al hallar el cardinal y la probabilidad conjunta de un punto muestral en un experimento compuesto (CE1-A-E3)

Es más probable acertar en el disco uno porque son solo tres opciones y en el otro cuatro (CE1-A-E3)

Uniestructural

U1. Lista algunos puntos muestrales del experimento.

4 verdes 3 rojas 4 azules
Pues hay poca probabilidad porque uno puede sacar
2 verdes 1 verde y 1 roja
2 rojas 1 azul y 1 roja
2 azules 1 azul y 1 verde
Debe ser muy de buenas para sacar azules (PD3-3-E17)

U2. Al determinar la probabilidad en experimentos compuestos, calcular el valor de probabilidad de uno de los experimentos simples a través de una regla de tres

4 verdes *100 11*
3 rojas *X 4* *36.36%*
4 azules
11 (PD3-3-E32)

Multiestructural

M1. Calcula por separado la probabilidad de los eventos simples que conforman el evento del experimento compuesto, pero no tiene en cuenta que es un muestreo sin reposición. (PD3-3-E8) (PD3-3-E15)

4 Azules 36%
3 Azules 27%
11 100% 11 100%
4 X 4 X
36% 27% (PD3-3-E8)

M2. Realiza por separado el cálculo de las probabilidades condicionales por medio de una regla de tres sin establecer su probabilidad conjunta. (PD3-3-E33)

4/11=0.36% ya que como solo hay 4 peloticas azules
3/10=0.3% ya que como quedan 3 sobre 11
(PD3-3-E33)

M3. Calcula las probabilidades de los eventos que forman el evento de manera simultánea y luego aplica el principio de la suma para calcular su probabilidad conjunta

2/3 = 0.66 = 66% = 33%
3 / 4 = 0.75 = 57% = 19%
Es del 52% porque cogí los números pares o impares que hay en cada ruleta y los dividí por el número de cajas que hay en cada uno, saqué el porcentaje y lo dividí en el número de pares o impares que hay (CE1- B2- E13)

M4. Realiza por separado el cálculo de probabilidad de los experimentos simples a través de una regla de tres (CE1- B2- E18)

3 100% 66.66% Cifra impar *4 100% 75% Cifra Par*
2 X *3 X*

(CE1- B2- E18)

Regla de la Suma

Prueba Diagnóstica 2- ítem 1C (PD2-1C)

2. La siguiente tabla presenta las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 estudiantes en un examen

Calificación	Número de Estudiantes
1	2
2	
3	18
4	10
5	4

Según las calificaciones obtenidas en el examen, los estudiantes son clasificados como se indica a continuación

Calificación numérica	Clasificación cualitativa
1 ó 2	Reprobado
3	Pendiente
4 ó 5	Aprobado

1C) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido no esté como “Aprobado”?

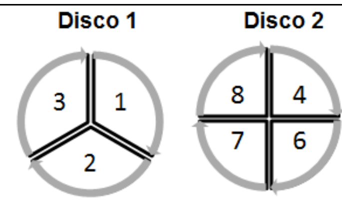
Prueba Diagnóstica 2- ítem 3 (PD2-3)

3. En una caja Anita tiene 26 pelotas. De las cuales 10 son verdes, 5 son azules y 11 son rojas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde?

Cuestionario evaluativo 1- ítem B1 (CE1-B1)

Juego ‘Caja fuerte’

En este juego, el concursante deberá hallar la clave ganadora para poder obtener un premio, la clave secreta es un número de dos dígitos que se obtiene, escogiendo un dígito de cada uno de los discos.



B ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que comienza en 3 o en 2? Justifique su respuesta.

Cuestionario evaluativo 1- ítem C (CE1-C)

C. Si el concursante sabe de antemano que la clave correcta termina en 8 ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

Cuestionario evaluativo 3- ítem D (CE3-D)

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

D1. El número 100	**D2.** Un número terminado en 0
D3. Un número menor a 80	**D4.** Un número mayor a 40
D5. Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	**D6.** Un número que no comience en 4

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2B (CE4-2B)

2B Calcule la probabilidad de**:**

Coincidir en la primera cifra del premio	Coincidir en la segunda cifra del premio

Preestructural

P1. No establece la probabilidad de ninguno de los eventos que hacen de la unión.

3 2 1 2 7 4 7 6

Estas son las probabilidad de impar y par (CE1- B2- E6)

Uniestructural

U1. Calcula la probabilidad de uno de los puntos muestrales que conforman el evento compuesto.

*10: Verdes 26 100 (100*11)/26 = 12%*
5: Azules 11 X
11: Rojas
La probabilidad sería de un 42% porque se plantea una regla de 3 (PD2-3-E12)

Multiestructural

M1. Considera la probabilidad de la unión de dos eventos como la resta de las probabilidades de estos eventos.

V: 10 / 26 = 38.46%
A: 5 / 26 = 19.23% 38.46% - 42.30%
R: 11 / 26 = 42.30%
La probabilidad de encontrar una pelota roja o verde es un 9.07 de probabilidad (PD2-3-E38)

M2. Calcula la probabilidad de un evento compuesto en un experimento simple multiplicando los cardinales de los eventos simples que componen el evento compuesto.

*Se podría hacer una regla de tres porque le están preguntando cuál es la probabilidad de encontrar una pelota roja o una verde entonces multiplicamos 10*11/26 =4.2. La probabilidad de sacar una pelota roja o verde es 42* (PD2-3-E3)

M3. Calcula por separado la probabilidad de los puntos muestrales. (PD2-3-E16) sin asociar este cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto como la suma de los eventos simples que lo componen. (PD2-3-E18) (CE1- B1- E2)

10/26 = 0.38 Verdes La posibilidad de sacar una pelota verde y roja es mayor ya que
11/26 = 0.42 Rojas la posibilidad de sacar una azul es del 0.19 (PD2-3-E16)

10: Verdes Verde: 26 100
5: Azules 10 X = 1000/26 = 38.46 = 38%
11: Rojas Roja: 26 100
11 X = 1100/26 = 42.30 = 42% (PD2-3-E18)

*1*100/3 = 33.33% de probabilidad de sacar el número 2*
*1*100/2 = 50 % de probabilidad de sacar el número 3* (CE1- B1- E2)

Relacional

R1. Suma los cardinales de los eventos simples que conforman el evento compuesto para obtener el número de casos favorables del evento compuesto; para luego aplicar la Ley de Laplace.

*Verdes 10 21*100/26=80.76%*
Rojas 11
21 (PD2-3-E33)

R2. Calcula la probabilidad de los cada uno de los puntos muestrales del evento compuesto del experimento simple luego suma los valores de probabilidad

*2: 1*100/3 = 33.33*
*3: 1*100/3 = 33.33*
66.66% (CE1- B1- E3)

R3. Calcula la probabilidad de los puntos muestrales del evento compuesto y suma las probabilidades de los eventos simples que conforman el evento compuesto.

D. Calcule las siguientes probabilidades de obtener los siguientes resultados al girar la rueda una vez:

Un número menor a 80	*20 40 60* *20%+20%+20% = 60%*
Un número mayor igual a 40 y menor igual a 80	*40 60 80* *20%+20%+20% = 60%*
Un número que no comience en 4	*20 60 80 100* *20%+20%+20%+20% = 80%* (CE3- D- E5)

<u>**Comparación de Probabilidades**</u>

Comparación de Probabilidades en experimentos simples

Prueba Diagnóstica 1- ítem 2 (PD1-2)

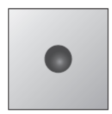
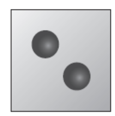
2. En dos cajas A y B se introduce canicas rojas y azules en las siguientes cantidades

CAJA	ROJAS	AZULES
A	**6**	**4**
B	**60**	**40**

Cada caja se revuelve vigorosamente. Una persona elije una de las cajas y luego, sin mirar, saca una canica. Si la canica es azul gana $120.00 ¿cuál de las cajas da la mayor probabilidad de elegir una canica azul? Justifique su respuesta.
A. La caja A **B.** La caja B **C.** Cualquiera de las dos cajas.

Prueba Diagnóstica 2- ítem 4 (PD2-4)

4. Se lanza un dado de seis caras que tiene tres de sus caras marcadas con un punto, dos caras marcadas con "X" y una cara marcada con dos puntos, la cara que es más probable salga es:

A.

B.

C.

D.
Todas tienen la misma probabilidad de salir

Cuestionario evaluativo 3- ítem E (CE3-E)

E. Marque con "X" el grado de probabilidad a cada uno de los siguientes eventos. Justifique

Evento	**Grado de Probabilidad**			**Justificación**
	Imposible	**Probable**	**Seguro**	
Obtener un número par				
Obtener un número mayor a 100				
Obtener un número menor a 200				
Obtener un número terminado en cero y mayor a 40.				

Preestructural

P1. Asume que la probabilidad de ocurrencia de un evento entre diferentes experimentos es igual teniendo presente un argumento físico.

Porque si se revuelve vigorosamente cualquiera de las dos cajas tiene la probabilidad de sacar una canica azul. (PD1-2-E19)

P2. Asume equiprobabilidad en el espacio muestral del experimento, sin tener en cuenta la información dada en la situación.

"Todos porque el dado sólo tiene 6 lados y los dados tienen la misma probabilidad
(Punto) 2/6 = 0.33 (Dos puntos) 2/6 = 0.33 (Equis) 2/6 = 0.33" (PD2-4-E21)

P3. Asume imposible un evento seguro

"Es imposible obtener un número menor a 200 porque el jugador tendría que hacer dos giros". (CE3-E3-E11)

P4. Asume probable un evento seguro

"Es probable obtener un número par porque la probabilidad no es muy alta". (CE3-E3-E11)

P5. Considera probable un evento imposible

"Puede ser probable pero como puede caer en 100 como no puede caer". (CE3-E2-E16)

Uniestructural

U1. Asume que el experimento en el que hay mayor cantidad de objetos, incrementa las probabilidades de ocurrencia de un evento y cambian las proporciones de base que definen la asignación de probabilidades.

"B; porque la cantidad de canicas azules es menor a la de la caja A". (PD1-2-E17)

U2. Asume que el experimento en el que hay menor cantidad de objetos aumentan las probabilidades

"Yo creo que en la A porque hay menos canicas y va a quedar más posibilidad de encontrarla".(PD1-2-E4)

U3. En diferentes experimentos que conservan la relación de orden de los cardinales de los eventos, asume igualmente probable la ocurrencia de ellos. (PD1-2-E42)

"Pues pienso que en las dos cajas porque hay muy pocas canicas del otro color y probablemente se pude sacar una azul". (PD1-2-E8)

U4. Identifica el evento más probable como el de mayor repetición en el espacio muestral.

"La A porque tiene más caras en el lado y puede salir más veces que las otras".(PD2-4-E17)

Multiestructural

M1. Identifica las frecuencias relativa y absoluta tanto del espacio muestral como del evento analizado, teniendo dificultad en la comparación de la frecuencia absoluta del evento ante a un valor establecido (Relación de orden) (PD3-2A-E13) (PD3-2A-E25)

*261*36.4/100 =95*
Falsa porque acudieron más de 130 visitantes los correctos fueron 95.009 (PD3-2A-E13)

M2. Determina el experimento con mayor probabilidad de ocurrencia a través la comparación entre la diferencia de los cardinales de los eventos.

"Porque e la caja A hay solo dos bolas de diferencia; en cambio en la B hay 20 canicas de diferencia; entonces no tendría casi oportunidad".(PD1-2-E14)

M3. Reconoce la proporción de los eventos en diferentes experimentos.

"Cualquiera de las cajas porque es la misma probabilidad de 4 a 6 que de 60 a 40 tienen como la misma probabilidad de sacar roja o azul".(PD1-2-E13)

M4. Al establecer el evento con mayor probabilidad de ocurrencia en dos experimentos, plantea una razón entre los cardinales de dos eventos para estos experimentos

"6/4=1.5% 60/40=15% Hay más probabilidad de sacar la canica azul en la B; porque en ella existe un 15% mientras que en la A sólo existe un 1.5% de probabilidad".(PD1-2-E30)

M5. En diferentes experimentos, un evento es igualmente probable cuando se conserva la proporción entre los cardinales de los eventos

"Cualquiera de las dos; ya que si en la caja A hay 6 y 4; en la B se dobla la cantidad de cada una las probabilidades son las mismas".(PD1-2-E43)

Relacional

R1. Aplica la fórmula de Laplace para establecer el grado de probabilidad de un evento en diferentes experimentos aleatorios y los compara en diferentes representaciones (fracción, decimal, porcentaje). (PD1-2-E11).

"Cualquiera de las dos; teniendo en cuenta el porcentaje da igual porque
*A: 6/10 = 0.6 * 100% = 60% B: 60/100=0.6*100%=60%".* (PD1-2-E11).

R2. Identifica el evento más probable calculando su probabilidad por medio de una regla de tres .(PD2-4-E18) o mediante la Ley de Laplace (PD2-4-E8) (PD2-4-E48)

"La cara más probable es la A porque
6 - 100
3 - x
300/6 = 50%"(PD2-4-E18)

"La cara más probable es la A porque
3/6 =0.5 2/6=0.3 1/6=0.1
Yo pensaría que es esta porque de 6 posibilidades me da un 0.5%"(PD2-4-E8)

R3. Establece el grado de probabilidad de diferentes eventos comparando los elementos del espacio muestral con la descripción del evento. (CE3-E-E8)

Evento	Grado de Probabilidad			Justificación
	Imposible	Probable	Seguro	
Obtener un número par			*X*	*Porque los números que tiene la rueda terminan en cero*
Obtener un número mayor a 100	*X*			*Porque la rueda no tiene números mayores a 100*
Obtener un número menor a 200			*X*	*Porque todos los números son menores que 200*
Obtener un número terminado en cero y mayor a 40.		*X*		*Los otros números tienen un 60% de aparecer en un giro*

Comparación de Probabilidades en experimentos compuestos

Prueba Diagnóstica 3- ítem 1 (PD3-1)

1. Para determinar a cuál de sus tres hijos le va a prestar el carro el día siguiente, el padre decide hacer un sorteo lanzando dos monedas a la vez. Si las dos monedas cae cara se lo presta a Jerónimo, si dos monedas cae sello se lo presta a Santiago; y si una moneda cae cara y la otra sello se lo presta a Jacobo. Según el sorteo descrito anteriormente:

e) Jerónimo tiene más probabilidad de salir en carro
f) Santiago tiene más probabilidad de salir en carro
g) Jacobo tiene más probabilidad de salir en carro
h) Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro. Justifique

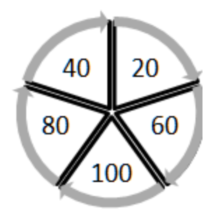
Cuestionario evaluativo 2- ítem E (CE2-E)

E. Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Es imposible obtener 2 premios	Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.

Cuestionario evaluativo 4- ítem B (CE4-1B)

Juego la Rueda. El juego está compuesto por una rueda dividida en partes iguales, tal como lo muestra la siguiente gráfica. El jugador gana un premio si obtiene el número 100 al girar la rueda una vez. Cuándo el jugador no obtiene el número 100 al girar la rueda por primera vez, tiene la oportunidad de girar la rueda por segunda vez. Si la suma de los puntos obtenidos en ambas oportunidades es un número mayor que 100, queda inmediatamente eliminado del juego.



Recuerde: Si el jugador obtiene en la primera oportunidad el número 100, no tiene que girar de nuevo la rueda.

1B.

¿Qué valor o valores de la suma son más probables? ¿Por qué?	
¿Qué valor o valores de la suma son menos probables? ¿Por qué?	
¿Qué es más probable: que la suma sea 80 o que la suma sea 100? ¿Por qué?	

Preestructural

P1. Compara el grado de probabilidad del evento teniendo en cuenta los puntos muestrales de un experimento simple

"Los tres hermanos tienen la misma probabilidad ya que en cualquier lanzamiento caerá cualquiera de los dos (cara o sello)".(PD3-1-E2)

P2. Considera que no es posible establecer el valor de probabilidad del evento debido a la aleatoriedad del experimento.

"Si porque no es posible determinar cuál cara de la moneda caerá".(PD3-1-E18)

P3. Asume equiprobabilidad en los eventos del experimento, sin tener en cuenta el espacio muestral.

"porque los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro ya que cada uno tiene dos oportunidades".(PD3-1-E40)

P4. Argumenta su respuesta con creencias personales, desconociendo la información de la situación

"los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en el carro porque son dos monedas; dos caras por moneda; y el lanzamiento será a la misma fuerza y velocidad".(PD3-1-E25)

P5. Realiza una comparación basada en argumentos físicos concediéndole un carácter determinístico a un experimento aleatorio

"Pienso que los números 40 y 60 porque depende de la fuerza del jugador y son los números que yo pienso"(CE4-1B1-E13)

P6. Lista algunos puntos muestrales del experimento (combinaciones) pero no evalúa su grado de probabilidad

"20+40 20+80 20+60" (CE4-1B1-E5)

P7. Considera el experimento como simple, asume equiprobable los eventos. (CE4-1B1-E4) (CE4-1B1-E1)

"Todos porque está conformada por cinco partes iguales con el mismo porcentaje"(CE4-1B1-E4)

P8. Argumenta su respuesta con creencias personales

"Me parece que el 20+40 porque es el más probable"(CE4-1B1-E7)

P9. Asigna valores de probabilidad, atendiendo al valor numérico del evento, sin tener en cuenta el número de casos favorables.

"El 160,180 y 120 porque son mayores entonces la probabilidad de estos tres casos es menor" (CE4-1B2-E14)

Uniestructural

U1. Lista algunos resultados del experimento y asume equiprobabilidad en ellos.

"Los tres hermanos tienen la misma probabilidad de salir en carro o sea que puede salir 2 caras o 2 sellos o cara y sello" (PD3-1-E17)

U2. Establece el grado de probabilidad de un evento compuesto a través de la experimentación

"haciendo 5 lanzamientos consecutivos 3 veces consecutivas me salieron cara y sello" (PD3-1-E48)

U3. Considera más fácil obtener secuencias sin repetición pero no cuantifica su probabilidad, de tal manera que un punto muestral que resulta de la combinación de diferentes elementos es más probable que un punto muestral compuesto por elementos iguales

"Jacobo tiene más probabilidad de salir porque es más fácil que salga cara y sello" (PD3-1-E13)

U4. Considera el punto muestral cuya combinación se compone de resultados diferentes como el más probable. (PD3-1-E7) (PD3-1-E23)

c) porque el resultado es más aleatorio (PD3-1-E7)

U5. Asigna menor valor de probabilidad al elemento del espacio muestral que poseen los mismo elementos.

"80+80=160 40+40=80 20+20=40 60+60=120
Porque es menos probable que la rueda quede en el mismo número" (CE4-1B2-E15)

U6. Establece la veracidad de enunciados probabilísticos a partir de una distribución de probabilidad que presenta valores incorrectos de probabilidad

Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

Obtener 0 premios es más fácil que obtener 1 Productos	En este juego lo menos posible es obtener 1 premio
Verdadero: La gráfica nos muestra que es más fácil obtener 0 a 1 productos	*Falso: Porque al hallar la gráfica lo menos posible es obtener tres puntos*
Es imposible obtener 2 premios	*Es menos probable obtener 3 premios que obtener 1 premio.*
Falso: porque en la gráfica nos muestra que es posible obtener dos puntos	*Verdadero: porque en la gráfica nos enseña que es más probable obtener un punto que tres*

(CE2-E-E1)

U7. A partir de un listado incompleto de los puntos muestrales del experimento, establece el grado de probabilidad del evento teniendo en cuenta el número de veces que se presenta el experimento.

¿Qué valor o valores de la suma son más probables? ¿Por qué?	*Pues el más probable es el 100; porque si se suma el 80 y el 20 dan 100; si se suma el 60 y el 40 dan 100 y el 100 solo o sea tiene tres probables opciones. En cambio*
¿Qué valor o valores de la suma son menos probables? ¿Por qué?	*Los otros tienen 2 o 1 pues los menos probables serían el 160 y el 180 por la suma de los dos giros y porque solo hay una probabilidad para cada uno*
¿Qué es más probable: que la suma sea 80 o que la suma sea 100? ¿Por qué?	*Pues la suma más probable sería 100 por la suma de los dos giros y porque tiene más opciones que el 80*

(CE4-1B-E10)

Multiestructural

M1. Establece el número de casos favorables de los resultados del experimento y a partir de estos compara probabilidades (puntos muestrales).

"Santiago tiene más probabilidad ya que si se lanzan las monedas pueden caer cara y sello dos veces; cara-cara una vez y sello-sello una vez; la probabilidad de Santiago es de 2 / 4 =0.5%" (PD3-1-E33)

Convergencia Estocástica

Prueba Diagnóstica 3- ítem 4 (PD3-4)

4.Se lanza una caja de fósforos, esta puede caer en cualquiera de las posiciones de la figura

Un estudiante realiza este experimento con diferentes números de lanzamientos obteniendo los siguientes resultados.

	Lanzamientos				
Posición	10	20	50	100	500
1	3	8	22	55	330
2	4	6	12	20	100
3	3	6	16	25	70

A partir de la información anterior se puede concluir que:

a) Más de la mitad de las posiciones de caída corresponda a las posiciones 2 o 3
b) Las tres posiciones tengan aproximadamente la misma probabilidad entre ellas
c) Más de la mitad de todas las posiciones de caída corresponda a la posición 1
d) El número de veces que cae la caja en la posición 2 se aproxime al 50%

Justifique la respuesta

Cuestionario evaluativo 1- ítem F (CE1-F)

F. ¿Considera que el resultado obtenido por el televidente fanático es confiable? ¿Por qué?

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2C (CE4-2C)

Un televidente ha decidido llevar el registro de los resultados en varios juegos a través de la siguiente tabla. Por ejemplo: De 10 juegos vistos, en 6 de ellos el concursante no coincidió con alguna cifra, en tres de los 10 juegos coincidió en una cifra, mientras que en un juego el concursante adivinó las dos cifras del juego.

	Número de Juegos										
Cifras Coinciden	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**200**
0	60.00%	60.00%	46.67%	45.00%	42.00%	46.67%	42.86%	46.25%	47.78%	46.00%	42.50%
1	40.00%	30.00%	43.33%	45.00%	48.00%	43.33%	48.57%	43.75%	42.22%	45.00%	45.50%
2	0.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	8.57%	10.00%	10.00%	9.00%	12.00%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

	Número de Juegos										
Cifras Coinciden	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**	**1000**	**2000**	**5000**	**20000**
0	45.33%	42.75%	43.20%	43.00%	42.71%	43.38%	43.78%	43.50%	43.15%	44.60%	44.60%
1	43.33%	46.25%	45.80%	46.33%	46.29%	45.00%	44.33%	44.50%	44.70%	43.50%	43.83%
2	11.33%	11.00%	11.00%	10.67%	11.00%	11.63%	11.89%	12.00%	12.15%	11.90%	11.58%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

2C A partir de la información suministrada Establezca si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. Justifique

2C1 Es imposible que un jugador gane el premio	**2C2** Es más probable que el jugador no acierta en alguna cifra.

2C3 El jugador tiene casi la misma probabilidad de acertar una cifra como de no coincidir cifra alguna.	**2C4** Más del 60% de las veces, el jugador acierta en una cifra.

Cuestionario evaluativo 4- ítem 2D (CE4-2D)
2D A partir de la siguiente información indique cual podría ser el número suficiente de programas que debería ver el fanático para obtener una estimación razonable de la probabilidad de los diferentes resultados del juego

Preestructural

P1. Asume el valor numérico del evento como un elemento más de la frecuencia absoluta del mismo.

1+3+8+22+55+330=419
Porque al lanzarse es más probable que caiga en la posición 1 (PD3-4-E5)

P2. Da respuesta acorde a lo que el estudiante cree más probable del experimento, sin tener en cuenta los resultados del experimento en las diferentes corridas.

Más de la mitad caerá en la posición 1 porque al caer va a ser más difícil (PD3-4-E25)

P3. Establece la confiabilidad de los valores de una distribución de probabilidad basado en opinión personal

Yo creo que no es confiable porque no sabemos si estuvo todo el tiempo pendiente del juego (CE1-F-E11)

P4. Establece un tamaño propuesto de corrida sustentándolo a partir de una creencia personal (CE4-2D-E13), sin observar los valores de la tabla (CE4-2D-E10)

Por hay una 10 veces ver los juegos para entenderlos y memorizarlos y aprender cómo jugarlo calmadamente (CE4-2D-E13)

Pues para mí sería 50 por la totalidad que tiene cada uno (CE4-2D-E10)

Uniestructural

U1. Intenta calcular la frecuencia relativa de uno de los eventos utilizando la información proveniente de las corridas de menor tamaño

c) Porque:
*3/10=0.3*10=30% 20/8=2.5*100=25% 50/22=2.72*100=27%*
En su totalidad da la mayoría de caídas es de la 1 (PD3-4-E39)

U2. Plantea conclusiones con la lectura de frecuencias de la corrida más pequeña del experimento

b) Yo pienso que entre 1 y 3 hay un mismo resultado que es (3) (PD3-4-E34)

U3. Consolida las frecuencias absolutas de las corridas para cada resultado del experimento restando a la frecuencia mayor las otras.

c) porque le resto
330-55-22-8-3=242 100-10-12-6-4=58 70-25-16-6-3=20 La más probable es la c (PD3-4-E41)

U4. Realiza una lectura de las frecuencias relativas de la tabla, pero no compara dicho valor con el enfoque clásico para establecer un grado de confiabilidad

Porque un fanático es fanático y eso nos dice que el fanático nos dio una probabilidad que de cada 42 juegos sólo ganan un 2.38% que adivinan el juego (CE1-F-E8)

U5. Reconoce que la frecuencia del evento es la obtenida en la corrida de mayor tamaño, pero se muestra dificultad en la comprensión de enunciados probabilísticos.

44.60% *Si es posible porque si hace esos 20000 giros y dan los 100 sumas*
43.83% *sumas si no tiene o tiene 1 o 2*
11.58%
100.01% (CE4-2C1-E10)

Multiestructural

M1. Consolida las frecuencias absolutas de los eventos, para las diferentes corridas, y asume un valor aproximada de las frecuencias relativas.

680 Lanzamientos
P1: 418 50% P2: 142 25% P3: 120 25% 680 100% (PD3-4-E24)

M2. Establece un rango del tamaño de la corrida del experimento, a partir de la lectura de las tablas, observando la estabilización de las frecuencias relativas.

El número suficiente para que tengan un razonable acercamiento sería entre 400-700 porque el 400 *tiene 42.75% y el 700 tiene 42.71% o también entre 800-900 porque 800=43.38 y 900=43.78% y los otros también se acercan mucho* (CE4-2D-E3)

Relacional

R1. Toma los resultados del ensayo más grande y concluye correctamente.

g) Más de la mitad de todas las posiciones de caída corresponda a la posición 1

Porque la posición 1 en los lanzamientos fue mucha, porque en 500 lanzamientos fueron 330 los que estarán en la Posición 1

(PD3-4-E35)

2C1 Es imposible que un jugador gane el premio

Si es posible pero es muy difícil porque en 20000 juegos sólo un 11.58% ganaron el juego (CE4 2C1-E8)

R2. Realiza una estimación del tamaño de corrida bajo la cual se empiezan a estabilizar los porcentajes

*Yo creo que solo 30 pues como podemos ver en la tabla los resultados de 30 y 20000 no son tan distintos (*CE4-2D-E8)