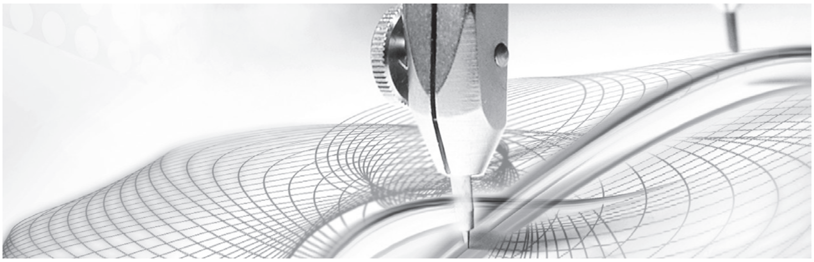
ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

CARMEN SAMPER
ÓSCAR MOLINA
ARMANDO ECHEVERRY

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores



ELEMENTOS
DE GEOMETRÍA

CARMEN SAMPER
ÓSCAR MOLINA
ARMANDO ECHEVERRY

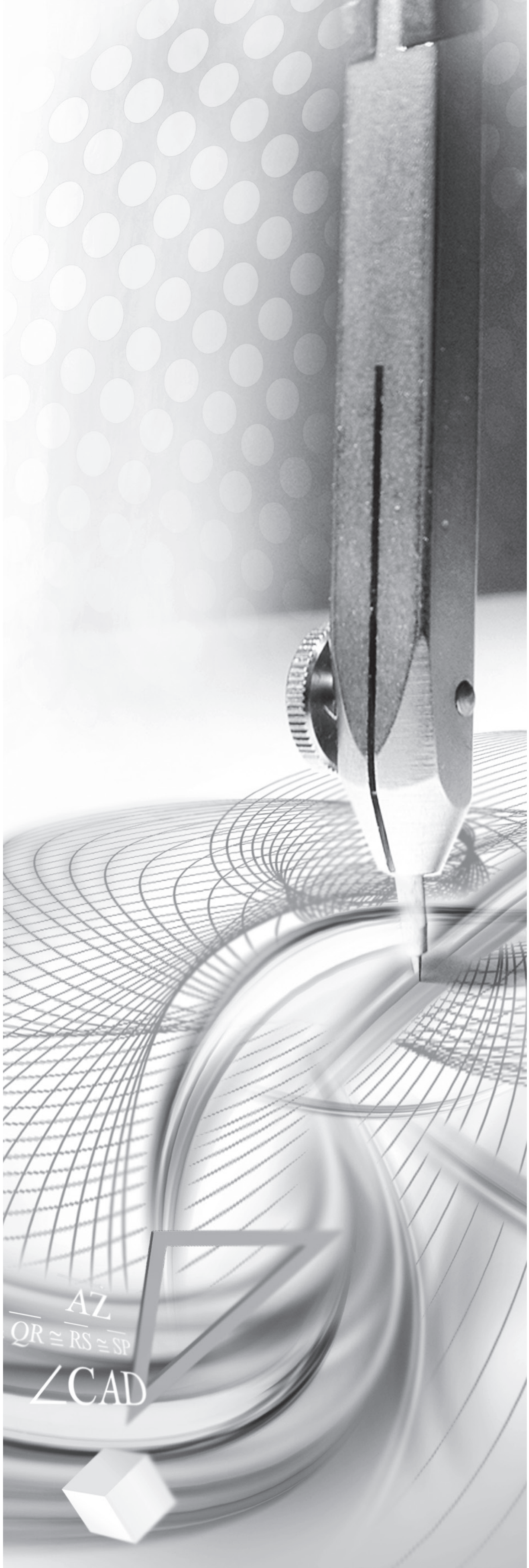
Catalogación en la fuente
Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, Carmen
Elementos de Geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría (AE, G) / Carmen Samper, Óscar Molina, Armando Echeverry. – 2ª. ed. -- Bogotá : Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Departamento de Matemáticas, 2013
112 p. : figuras

Incluye bibliografía y anexos
ISBN : 978-958-8650-46-3

Geometría – Aprendizaje. 2. Geometría - Enseñanza Formación Profesional de Maestros 4. Geometría – Aparatos e instrumentos I. Echeverry, Armando II. Molina, Óscar. III. Tít.

516.1 cd. 21 ed.



ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

CARMEN SAMPER

ÓSCAR MOLINA

ARMANDO ECHEVERRY

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA *(Æ . G)*

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

Universidad Pedagógica Nacional

Juan Carlos Orozco Cruz
Rector

Edgar Alberto Mendoza Parada
Vicerrector Académico

Víctor Manuel Rodríguez Sarmiento
Vicerrector de Gestión Universitaria

© Universidad Pedagógica Nacional
© Carmen Samper
© Óscar Molina
© Armando Echeverry

ISBN: 978-958-8650-46-3

Segunda edición, 2013

Preparación Editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Fondo Editorial

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Alba Lucía Bernal Cerquera
Editora

Mauricio Esteban Suárez Barrera
Diseño y diagramación

Impresión Xpress Estudio Gráfico y Digital
Bogotá, Colombia, 2013

Esta publicación puede ser distribuida, copiada y exhibida por terceros si se muestra en los créditos. No se puede obtener ningún beneficio comercial. No se pueden realizar obras derivadas.

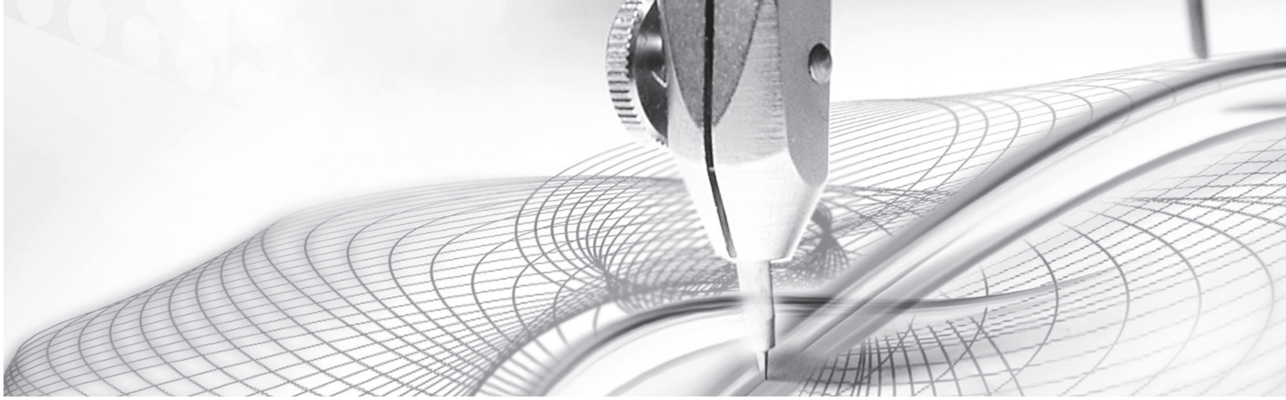


Tabla de contenido

Introducción

El curso Elementos de Geometría ha sido concebido para los estudiantes que inician su formación en la geometría en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). El curso pretende complementar la formación secundaria ampliando la visión del conocimiento geométrico y llenando posibles vacíos conceptuales, con el propósito de preparar a los alumnos para acceder significativamente al estudio formal de la geometría euclidiana en un curso posterior. No se busca construir un sistema axiomático deductivo formal, sino proporcionar, en un ambiente activo y constructivo, las herramientas necesarias para la formación de nociones y conceptos, para el establecimiento de propiedades geométricas a partir de la exploración, y para el uso efectivo de métodos y técnicas geométricas. Sin perder de vista que en cursos posteriores se pretende que los estudiantes adquieran un conocimiento formal de la geometría, en el curso Elementos de Geometría se combina la rigurosidad del lenguaje geométrico con un acercamiento informal que invita a los alumnos a hacer conjeturas basados en la exploración de situaciones especialmente diseñadas y a dar justificaciones de estas, de manera intuitiva, propiciando el desarrollo de las habilidades de razonamiento que son indispensables en el estudio de la matemática avanzada.

Además, reconociendo la importancia del uso de herramientas de mediación en el proceso de aprender a visualizar matemáticamente figuras, explorar situaciones geométricas, formular conjeturas y construir argumentos que justifiquen ideas, en el curso se introducen dos instrumentos cuyo uso propicia ese aprendizaje: regla y compás y la geometría dinámica. Para lograr este propósito se requiere desarrollar destreza en el uso de estos instrumentos. En el caso de la geometría dinámica esto no solo significa aprender a manipular el programa mismo, sino también saber interpretar la información de la representación que este proporciona. Un ambiente de geometría dinámica como Cabri permite llevar a cabo actividad matemática en tiempo real que se convierte en fuente de ideas matemáticas, argumentos y conjeturas, favoreciendo que los estudiantes participen legítimamente y como comunidad en la construcción de conocimiento.

Para apoyar el desarrollo de un curso que tenga las características anteriormente mencionadas, se vio la necesidad de escribir un texto. Este texto se constituye en una propuesta didáctica que acoge planteamientos de la comunidad de educadores matemáticos según los cuales el aprendizaje de conceptos, relaciones y demás aspectos geométricos está ligado a las nociones y experiencias matemáticas de quien aprende. Presenta una vía de acceso al conocimiento geométrico formal que difiere de lo usual porque no es un desarrollo secuencial de temáticas, sino la presentación de actividades en torno a conceptos, relaciones y acciones geométricas en pro del desarrollo de habilidades matemáticas como la visualización, la comunicación, la conceptualización, la exploración, la generalización y la deducción.

En el primer capítulo el núcleo es la visualización y el propósito es desarrollar la capacidad de desconfigurar y reconfigurar figuras, interpretar y reconocer la validez de la información que provee una imagen en geometría dinámica o en lápiz y papel. Las actividades del segundo capítulo tienen dos objetivos. El primero es favorecer la asimilación de un lenguaje geométrico común a partir de la construcción y análisis de definiciones. El segundo, es introducir unos diagramas, como herramienta didáctica con la cual se busca proveer los elementos para identificar el estatus teórico de una proposición en un sistema axiomático y comprender su uso en un proceso deductivo. En el tercer capítulo se introducen las construcciones con regla y compás como herramienta, al igual que la geometría dinámica, para la representación y exploración de situaciones geométricas. A la vez, se introduce el concepto de semejanza. El cuarto capítulo se centra en el proceso de formulación de conjeturas a partir de procesos inductivos. En el quinto capítulo se enfatiza en la deducción informal en torno a la semejanza y congruencia de triángulos. Se escogieron estas dos relaciones dado que son temáticas centrales de la geometría euclidiana. Finalmente, el sexto capítulo se dedica primordialmente a la conceptualización, específicamente de transformaciones geométricas usando como pretexto las teselas del plano. Se escogió esta temática porque no está incluido en el currículo de otros cursos de la licenciatura, siendo tema de la matemática escolar.

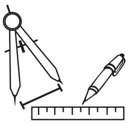
Cabe resaltar que la argumentación es una actividad matemática trasversal a lo largo del texto. Como se enfatizó en la descripción del curso, la deducción se hace en el marco de sistemas axiomáticos locales, referidos a un núcleo conceptual, en los cuales algunas de las proposiciones que se incluyen se aceptan como verdaderas, sin distinguir si corresponden a postulados o teoremas de un sistema axiomático para la geometría euclidiana. Ellas se denominan hechos geométricos. Todo esto con el propósito de usar en procesos deductivos las definiciones establecidas.

Este libro está basado en el texto titulado *Elementos de Geometría*: una introducción, escrito por Cecilia Leguizamón, Carmen Samper, Leonor Camargo y Alberto Donado profesores de la Universidad Pedagógica Nacional. Con anuencia de los autores del texto original, en este libro solo aparecen como autores los profesores que participaron en su reforma.

La modificación del texto original fue necesaria por varias razones: la introducción del uso de la geometría dinámica en el curso, lo cual implica una transformación de la dinámica y del contenido temático que se trata; la inclusión de contenidos geométricos cuyo tratamiento es indispensable en la formación inicial de profesores y que no son abordados en otros espacios académicos de la licenciatura; la supresión de temáticas que están incluidas en otros cursos; y la introducción de diagramas que apoyan el proceso de razonamiento deductivo.

La metodología para el curso, que propicia el uso de este texto, gira en torno a la resolución de problemas, medio para que los estudiantes descubran, conjeturen y produzcan justificaciones informales. Los estudiantes trabajan generalmente en grupos pequeños para favorecer la interacción. Luego, a través de la conversación entre profesor y alumnos se exponen ante la comunidad del aula, las ideas que estos últimos tienen se formulan y responden preguntas, se rechazan o aceptan conjeturas, y se establecen definiciones, ganando así cierta familiaridad y comprensión de los objetos geométricos estudiados. Es así que se logra la construcción social de conocimiento. El papel del profesor es propiciar este tipo de intercambio, guiar su curso para culminar en la construcción de conceptos, relaciones y argumentos matemáticamente correctos.

En el texto, se demarca con íconos algunas de las actividades, según la siguiente convención:



Actividades que se deben realizar con regla y compás

[1] Actividades que se deben realizar con geometría dinámica

1 El uso del logosímbolo del *software* Cabri ha sido autorizado.

Capítulo 1

Visualización

La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento.

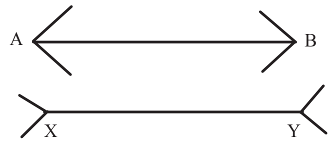
Zimmermann y Cunningham

No todo lo que se ve es. La evidencia perceptiva no es suficiente para el conocimiento de muchas propiedades de los objetos geométricos. Visualizar en matemáticas es utilizar las imágenes para desentrañar propiedades o relaciones entre figuras. La visualización provee información que se convierte en base para el desarrollo del razonamiento.

La primera parte de este capítulo muestra que pueden existir dificultades en la percepción de imágenes, ya que los sentidos a veces engañan. La segunda parte busca ayudar a discernir entre lo que, por acuerdo previo, puede asumirse como cierto en un dibujo y lo que no, ya sea que este se represente en papel o con geometría dinámica. Finalmente, se quiere mostrar, por medio de algunos problemas, cómo la visualización es una herramienta importante en su solución de estos.

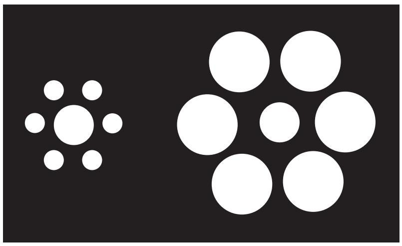
1.1 Observar y comprobar

1. En el siguiente gráfico, determine a simple vista, cuál de los segmentos es más corto.

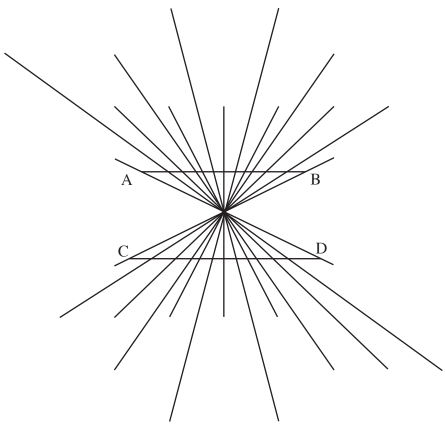


Mediante medición directa, determine si su apreciación es correcta.

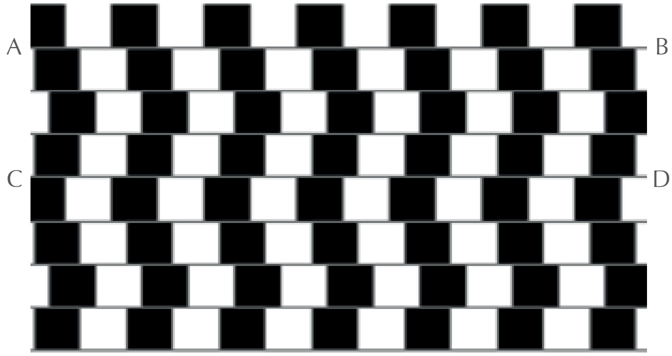
2. Como en el ejercicio anterior, compare, a simple vista, el tamaño de los círculos centrales. Después de realizar la medición, escriba una conclusión.



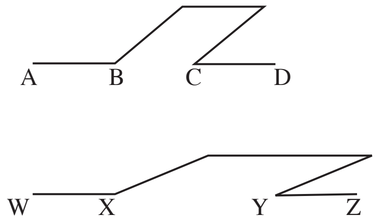
3. Al examinar la siguiente figura, ¿puede garantizar que la línea que une *A* con *B* es recta? ¿Ocurre lo mismo con los puntos *C* y *D*? Compruebe su respuesta empleando una regla.



4. ¿Puede garantizar que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos? Describa cómo verificó su apreciación.



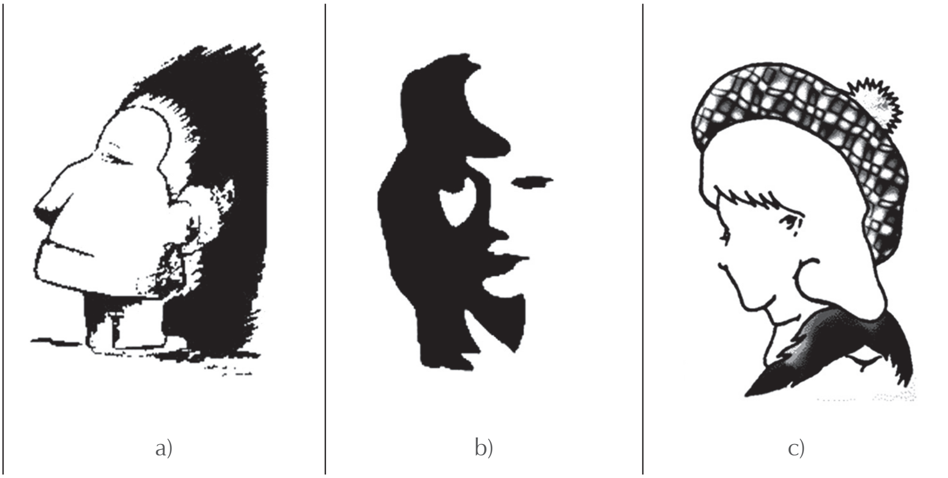
5. ¿La observación de la figura le permite decidir si el $\overline{CD}$ y el $\overline{AB}$ están en la misma recta? ¿Qué sucede con el $\overline{YZ}$ y el $\overline{WX}$? Compruebe su respuesta.



6. Escriba una conclusión acerca de lo percibido y lo comprobado en los problemas anteriores.

1.2 ¿Qué ve en la figura?

Observe cada una de las figuras. Describa lo que ve en ellas.



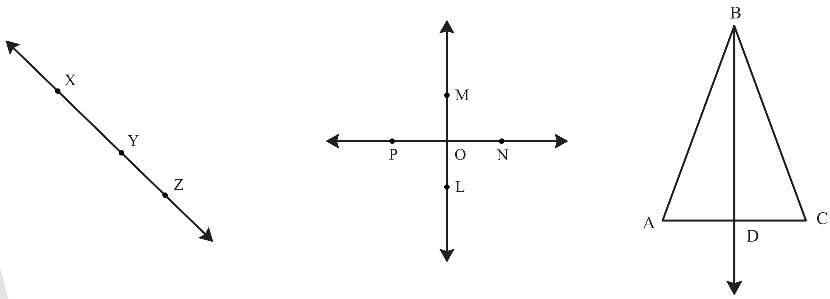
a) b) c)

Una habilidad importante para el trabajo en geometría es poder desconfigurar y reconfigurar una figura. Esto significa poder atenuar mentalmente partes de una figura y destacar otras para "ver" en ella figuras distintas.

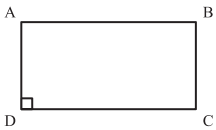
1.3 ¿Qué de lo observado es cierto?

Cuando se trabaja en geometría, se debe tener cuidado al obtener conclusiones basadas tan solo en la observación de la figura.

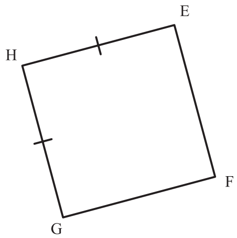
1. Para cada una de las figuras que se presentan a continuación, escriba afirmaciones de las que puede estar seguro son ciertas.



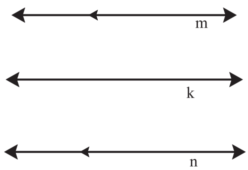
a) b) c)



d)

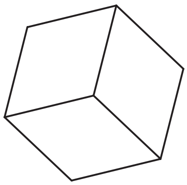


e)

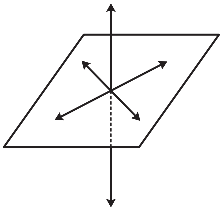


f)

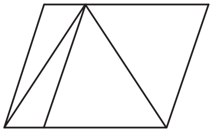
2. ¿Qué representa cada una de las siguientes figuras?



a)



b)



c)

3. El uso de la geometría dinámica permite realizar la exploración de figuras para determinar sus propiedades. Con el siguiente ejercicio se busca que los estudiantes aprendan a usar el programa para hacer construcciones y realizar la exploración de figuras. En la calculadora abra el archivo *arcao.* Determine las propiedades de la figura representada, con el propósito de reconstruirla.

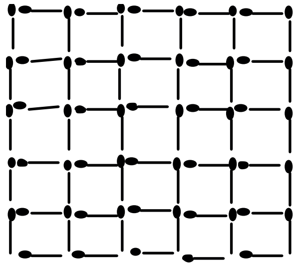
1.4 Observar para resolver

El uso de representaciones gráficas es una herramienta que apoya el proceso de resolución de diferentes tipos de situaciones. Los problemas que siguen son ejemplos de aquellas situaciones:

1. Se quiere construir una caja con tapa cuyas dimensiones son 3 cm de ancho, 4 cm de largo y 10 cm de alto, cortando los rectángulos corres-

pondientes para luego unirlos por los bordes. Si se va a usar una pieza rectangular de cartón, ¿cuál es el tamaño de ésta más pequeño que se puede usar y cuánto material se desperdicia?

2. La figura muestra un arreglo cuadrado de fósforos, organizados en celdas de tamaño 1×1. Determine el número de fósforos necesarios para formar un arreglo cuadrado cuyo lado está formado por 5 fósforos. Repita el ejercicio para un arreglo cuadrado cuyo lado está formado por 7 fósforos. Explique su razonamiento.



¿Cuántos fósforos se necesitan para formar un arreglo cuadrado de lado *n* fósforos? Explique cómo llegó a su respuesta. ¿Existe otra forma de resolver el problema?

3. Un proveedor para la industria de la construcción debe suministrar a su clientela tubos de PVC de determinadas longitudes; los fabricantes los venden de longitudes fijas y él debe cortarlos para satisfacer las condiciones exigidas en los pedidos de sus clientes, procurando, a la vez, que el desperdicio sea el menor posible.

a. Si los tubos que suministra el fabricante tienen 10 metros de longitud, determine cuántos de ellos se requieren y cómo deben cortarse para dar cumplimiento al siguiente pedido, buscando el menor desperdicio posible.

- 60 tubos de 3 metros de longitud
- 49 tubos de 4 metros de longitud
- 12 tubos de 7 metros de longitud

b. Resuelva el mismo problema si la longitud de los tubos que suministra el fabricante es de 12 metros.

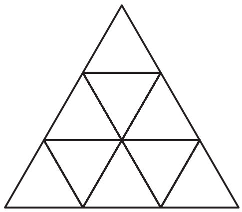
4. Un periódico, cuyas páginas tienen 54 centímetros de longitud útil, se edita a 6 columnas. Este recibe la siguiente solicitud para publicar avisos limitados.

- 8 avisos 6 cm a 1 columna 2 avisos 6 cm a 2 columnas
- 5 avisos 9 cm a 1 columna 1 aviso 9 cm a 2 columnas
- 2 avisos 18 cm a 1 columna 1 aviso 18 cm a 2 columnas
- 1 aviso 12 cm a 3 columnas 1 aviso 27 cm a 3 columnas

¿Pueden ubicarse todos los avisos en el periódico usando solo una página?

Tareas complementarias

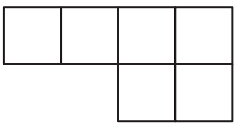
1. Considere la siguiente figura:



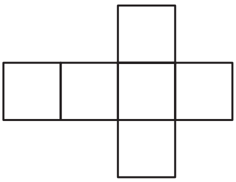
a. ¿Cuántos triángulos hay?

b. Si los lados de un triángulo se dividen en 4 partes iguales y se hace una construcción similar, ¿cuántos triángulos hay en la figura? Si los lados se dividen en 5 partes iguales, ¿cuántos triángulos hay?

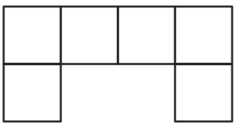
2. ¿Cuáles de las siguientes maquetas planas forman un cubo, al doblar por los segmentos?



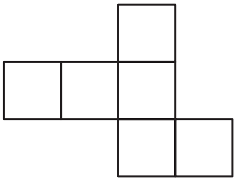
a)



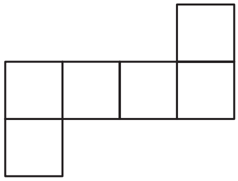
b)



c)



d)



e)

3. Represente diferentes formas de dividir un cuadrado en cuatro partes congruentes.

4. Una situación que se presenta en la industria es la de cortar láminas de metal de determinadas dimensiones, a partir de láminas de dimensiones fijas, buscando el menor desperdicio posible.

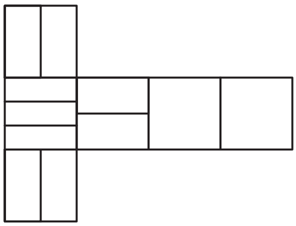
a. Si las láminas que suministra el fabricante son cuadradas de 10 metros de lado, determine cuántas y cómo deben cortarse para venderlas de acuerdo con el siguiente pedido, procurando el menor desperdicio posible.

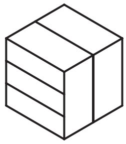
- 60 láminas de 3m x 1m
- 49 láminas de 4m x 2m
- 12 láminas de 7m x 5m

b. Resuelva el mismo problema si las láminas se suministran con dimensiones de 12m x 5m.

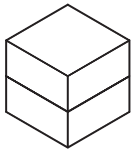
5. En los siguientes diagramas, la figura de la izquierda representa un cubo desarmado. Cuando esta figura se arma, ¿cuáles de las figuras de la derecha le corresponden?

a.

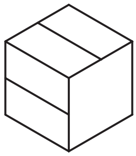




i.

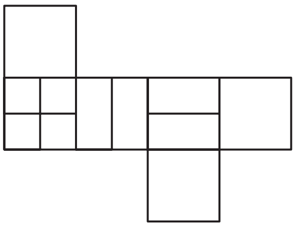


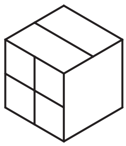
iii.



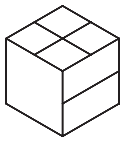
ii.

b.

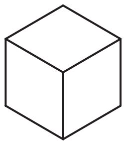




i.



iii.



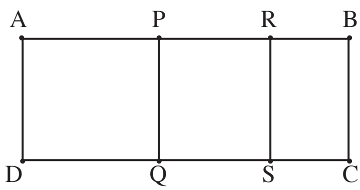
ii.

6. Describa todas las posibles figuras planas que resultan de hacer cortes de un cubo con un plano.

Nota histórica

La matemática surgió inicialmente como necesidad del hombre de comunicar a otros, situaciones de su vida diaria o de describir el entorno que lo rodeaba. Posiblemente las nociones de número, magnitud y forma surgieron de la observación de diferencias y semejanzas de los objetos del medio. Debieron transcurrir miles de años para la formación de las ideas básicas de la matemática. Solo hasta cuando el hombre desarrolló una forma para consignar sus pensamientos se evidenció el avance en el conocimiento matemático. Por ejemplo, los dibujos y diseños del hombre neolítico, seguramente buscando armonía, revelan su comprensión de los conceptos de congruencia y simetría. Según Proclo, "... de acuerdo con numerosas versiones, la Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que ésta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada quien".

El apoyo visual es usado por grandes matemáticos como Euclides, quien demuestra varias propiedades numéricas haciendo uso de figuras. El segundo libro de los Elementos de Euclides tiene 14 proposiciones, con sus demostraciones, que hoy en día, debido al álgebra simbólica y a la trigonometría, se expresan y demuestran de formas muy diferentes. Por ejemplo, la demostración de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, la hace de una forma netamente visual, al interpretar el producto de dos números como el área de un rectángulo. La demostración se visualiza en el siguiente dibujo:



En él se ve que $AD(AP + PR + RB) = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$.

Grandes pensadores contemporáneos resaltan la importancia de la visualización. Por ejemplo, Albert Einstein en una carta dirigida a Hadamard en el año 1945, refiriéndose al proceso creativo escribió: "Las palabras o el lenguaje como son escritas o habladas no parecen jugar ningún papel en mi forma de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Estas combinaciones parecen ser la característica esencial en el pensamiento productivo, antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros".

Capítulo 2

Lenguaje y definiciones

La filosofía está escrita en ese gran libro -quiero decir el universo- el cual permanece continuamente abierto a nuestros sentidos, pero que no puede ser entendido a menos que se aprenda a comprender el lenguaje en el cual fue escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería humanamente imposible entender una simple palabra en él; sin esto, uno se encuentra en un laberinto oscuro.

Galileo Galilei (1623)

En geometría, así como en todas las ramas de la matemática, es importante tener una conceptualización amplia de los objetos con los cuales se trabaja. Un recurso para un acercamiento a los conceptos es el estudio de sus definiciones pues ellas proporcionan información valiosa que permite reconocer propiedades fundamentales del objeto en estudio y caracterizarlo para distinguirlo de otro. Por otra parte, la construcción de definiciones también ayuda a comprender el objeto definido. La evolución en el proceso de conceptualización se evidencia en la medida en que se avance de una enunciación de definiciones ambiguas hacia definiciones "bien" construidas que permitan identificar cuáles objetos la cumplen, cuáles no y el porqué.

Una definición bien elaborada utiliza términos claramente comprendidos, es concisa (se nombran solamente las características esenciales), es precisa (omite palabras superfluas), y expresa lo que es y no lo que no es un concepto.

En esta unidad se busca el acercamiento a conceptos geométricos a través del estudio de definiciones. Este estudio permitirá descubrir las características esenciales de objetos geométricos para describirlas en una definición. Se analizarán variadas definiciones para determinar si están bien elaboradas o si son equivalentes.

2.1 ¿Qué se interpreta?

1. Represente gráficamente el mensaje que obtiene de cada frase:
   a. El pollo está listo para comer.
   b. Le pegué a la niña con el libro.
   c. Encontré la silla rota en el desván.

2. Cuéntese de un señor que, por ignorancia o malicia, dejó al morir el siguiente testamento:

> "Dejo mis bienes a mi sobrino Juan no a mi hermano Luis tampoco jamás se pagará la cuenta del sastre nunca de ningún modo para los jesuitas todo lo dicho es mi deseo Fernando".

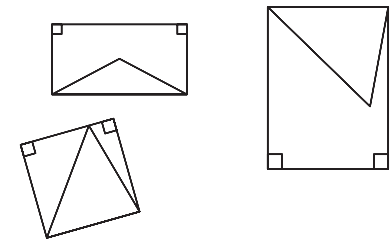
¿A quién dejó los bienes el difunto?

2.2 Descubrir características esenciales

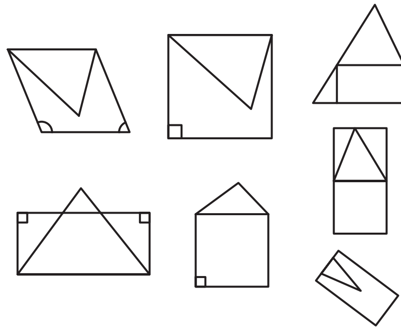
1. Inicialmente se ilustra lo que es y también lo que no es el objeto nombrado. Para cada caso,

a. Observe las figuras y encuentre las características esenciales del objeto representado.

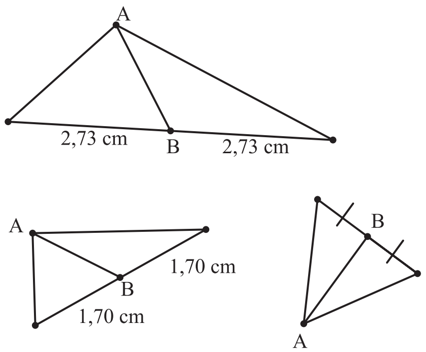
b. Una vez anotadas las propiedades del objeto solicite a una persona, que no sea estudiante de la licenciatura, que dibuje el objeto a partir de su descripción. Compare la figura resultante con la dada y transforme su descripción, si es necesario, para asegurar que la representación sea la figura definida.



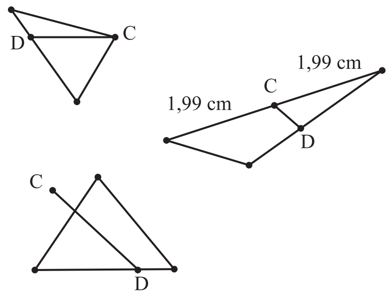
Son tonus



No son tonus



El segmento AB es una mediana



El segmento CD no es una mediana

2. Estudie las definiciones dadas a continuación.

Definición. Un **polígono convexo** es un polígono en el cual ningún segmento, cuyos extremos son dos vértices del polígono, tiene puntos en el exterior de este. (Ver ejercicio 5, página 38)

Definición. Un **bilacón** es un cuadrilátero con dos lados adyacentes congruentes.

a. Para cada definición, dibuje tres figuras que la cumplan y tres que no la cumplan.

b. En los ejemplos que no satisfacen la definición, indique qué condición de la definición deja de cumplirse.

2.3 ¿Cuál es la definición más adecuada?

1. Busque dos definiciones distintas en textos escolares o Internet para cada concepto.

a. ángulo.

b. arco de circunferencia.

2. Determine las diferencias y semejanzas entre las dos definiciones encontradas, en el numeral 1, para cada concepto.

3. A continuación se dan cuatro definiciones de segmento y tres de rayo. Escoja, en cada caso, la mejor definición. Para aquellas que rechace, explique, por medio de un dibujo, por qué no es una buena definición.

a. Definiciones de segmento.

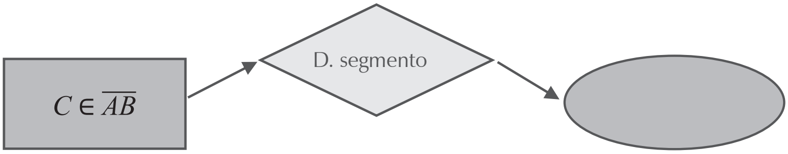
- **D1**. Conjunto de todos los puntos que están entre dos puntos fijos.
- **D2**. Consiste de todos los puntos entre dos puntos fijos que se encuentran sobre la recta que contiene los puntos.
- **D3**. Un subconjunto de una recta.
- **D4**. El conjunto que consiste de dos puntos A y B, y todos los puntos entre A y B.

b. Definiciones de rayo.

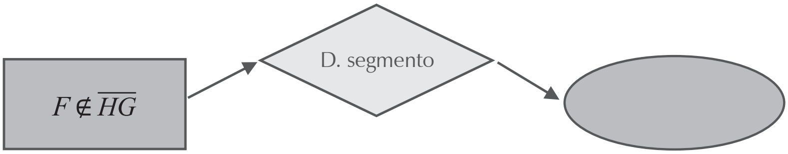
- **D1**. Consiste de $\overline{AB}$ y todos los puntos P para los cuales B está entre A y P.
- **D2**. Para un punto A de una recta, es el subconjunto de esta conformado por los puntos que están en el mismo lado de A como B, donde B es otro punto de la recta.
- **D3**. Es parte de una recta que se extiende infinitamente en una dirección a partir de un punto dado.

4. Con base en la definición que escogió para segmento, complete el diagrama–definición con la información requerida:

a.



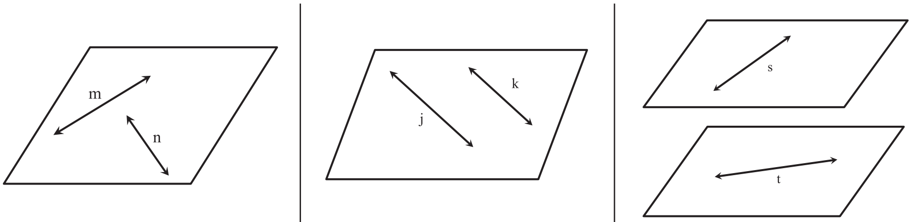
b.



2.4 Análisis de definiciones

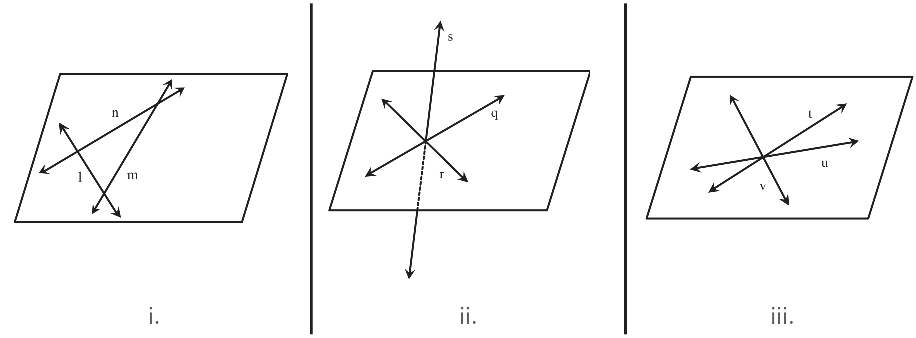
1. Explique, en cada caso, cuáles de las figuras cumplen la definición dada. Para las otras figuras, diga por qué no la cumplen.

a. **Definición.** Dos **rectas** son **paralelas** si son coplanares y no se intersecan.

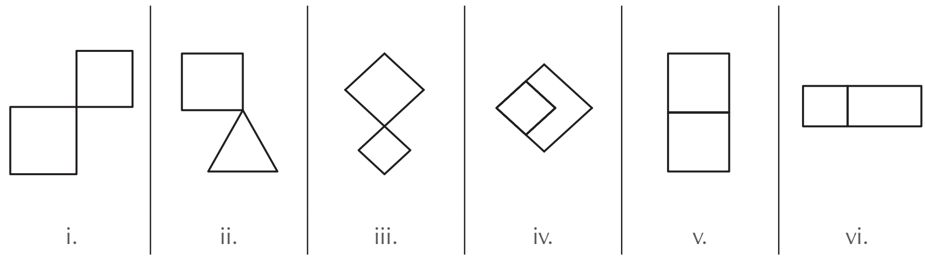


i. ii. iii.

b. **Definición.** Tres o más **rectas** son **concurrentes** si son coplanares y tienen un punto en común.



2. Un "cuadu" es una figura geométrica formada por dos cuadrados que comparten un vértice. En las siguientes figuras los ángulos que parecen rectos, lo son; también los segmentos que parecen congruentes, lo son. ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadus? Explique por qué descarta cada figura.



3. Para cada definición, haga un dibujo que ilustre la figura.

Definición. Una **diagonal** de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono.

Definición. Un ángulo **inscrito** en una circunferencia es un ángulo con vértice en la circunferencia cuyos lados tienen puntos comunes con el interior de la circunferencia.

Definición. Una **cuerda** de circunferencia es un segmento cuyos extremos pertenecen a la circunferencia.

4. En la definición de circunferencia que se da a continuación, ¿qué pasa si se elimina la condición de tener a P y los puntos Q en el mismo plano?

Definición. Sea P un punto de un plano α dado y r un número positivo. La **circunferencia** con centro P y radio r es el conjunto de todos los puntos Q del plano α que están a la distancia r del punto P.

5. Para cada una de las siguientes definiciones, dibuje tres figuras diferentes que se ajusten a la definición y tres que no. Indique por qué no es ejemplo de lo definido.

a. **Definición.** Una **cometa** es un cuadrilátero en el cual exactamente dos pares de lados adyacentes son congruentes y ningún par de lados opuestos son congruentes.

¿Es un cuadrado una cometa? Explique.

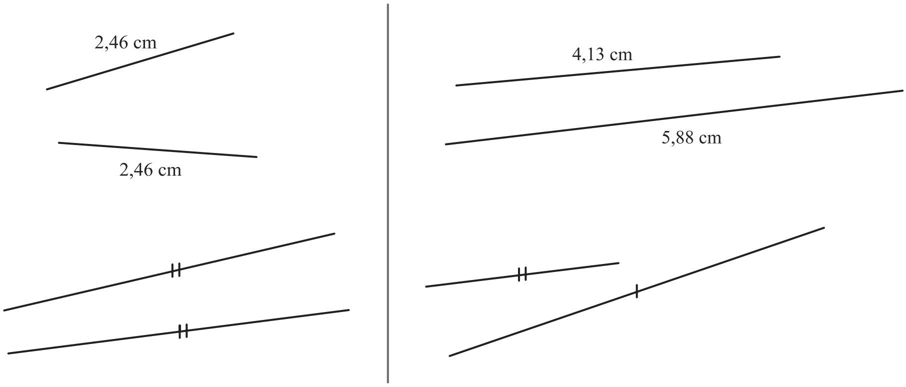
b. **Definición.** Dado un arco de circunferencia y un ángulo en el mismo plano, el **arco es subtendido por dicho ángulo** si los extremos del arco pertenecen al ángulo y los demás puntos del arco pertenecen al interior del ángulo.

c. **Definición.** Una **circunferencia** está **circunscrita** a un polígono si cada vértice del polígono pertenece la circunferencia.

2.5 Construir definiciones

1. A continuación se dan unas figuras geométricas. Escriba la definición que se pide observando las figuras que la cumplen y aquellas que no.

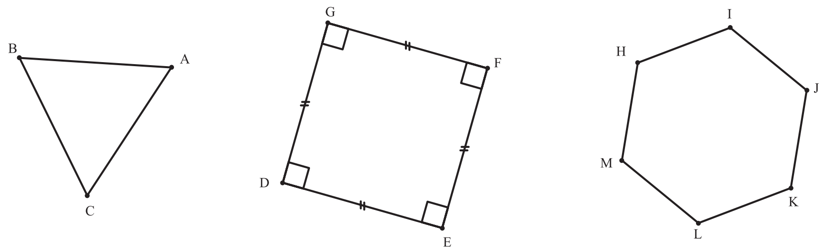
a. Segmentos congruentes



Son segmentos congruentes

No son segmentos congruentes

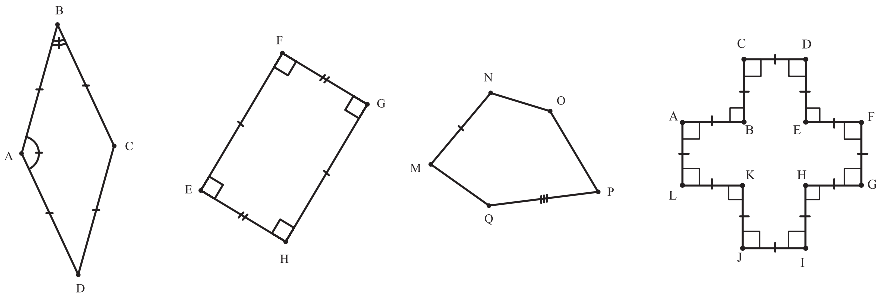
b. Polígono regular



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$
$m\angle A = m\angle B = m\angle C.$

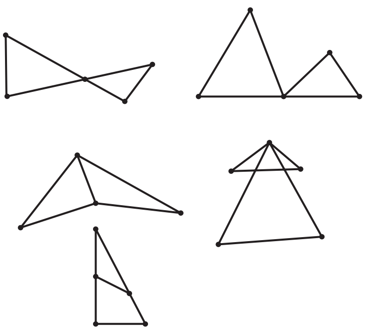
$\overline{LM} \cong \overline{MH} \cong \overline{HI} \cong \overline{IJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KL}$
$\angle L \cong \angle M \cong \angle H \cong \angle I \cong \angle J \cong \angle K$

Son polígonos regulares

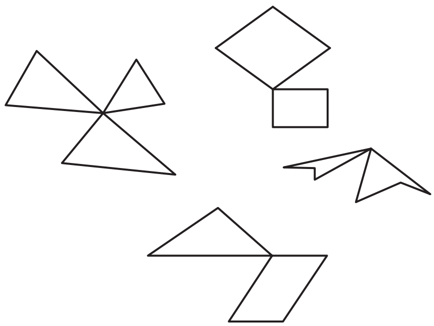


No son polígonos regulares

c. Bitrián



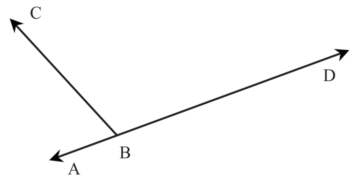
Son bitrianes



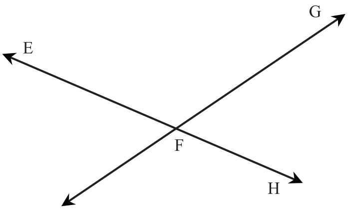
No son bitrianes

2.6 Transformación de una definición

1. Observe las figuras y escriba una definición de ángulos par lineal.

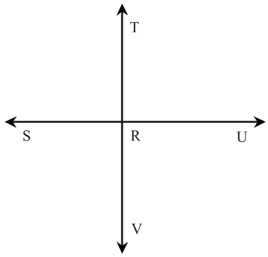


$\angle ABC$ y $\angle CBD$

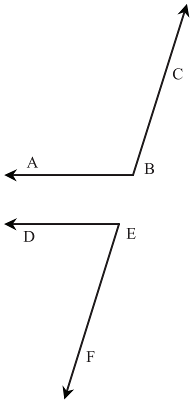


$\angle EFG$ y $\angle GFH$

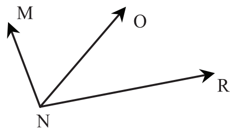
Son ángulos par lineal



$\angle TRS$ y $\angle URV$



$\angle ABC$ y $\angle DEF$



$\angle MNO$ y $\angle ONR$

No son ángulos par lineal

2. El siguiente enunciado es una definición de ángulos adyacentes.

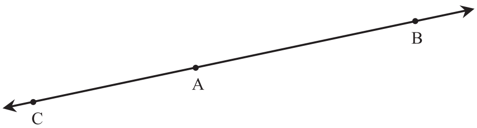
Definición. Dos **ángulos** son **adyacentes** si son coplanares, tienen en común uno de sus lados y no tienen puntos interiores en común.

a. Enumere las condiciones que deben cumplirse para que dos ángulos sean adyacentes.

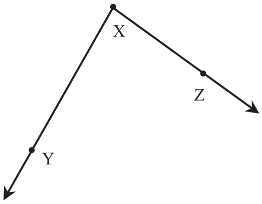
b. Eliminando cada vez una condición, dibuje ángulos que cumplan las condiciones restantes y no la condición eliminada.

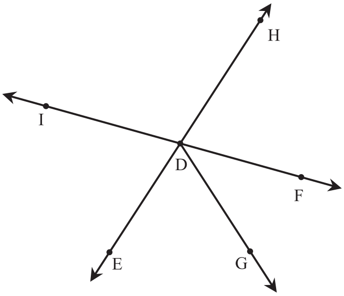
3. Reformule la definición de par lineal con base en el ejercicio 2.
4. Observe las figuras y escriba la definición de rayos opuestos.

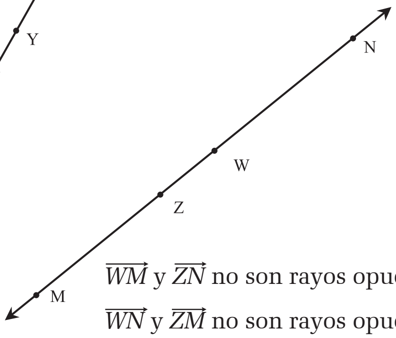
$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son rayos opuestos



$\overrightarrow{XY}$ y $\overrightarrow{XZ}$ no son rayos opuestos





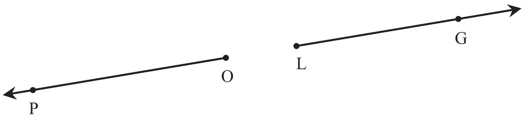


$\overrightarrow{WM}$ y $\overrightarrow{ZN}$ no son rayos opuestos

$\overrightarrow{WN}$ y $\overrightarrow{ZM}$ no son rayos opuestos

$\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DH}$ son rayos opuestos

$\overrightarrow{DI}$ y $\overrightarrow{DF}$ son rayos opuestos



$\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{LG}$ no son rayos opuestos

5. Reformule de nuevo la definición de par lineal con base en el ejercicio anterior.

2.7 Definiciones con geometría dinámica

1. Para las siguientes dos figuras geométricas
    - Altura de triángulo
    - Bisectriz de ángulo

    a. Realice una representación gráfica en papel.

    b. Construya la figura en la calculadora.

    c. Escriba una definición.

2. En la calculadora represente puntos que satisfagan la condición dada en la siguiente proposición:

> Dados dos puntos A y C, B es un punto tal que $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma longitud.

Decida si la proposición define algún objeto geométrico específico. Si es el caso, defina dicho objeto.

3.

a. Haga una construcción robusta de un cuadrilátero con cuatro lados congruentes.

b. Dibuje, en una hoja, los distintos tipos de cuadriláteros que cumplen la propiedad descrita que usted ve en la pantalla al arrastrar.

c. Repita los literales a) y b) para un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

4.

a. Complete el siguiente enunciado:

Si ______________________________, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.

b. Construya una figura que satisfaga las condiciones consignadas en el ítem a).

c. ¿Es posible transformar el enunciado del ítem a) a partir de su experiencia en el ítem anterior?

5. Para cada ítem construya en la calculadora una figura geométrica con las características dadas y represente el resultado en una hoja de papel.

a. Polígono con dos pares de lados paralelos y congruentes.

b. Polígono con un par de lados paralelos y dos perpendiculares a los lados paralelos.

c. Cuadrilátero con dos ángulos rectos.

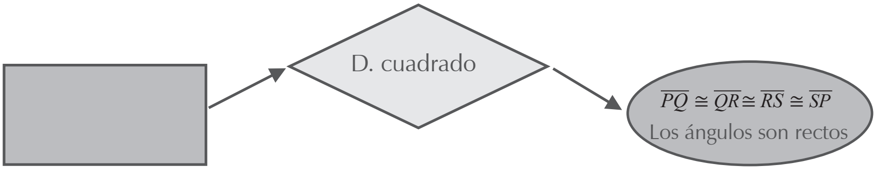
d. Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

e. Cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes, y un ángulo recto.

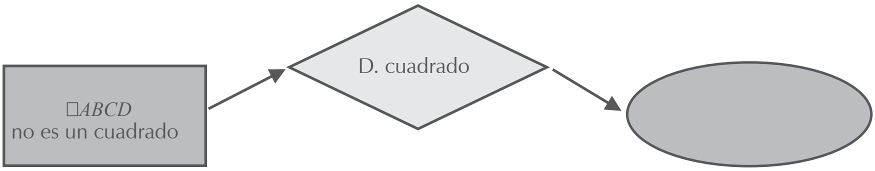
6. Si se quiere que los cuadrados sean subconjunto de los rectángulos, ¿qué definiciones de cada uno se deben tomar?

2.8 Deducciones con definiciones

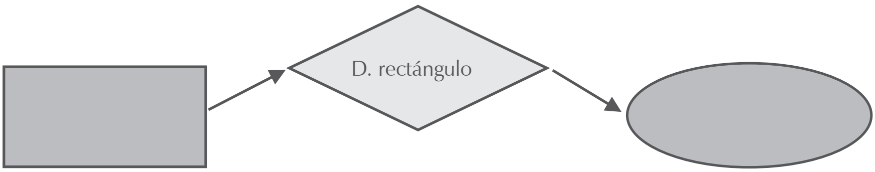
1. Usando la definición establecida para cuadrado y rectángulo, complete el diagrama-definición con la información requerida.



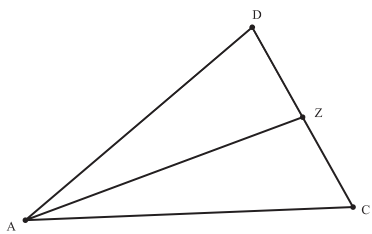
2.



3.



4. Dada la siguiente figura, ¿qué condiciones deben cumplirse para poder deducir que el $\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\angle CAD$?



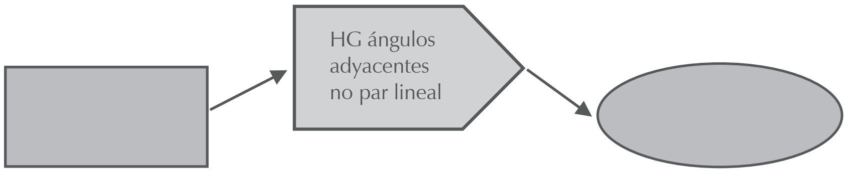
5. Suponga que Juan está resolviendo el siguiente problema que no incluye figura:

> Dado el □$EFGH$, explique por qué el $\overrightarrow{EK}$ es bisectriz del $\angle HEF$.
> ¿Qué información necesita Juan para asegurar que $\overrightarrow{EK}$ es bisectriz del $\angle HEF$?

6. Se toma como verdadero el siguiente hecho geométrico:

HG ángulos adyacentes no par lineal. Si dos ángulos son adyacentes y no forman par lineal, entonces la medida del ángulo formado por los lados no comunes es igual a la suma de las medidas de los ángulos adyacentes.

a. Reformule el anterior hecho geométrico en el formato si… entonces…, haciendo referencia a ángulos específicos.
b. Complete el siguiente diagrama–condicional.



7. En el diagrama-deducción se ilustra el proceso que permite deducir la siguiente propiedad. Complete la información que falta en la segunda columna.

HG de la bisectriz. La medida de un ángulo es igual al doble de la medida de cualquiera de los ángulos determinados por su bisectriz.

Reformulación. Si $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$ entonces $m\angle ABC = 2m\angle ABD$.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
$\angle ABC$		$\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ no colineales
$\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ no colineales		$\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ no opuestos
$\overrightarrow{BD}$ bisectriz del $\angle ABC$		$\angle ABD$ y $\angle DBC$ son adyacentes
$\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ no opuestos		$\angle ABD$ y $\angle DBC$ no par lineal
$\angle ABD$ y $\angle DBC$ son adyacentes $\angle ABD$ y $\angle DBC$ no par lineal		$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$
$\overrightarrow{BD}$ bisectriz del $\angle ABC$		$\angle ABD \cong \angle DBC$
$\angle ABD \cong DBC$		$m\angle ABD = m\angle DBC$
$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ $m\angle ABD = m\angle DBC$	Principio de sustitución	$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle ABD$
$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle ABD$		$m\angle ABC = 2m\angle ABD$

8.

a. Defina ángulos opuestos por el vértice.

b. Justifique que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes utilizando el siguiente hecho geométrico:

HG ángulos par lineal. Si dos ángulos son par lineal, entonces son suplementarios.

9. A continuación se definen algunos tipos de cuadriláteros.

Definición. Un **trapecio** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

Definición. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Definición. Un **rombo** es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes.

Escriba todas las características esenciales de cada tipo de cuadrilátero.

10. Use geometría dinámica para contestar Sí, No o No se sabe, a cada una de las siguientes preguntas. Explique su respuesta. Cuando la respuesta es No se sabe, indique qué condiciones tendría que añadir para obtener Sí como respuesta.

a. El $\square ABCD$ es un paralelogramo. ¿Es un rectángulo?

b. El $\square XYZW$ es un rombo. ¿Es un rectángulo?

c. El $\square EFGH$ tiene tres lados congruentes. ¿Es un rombo?

d. El $\square IJKL$ es un cuadrado. ¿Es un trapecio?

e. El $\square MNOP$ es un cuadrado. ¿Es un rombo?

Tareas complementarias

1. Escriba una definición de “libro” sin consultar un diccionario. Luego consulte el diccionario y compare las definiciones.

2. Determine si cada definición es o no buena. Explique.

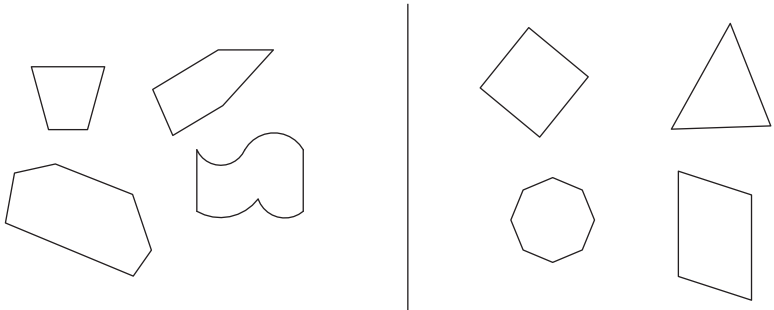
   a. Un caballo es un animal de cuatro patas.

   b. Un avión es un vehículo que vuela.

   c. Un pez es un animal que nada.

   d. Un gato es un animal con bigotes.

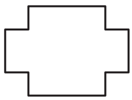
3. Observe las siguientes figuras:



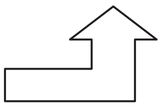
Son moparls | No son moparls

a. ¿Qué de las figuras que son moparls necesita tomar como válido para poder definir representaciones de las morpals?

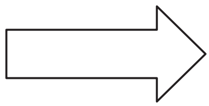
b. Con base en su respuesta anterior, ¿cuáles de las siguientes figuras son moparls?



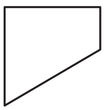
i.



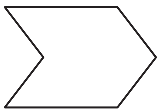
ii.



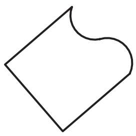
iii.



iv.



v.



vi.

4. Las siguientes son algunas definiciones de rayo encontradas por estudiantes en diferentes textos de matemáticas. Haga una crítica de cada una de ellas.

a. Segmento de recta entre un punto y una prolongación indefinida.

b. Cada una de las dos porciones en que está dividida una recta por cualquiera de sus puntos.

c. Segmento de recta entre un punto y el infinito.

d. Si sobre una recta marcamos un punto *O* entonces llamamos semirrecta al conjunto de puntos formado por *O* y todos los que le siguen o el punto *O* y todos los que le anteceden.

e. Conjunto de puntos alineados que tiene un primer elemento.

5. En el siguiente párrafo se presenta una definición de polígono.

Definición. Dado un conjunto de puntos de un plano, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, un **polígono** es la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ tales que: si se intersecan un par de segmentos el punto de intersección es un punto extremo, cada punto P_i es extremo de exactamente dos segmentos, y los segmentos con el mismo extremo no son colineales.

a. Enumere las condiciones para que un conjunto de puntos sea un polígono.

b. Eliminando cada vez una condición, dibuje figuras que cumplan las condiciones restantes y no la eliminada.

c. ¿Podría afirmarse que un polígono es una figura geométrica plana, formada por segmentos de recta extremo a extremo, con cada segmento intersecando exactamente otros dos?

6. Busque en una enciclopedia tres definiciones de conceptos geométricos. Luego, busque las definiciones de los mismos conceptos en un texto de primaria. Haga nuevamente esta búsqueda en un texto de secundaria y en un texto universitario. Compare las definiciones de cada concepto, anotando diferencias y/o semejanzas. Escriba una conclusión general de las comparaciones hechas.

7. Examine las definiciones dadas por alumnos, júzguelas en cuanto a si son o no correctas y explique su valoración.

a. Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo formado por dos radios.

b. Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

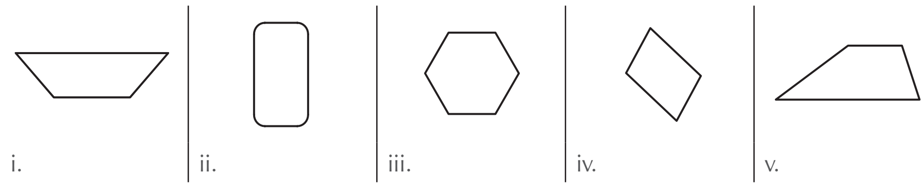
c. Dos rectas son perpendiculares si al intersecarse determinan un ángulo recto.

d. Dos rectas son perpendiculares si al intersecarse determinan ángulos adyacentes congruentes.

e. Un ángulo inscrito en una circunferencia es un ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y cuyos lados son cuerdas.

f. Un ángulo inscrito en una circunferencia es un ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y cuyos lados intersecan a la circunferencia en puntos distintos a su vértice.

8. En la siguiente gráfica, determine cuáles figuras son trapecios y cuáles no. Los segmentos que parecen ser paralelos lo son. Para aquellas figuras que considere no cumplen la definición, explique cuál es su razón para rechazarlas.



9. ¿Cuál de las siguientes definiciones para trapecio isósceles es la más apropiada? ¿Por qué?

Definición 1. Un trapecio isósceles es un trapecio con exactamente dos lados congruentes.

Definición 2. Un trapecio isósceles es un trapecio que tiene al menos un par de lados congruentes.

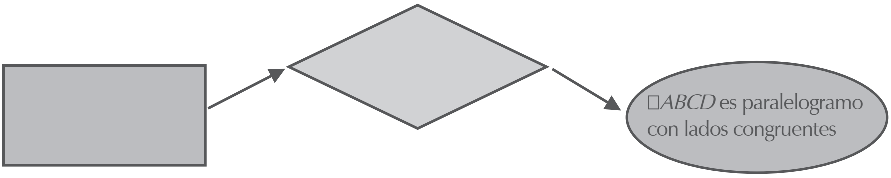
Definición 3. Un trapecio isósceles es un trapecio con dos lados opuestos congruentes.

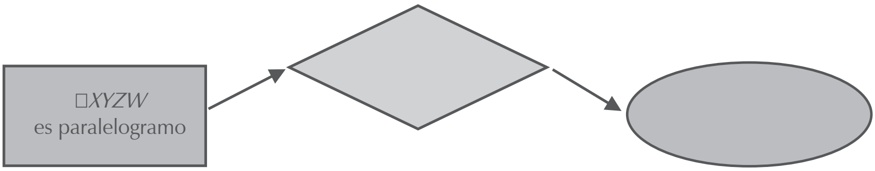
10. Ya se definió altura para un triángulo. Defina altura de un trapecio.

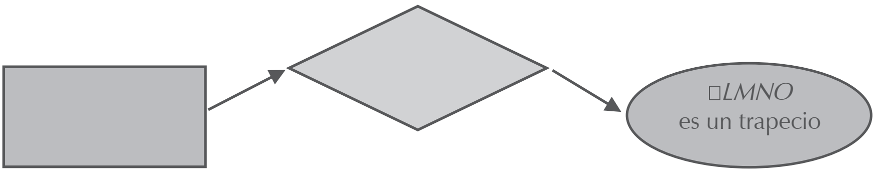
11. En cada caso, si es posible, haga un dibujo de un trapecio con la característica dada. Si no lo es, explique por qué.

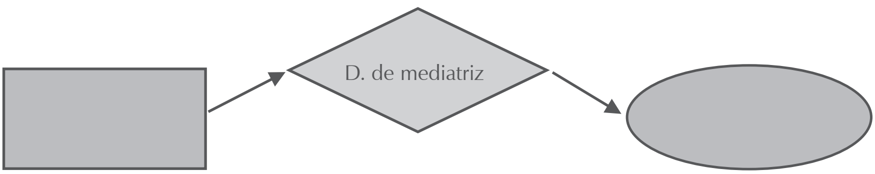
a. Con un par de lados adyacentes congruentes.
b. Con dos ángulos rectos.
c. Con tres lados congruentes.
d. Con un par de lados congruentes y paralelos.

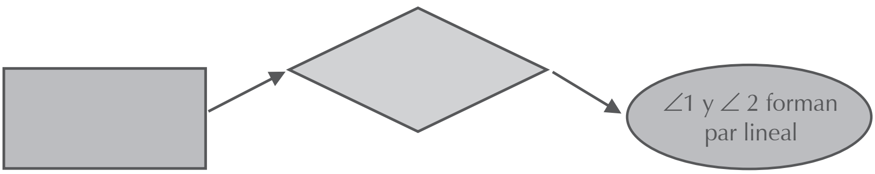
12. Complete la información que hace falta en cada diagrama–definición:

a.


b.


c.


d.


e.


13. En el diagrama-deducción se presenta un desarrollo parcial encaminado a justificar el siguiente hecho:

HG del punto medio. La medida de un segmento es igual al doble de la medida de cualquiera de los segmentos determinados por su punto medio.

Reformulación. Si M es el punto medio del $\overline{AB}$, entonces $AB = 2AM$.

Complete el desarrollo con la información pertinente. Para ello use la siguiente definición:

Definición de interestancia de puntos. Si se tiene un segmento y un punto entre los extremos de dicho segmento, entonces la medida del segmento dado es igual a la suma de las medidas de los segmentos determinados por tal punto y los extremos del segmento original.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
M es el punto medio del $\overline{AB}$		$A - M - B$
$A - M - B$		$AB = AM + MB$
M es el punto medio del $\overline{AB}$		$AM = MB$
$AM = MB$ $AB = AM + MB$		$AB = AM + AM$
$AB = AM + AM$		$AB = 2AM$

14. Justifique el siguiente hecho geométrico. Para ello, primero haga su reformulación y luego utilice un diagrama-deducción.

Todo cuadrado es un polígono regular.

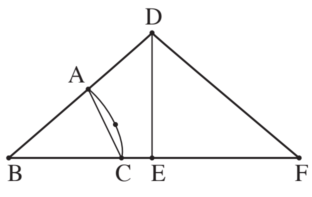
15. Justifique el siguiente hecho geométrico. Para ello, primero haga su reformulación y luego utilice un diagrama-deducción.

Si dos ángulos forman par lineal y uno de ellos es obtuso entonces el otro es agudo.

Nota histórica

La formación de una definición para un concepto requiere de un proceso largo. Cuando un matemático decide dedicarse al estudio de un tema específico, si no hay un consenso en la definición de un concepto ni un nombre común para este, le designa un nombre, aclarando a qué objeto se refiere, formulando la definición, la cual se puede ir perfeccionando. Es el caso, por ejemplo, de Apolonio de Perga (262 –190 a.C.) quién introdujo, por primera vez, los nombres de elipse, parábola e hipérbola para designar las curvas que resultan de hacer cortes de un cono con un plano, nombres que se usan actualmente. De esta manera, se comenzó el proceso para definir los lugares geométricos correspondientes a tales curvas, que hoy en día puede definirse de varias formas, según el acercamiento que se haga.

Otro ejemplo para ilustrar el proceso de construcción de una definición se encuentra en la noción de ángulo y de su medida. Así, en la proposición 32, del libro I, de los Elementos (300 a.C.), Euclides define ángulo rectilíneo como la inclinación entre dos rectas. Para comparar dos ángulos, como no había formulado una definición de medida, utiliza el proceso de superposición para establecer si hay congruencia visualmente. Por su parte, el geómetra Arnauld en su libro Nuevos Elementos de Geometría, publicado en 1667, define ángulo como la porción de superficie determinada por dos semirrectas que tienen origen común. Luego define la medida de ángulo de diversas maneras según el contexto de los problemas que propone:



Como la medida del arco ***AC.***

Como la medida de la cuerda ***AC***.

Por medio del seno, ***DE*** (si ***BD***= 1).

Por medio del segmento ***DF*** (si m $\angle$ ***BDF*** = 90º).

Un siglo más tarde, en el año 1765 Clairaut define ángulo como la "inclinación de una línea sobre otra", desde una perspectiva dinámica e introduce el transportador para medir ángulos, en forma semejante a la aproximación que se hace hoy en día. Finalmente, Hilbert en 1899 define ángulo como: la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y están contenidos en rectas diferentes.

Se puede apreciar la necesidad de una buena definición en el siguiente evento histórico. Georg Cantor (1845-1918) definió conjunto como "un agrupamiento en un todo de objetos bien definidos, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento", definición que condujo al surgimiento de varias paradojas. Una de ellas es la que expone Bertrand Rusell (1872-1970): "Sea S el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. ¿Es S un elemento de S?". Los problemas que surgen al tratar de responder este interrogante y otros similares originaron una crisis que llevó a Ernst Zermelo (1871-1956) a proponer una teoría axiomática de conjuntos en la cual este concepto se toma como idea primitiva y se introduce el Axioma de Selección.

Capítulo 3

Construcciones geométricas

Lo que oigo lo olvido, lo que veo lo recuerdo,
pero solo lo que hago aprendo.

Proverbio chino

El acceso a muchos de los objetos matemáticos se hace a través de representaciones. Estas permiten identificar características o propiedades de los conceptos que pueden llegar a ser diferentes según la representación que se tenga o el acercamiento que a ellos se haga. Entre mayor número de representaciones se analice de una noción, la conceptualización que de ella se obtenga será más amplia.

El estudio de la geometría requiere y, a la vez, provee un sinnúmero de representaciones de figuras las cuales pueden realizarse a mano alzada, construirse con regla y compás, o con geometría dinámica. Existe una estrecha relación entre el procedimiento constructivo y las relaciones geométricas en juego. Las construcciones geométricas aportan una manera "matemática" de intervenir sobre las figuras que conlleva a que los conocimientos que están presentes implícitamente, sean exteriorizados, analizados, y puestos en una perspectiva que permite identificar las propiedades matemáticas esenciales de dicha figura. Son, por lo tanto, una herramienta importante para el aprendizaje de las nociones geométricas y de conceptos matemáticos de toda índole. Son el instrumento que permite relacionar lo teórico con lo empírico. Particularmente, las construcciones contribuyen a dar el paso de la geometría de los dibujos a la geometría de los entes abstractos.

Al mismo tiempo que se familiarizará con algunas nociones geométricas como las de punto medio, paralelismo, perpendicularidad, media geométrica y semejanza y algunas construcciones con regla y compás, el propósito de esta unidad es responder a la siguiente inquietud: ¿Para qué números es posible construir un segmento cuya medida es dicho número, utilizando solamente regla y compás?

3.1 Construcción de segmentos congruentes

1. En grupos, discuta sobre las posibles soluciones del siguiente problema:

> Dado un segmento, sin hacer uso de una regla graduada, ¿cómo obtener un segmento cuya longitud sea la mitad de la del segmento dado? ¿La tercera parte? ¿La *n*-ésima parte?

La respuesta a esta inquietud se encuentra en las diversas construcciones que se hacen con regla y compás, siguiendo las condiciones impuestas por los antiguos griegos a esta actividad, las cuales están expresadas en los primeros tres postulados de Euclides. Los instrumentos que deben usarse para hacer las construcciones son una regla lisa, sin divisiones, con la cual solo se trazan rectas, y un compás, con el que se dibujan circunferencias o arcos de estas. El compás que ellos usaban, conocido como el compás ideal, es aquel que se cierra una vez se ha levantado del papel.

Debido a que la construcción del compás ha evolucionado, permitiendo que este mantenga la abertura que se le dé, antes de proceder a explicar las diversas construcciones, se mostrará que el uso del compás moderno no cambia las condiciones que los griegos exigían para hacer construcciones, es decir, se pueden hacer las mismas construcciones con ambos sin añadirle o quitarle rigurosidad. Esto significa que el compás moderno es equivalente al compás ideal.

2. Siga las instrucciones a continuación para construir un segmento congruente a otro dado, utilizando un compás ideal y uno moderno. Analice los procedimientos y compárelos. Escriba su conclusión.

Construcción 1 (con el compás ideal). Segmentos congruentes

Paso 1. Dibuje un $\overline{AB}$ en una hoja de papel blanco y escoja un punto O del plano que no esté en $\overline{AB}$.

Paso 2. Centrado en A, trace una circunferencia de radio AO.

Paso 3. Centrado en O trace una circunferencia de radio AO.

Paso 4. Llame D y E a los puntos de intersección de esas circunferencias.

Paso 5. Centrado en D trace la circunferencia con radio DB.

Paso 6. Centrado en E trace la circunferencia de radio EB.

Paso 7. Llame F al otro punto de corte de las dos últimas circunferencias.

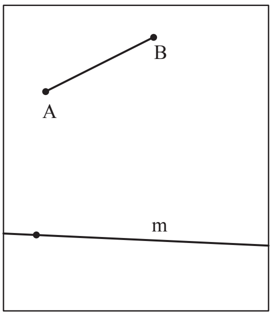
Paso 8. El $\overline{OF}$ es congruente al $\overline{AB}$, cuestión que no se demostrará formalmente en este momento, pero que se puede comprobar.

Construcción 1 (con el compás moderno). Segmentos congruentes

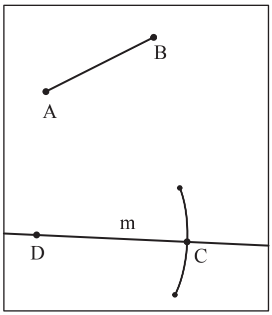
Paso 1. Con la regla, trace el $\overline{AB}$ y una recta m.

Paso 2. Con el compás tome la longitud del segmento dado.

Paso 3. Escoja como centro un punto sobre la recta m y, con la misma abertura del compás, marque, en la recta, la longitud del segmento dado.



Paso 1



Pasos 2 y 3

$$\overline{DC} \cong \overline{AB}$$

De aquí en adelante, se trabajará con el compás moderno. Esto es, usted podrá mantener la abertura del compás para hacer una construcción. Además, se aceptará que las construcciones básicas dadas son válidas, es decir, que realmente se construye lo deseado.

3. ¿Cómo puede construirse un segmento cuya longitud sea el doble de la de un segmento dado?

4. Tomando un segmento cualquiera y considerando que su longitud es la unidad, explique cómo construir un segmento cuya longitud sea un número natural. Esto es, explique por qué son construibles los números naturales.

5. ¿Cómo se construyen segmentos congruentes con geometría dinámica?

En la siguiente definición se precisa la noción de número construible.

> **Definición.** Un número real positivo r es un **número construible** si es posible construir, a partir del segmento considerado como la unidad de medida y utilizando la regla y el compás, un segmento cuya medida es r, en un número finito de pasos.

3.2 Fracciones construibles

Se ha establecido que todo número natural es construible. Se retoma, a continuación, la pregunta inicial: dado un segmento, sin hacer uso de una regla graduada, ¿es posible obtener un segmento cuya longitud sea la mitad?, ¿la tercera parte? ¿la n-ésima parte?

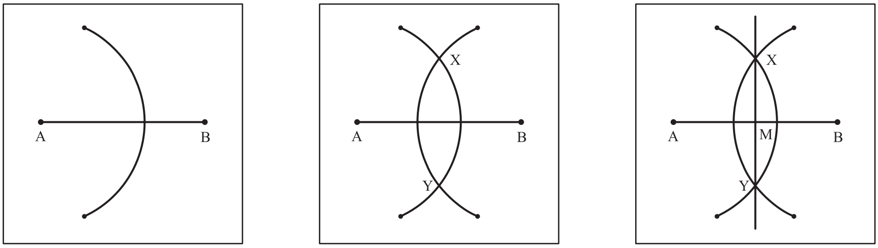
La siguiente construcción permite localizar el punto medio de un segmento.

Construcción 2. Punto medio de un segmento

Paso 1. Dado el $\overline{AB}$, abra el compás a un radio mayor que la mitad de AB. Centrado en A trace un arco.

Paso 2. Con la misma abertura del compás, centrado en B, trace un arco. Llame X y Y a los puntos de intersección de los dos arcos.

Paso 3. El segmento que une los puntos de intersección de los arcos contiene a M, el punto medio de $\overline{AB}$.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

M es el punto medio del $\overline{AB}$

1. Con base en esta construcción, ¿qué números reales positivos son construibles? Explique su respuesta.

2. Construya un segmento de longitud $3\frac{5}{8}$.

3. ¿Cree que cualquier número racional es construible? Explique su respuesta.

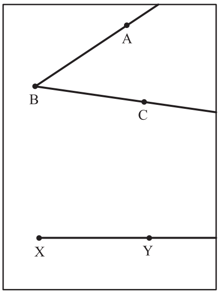
3.3 Ángulos congruentes y rectas paralelas

En esta actividad se explican dos construcciones que permiten ampliar el conjunto de números construibles.

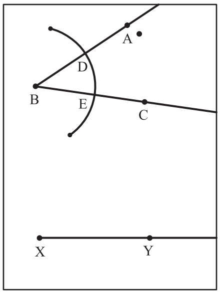
Construcción 3. Ángulos congruentes
Paso 1. Dado $\angle ABC$, trace $\overrightarrow{XY}$.

Paso 2. Con centro B, trace un arco que interseque ambos lados del ángulo en los puntos D y E.

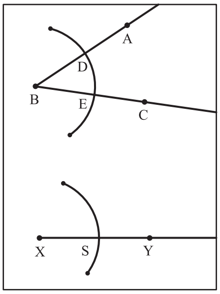
Paso 3. Repita el arco con centro X. Llame S al punto de corte con $\overrightarrow{XY}$.



Paso 1



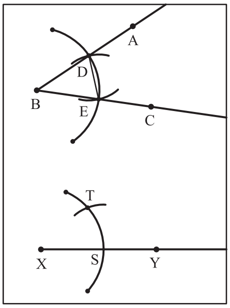
Paso 2



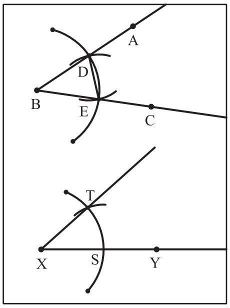
Paso 3

Paso 4. Con radio *ED* y centrado en *S*, trace el arco correspondiente. Llame *T* al punto de corte de los arcos.

Paso 5. Trace $\overrightarrow{XT}$.



Paso 4



Paso 5

$$\angle TXS \cong \angle ABC$$

1. ¿Cómo se construye, en geometría dinámica, un ángulo congruente a otro?

Para responder las siguientes preguntas, tenga en cuenta las dos definiciones que se dan a continuación.

Definición. Dadas dos rectas coplanares, una **trasversal o secante** es una recta que interseca a las dos rectas dadas, y los puntos de intersección correspondientes son diferentes.

Definición. Dadas dos rectas y una trasversal, dos ángulos son **ángulos correspondientes** si no son adyacentes, cada uno tiene un lado sobre la trasversal siendo uno de esos lados subconjunto del otro y los otros dos lados de los ángulos, excluyendo el vértice, están en el mismo semiplano determinado por la trasversal.

2. Enumere las condiciones requeridas para que:

   a. Una recta sea trasversal.

   b. Dos ángulos determinados por dos rectas y una trasversal sean correspondientes.

3. Indique en un dibujo todos los pares de ángulos correspondientes que se distinguen cuando una transversal corta a tres rectas.

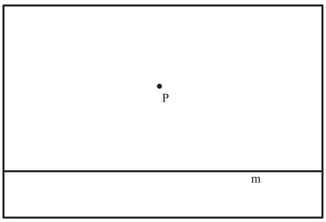
4. Elimine cada vez una de las condiciones que definen ángulos correspondientes entre rectas y, si es posible, dé ejemplos de ángulos que cumplan las condiciones restantes.

La siguiente secuencia de instrucciones indica el proceso de construcción de una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.

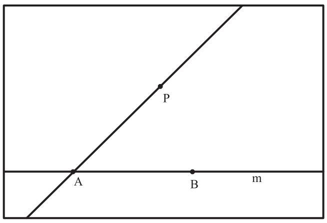
Construcción 4. Rectas paralelas

Paso 1. Escoja un punto *P* que no esté en una recta *m* dada.

Paso 2. Sobre la recta *m* marque dos puntos *A* y *B* y trace la $\overleftrightarrow{PA}$.

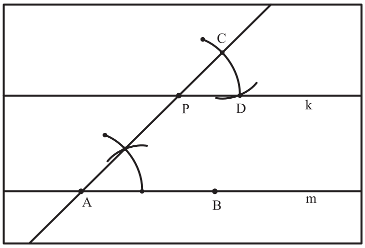


Paso 1



Paso 2

Paso 3. Construya con vertice en P un ángulo congruente al $\angle PAB$ que sea correspondiente a este. Llámelo $\angle CPD$.



Paso 3

Las rectas ***k*** y ***m*** son paralelas

En la construcción anterior, fue posible construir por un punto P exterior a una recta m, una recta paralela a ella. Afirmar que esta recta es la única posible, no contradice la intuición. Esto es, solo es posible construir una única recta paralela a una recta dada por un punto que no esté en ella. Esta afirmación, por obvia que parezca, forma parte del conjunto de afirmaciones escogidas para conformar la teoría de la geometría de Euclides y se consigna en la siguiente afirmación:

HG de la paralela. Por un punto exterior a una recta, hay solamente una recta paralela a la recta dada.

Cabe resaltar que en la construcción de paralelas se asumió como verdadero el siguiente hecho geométrico:

HG de ángulos correspondientes. Si dos ángulos correspondientes de dos rectas cortadas por una transversal son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Esta afirmación, junto con la siguiente proposición, podrá ser demostrada a partir del conjunto de postulados básicos de la geometría de Euclides.

HG de rectas paralelas - ángulos correspondientes. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces forman ángulos correspondientes congruentes.

5. Las instrucciones que se dan indican cómo usar las construcciones anteriores para construir un segmento de longitud 1/3. Realice el proceso.

Paso 1. Construya el $\overline{AB}$ cuya longitud es la unidad.
Paso 2. Por un punto W exterior a $\overleftrightarrow{AB}$ dibuje $\overleftrightarrow{AW}$.
Paso 3. Sobre $\overrightarrow{AW}$ usando el compás y a partir del punto A, marque tres segmentos consecutivos de igual longitud, con cualquier medida. Denote los puntos de intersección por X_1, X_2 y X_3.
Paso 4. Trace $\overline{BX_3}$.
Paso 5. Construya los segmentos paralelos a $\overline{BX_3}$ que contengan, respectivamente, a X_1 y X_2. Marque con Y_1 y Y_2 a los puntos de intersección de las paralelas con $\overline{AB}$, respectivamente. El $\overline{AY_1}$ mide 1/3.

6. Construya un segmento con longitud de $2\frac{5}{7}$.

7. Explique por qué para todo $a, b \in Z^+$, pueden construirse segmentos cuya longitud es $\frac{a}{b}$.

8. ¿Es 2,3 un número construible? Explique su respuesta.

9. ¿Es $1,\overline{82}$ un número construible? Explique su respuesta.

10. Construya un paralelogramo con dos lados de longitudes $3\frac{4}{5}$ y 2,7 unidades.

11. ¿Hay algún número positivo que no se pueda construir con las herramientas que dispone hasta el momento? Explique su respuesta.

12. Con geometría dinámica, use la herramienta *Calcular* para construir un segmento cuya longitud es $\frac{2}{3}$ de la longitud de un segmento dado.

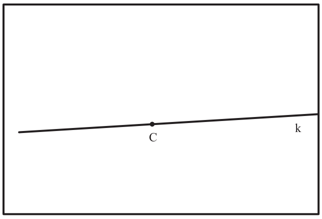
3.4 Rectas perpendiculares y otros números construibles

Las relaciones geométricas importantes entre rectas son el paralelismo y la perpendicularidad. Construir rectas perpendiculares es equivalente a construir ángulos rectos.

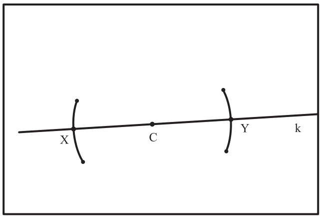
Construcción 5. Recta perpendicular a una recta por un punto dado de esta

Paso 1. Escoja un punto C sobre la recta k.

Paso 2. Con centro C y cualquier radio, marque arcos que intersequen a k en X y Y.



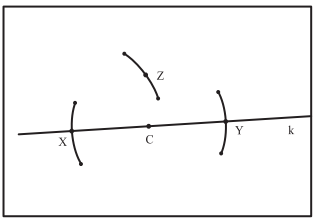
Paso 1



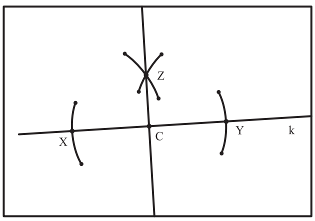
Paso 2

Paso 3. Con centro en X y radio mayor a CX, trace un arco.

Paso 4. Sin cambiar el radio y con centro Y, dibuje un arco que interseque al anterior. Llame Z al punto de intersección. La recta ZC es perpendicular a la recta k.



Paso 3



Paso 4

1. Dado un segmento de longitud 1, construya un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen esta medida. Explique por qué esta construcción muestra que $\sqrt{2}$ es un número construible.

2. ¿Qué otros números irracionales se pueden construir siguiendo el ejemplo anterior?

3. Construya un rectángulo con dos lados de longitud $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

4.Construya, si es posible, un segmento de longitud $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

5. ¿Qué número irracional no se puede construir utilizando los elementos vistos hasta ahora?

6. Decida si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. Justifique su respuesta.

a. El número b es construible. ¿Es $\sqrt{b}$ un número construible?
b. El número a es construible. ¿Es $\sqrt{\frac{a}{n}}$ un número construible, n un número natural positivo?
c. Los números a y b son construibles. ¿Es $a \times b$ un número construible?

3.5 Media geométrica y semejanza

1. Construya cualquier ΔABC y construya un ΔDEF de tal forma que $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$.

a. ¿Qué relación existe entre $\angle C$ y $\angle F$?
b. Usando el diagrama-deducción, justifique la afirmación enunciada en el ítem a. Acepte como verdadero el siguiente hecho geométrico:

HG ángulos de triángulo. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180^o.

c. Halle las medidas de los lados de cada triángulo. Arrastre el punto *A* de tal forma que la relación entre *AB* y *DE* sea que una es el doble de la otra. ¿Qué relación se observa entre *BC* y *EF*? ¿Entre *AC* y *DF*?

d. Repita el ejercicio de tal forma que la relación entre *AB* y *DE* sea que una es la tercera parte de la otra.

e. Establezca una conclusión general, de la forma si-entonces, a partir de los resultados obtenidos.

f. A partir de la siguiente definición, reformule su conclusión.

Definición. Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

2. En la definición de dos figuras semejantes que se da a continuación, elimine una de las condiciones establecidas y estudie las consecuencias de ello.

Definición. Dos polígonos son **semejantes** si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Para ampliar el conjunto de números construibles es necesario introducir los conceptos de media geométrica y de semejanza de triángulos, y un postulado que nos garantiza la semejanza de dos triángulos.

Definición. La **media geométrica** entre dos números positivos a y b es un número positivo c que satisface la siguiente condición: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$.
HG de la semejanza. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.
Notación. Para indicar que ΔABC es semejante a ΔDEF usamos la siguiente notación: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ donde el orden de las letras indica cuáles son los ángulos correspondientes, es decir $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$. Además, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

3. Volviendo al numeral 1 de esta sección, ¿cuáles son las condiciones mínimas que se necesita para garantizar la semejanza de dos triángulos? Justifique.

La afirmación que se ha justificado se convierte en un hecho geométrico denominado **Criterio AA de semejanza.**

4. Construya una semicircunferencia. Después de realizada la construcción, defina semicircunferencia.

5. Ejecute las siguientes instrucciones que le permitirán construir un segmento cuya longitud es la media geométrica entre las longitudes de dos segmentos dados usando regla y compás.

Construcción 6. Media geométrica
Paso 1. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos dados. Dibuje una recta y sobre ella construya $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ de forma que $PQ = AB$ y $QR = CD$.

Paso 2. Construya el punto medio M de $\overline{PR}$.

Paso 3. Con centro M y radio PM, construya la semicircunferencia para la cual $\overline{PR}$ es un diámetro.

Paso 4. A partir de Q, construya un segmento perpendicular a $\overline{PR}$ y llame S al punto de intersección del segmento con la semicircunferencia. QS es la media geométrica entre AB y CD.

6.En Cabri, construya una semicircunferencia *PTR*. Determine la posición de un punto *S* sobre la semicircunferencia tal que m $\angle PSR$ sea máxima. Escriba una conjetura en la forma si-entonces.

7. Considere la siguiente situación: el ΔABC es rectángulo, siendo $\angle ACB$ el ángulo recto y $\overline{CD}$ la altura relativa a $\overline{AB}$.

a. En Cabri, construya una figura que represente la situación.

b. Determine la relación entre el ΔACD y ΔABC.

c. Determine la relación entre ΔBCD y ΔACD

d. Usando el diagrama-deducción, justifique cada una de las siguientes afirmaciones:

Afirmación que se debe justificar. Relación entre el ΔACD y ΔABC, y entre ΔBCD y ΔACD.

Afirmación que se debe justificar. *CD* es la media geométrica de *BD* y *DA*.

Usando los resultados del problema anterior y la construcción, se puede lograr la ampliación del conjunto de los números construibles.

8. Si en la construcción 6 $AB = \sqrt{2}$ y $CD = 1$, ¿cuál es la medida de $\overline{QS}$?

9. Construya un segmento de medida $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

10. Construya un segmento de medida $\sqrt[8]{6}$.

11. Construya un rombo con lado de longitud $\frac{\sqrt[4]{10}}{5}$.

12. ¿La construcción de media geométrica permite construir la $\sqrt[3]{6}$? Explique su respuesta.

13. ¿Qué números reales se pueden construir usando la construcción de la media geométrica?

3.6 Más números construibles

En este momento, es natural preguntarse si existen números positivos que no son construibles.

1. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. a y b son dos números construibles.

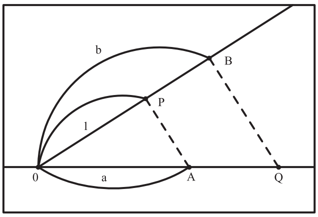
   a. ¿Es $a + b$ construible?

   b. ¿Es $a - b$ construible?

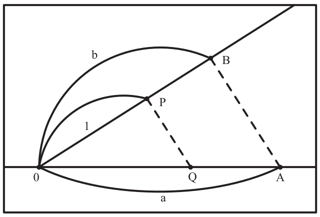
2. Utilizando la justificación anterior, dé nuevos ejemplos de números construibles.

Se observó, en la última construcción, que dados dos números construibles a y b, $\sqrt{a \times b}$ es construible. Los siguientes ejercicios permiten mostrar que el producto y cociente de números construibles es construible.

3. Examine el primer esquema que aparece a continuación. En él, $\overline{BQ} \parallel \overline{PA}$. Determine un par de triángulos semejantes y utilícelos para explicar por qué $a \times b$ es construible. Haga un razonamiento similar al anterior y explique por qué el segundo esquema, donde $\overline{BA} \parallel \overline{PQ}$, muestra que $\dfrac{a}{b}$ es construible. Justifique por qué son semejantes los triángulos.



Esquema 1



Esquema 2

Las consideraciones anteriores permiten afirmar que: "Si a y b son números reales construibles, entonces $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$ y $\sqrt{a \times b}$ son construibles".

4. Construya un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{3}$ $\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}$ y $\dfrac{5+\sqrt{3}}{\sqrt[8]{9}}$.

5. A partir de la afirmación anterior, dé nuevos ejemplos de números construibles.

3.7 Comentario

La pregunta ahora es: *¿cómo pueden construirse otros números usando solo la regla y el compás*? Fácilmente se pueden localizar, en el plano cartesiano, todos los puntos cuyas coordenadas son números racionales. Como con la regla y el compás solo se pueden construir rectas y circunferencias, cualquier otro punto cuyas coordenadas sean números construibles debe resultar como punto de intersección de:

- Dos rectas, cada una de las cuales ha sido determinada por dos puntos con coordenadas racionales.
- Dos circunferencias, cada una con centro un punto de coordenadas racionales y radio la raíz cuadrada de un número racional.
- Una circunferencia y una recta como las descritas en 1 y 2.

Las rectas y circunferencias descritas tienen ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$ *o* $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, donde $a, b, c, d, e, f \in Q$. Se puede mostrar que solamente la construcción descrita en 3 dará lugar a puntos diferentes a aquellos cuyas coordenadas son números racionales. Para encontrar dichos puntos de intersección, se debe resolver una ecuación cuadrática. Así, las coordenadas de dichos puntos serán números que corresponden a la raíz cuadrada de números racionales que no son cuadrados perfectos. Esta pequeña discusión permite ver por qué el siguiente teorema debe ser válido.

Una afirmación a justificar. El conjunto de números construibles consta de todos los números reales que se pueden obtener de un número racional al sacarle la raíz cuadrada un número finito de veces y usando las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división un número finito de veces.

Esto significa que números como $\sqrt[3]{2}$ y π no son números construibles. Indique cuatro números que no son construibles y explique por qué no lo son.

El trabajo desarrollado en el taller permite dividir al conjunto de los números reales positivos en tres subconjuntos: el número 1, que se toma como patrón de medida, los números construibles y los no construibles.

Nota histórica

Para el filósofo griego Platón (360 a.C.), la recta y la circunferencia eran las curvas básicas y perfectas, las cuales debían ser suficientes para lograr todas las construcciones. Por esto, se cree, nació la idea de que solo las construcciones con regla y compás eran válidas en la geometría. Platón tuvo gran influencia en el desarrollo de la matemática porque dirigió el pensamiento de otros hacia esta ciencia. A la entrada de su academia puso un aviso que decía "No entra quien es ignorante de la geometría". Exigía el conocimiento de la matemática como preparación para el estudio de la filosofía porque consideraba que la matemática desligaba el pensamiento del mundo imperfecto. Solo así podía la persona buscar la naturaleza de las cualidades de un mundo ideal: igualdad, belleza y bondad.

Los primeros tres postulados de los *Elementos* de Euclides son:

P1. Puede trazarse una recta de un punto a otro.
P2. Una recta finita (segmento) puede prolongarse continuamente en línea recta.
P3. Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y una distancia (radio)

Estos tres postulados se convierten en las reglas de juego de la construcción euclidiana y solo las construcciones que se realizan teniendo en cuenta tales postulados son las que se denominan ''Construcciones con regla y compás''. Los primeros dos postulados indican lo que se puede hacer con una regla ideal, aquella que no tiene marca alguna, lo cual significa que no se pueden medir distancias entre puntos. La regla ideal permite trazar rectas y segmentos entre puntos dados. El tercer postulado indica que es posible trazar una circunferencia si se conoce su centro y se tiene un segmento que se toma como radio. Ningún instrumento permite trasladar distancias. Esto significa que en la regla ideal, no se pueden hacer marcas y que el compás ideal se cierra una vez se ha levantado del papel.

Debido a las restricciones impuestas para las construcciones geométricas, surgieron, en la Grecia Antigua, tres problemas famosos: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. La cuadratura del círculo significa construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Trisecar un ángulo significa construir, dado un ángulo, otro ángulo cuya medida es la tercera parte de la medida del ángulo original. Finalmente, la duplicación del cubo se refiere a la construcción de un cubo cuyo volumen es el doble del de un cubo dado. Este último problema se originó según la siguiente leyenda. Cuentan que en la isla de Delos había una epidemia que estaba acabando con la población. Apolo, por medio de un oráculo, pidió a los habitantes duplicar el tamaño de su altar cúbico, para acabar con la peste. Como no lograron hacerlo, fueron a buscar ayuda de Platón. Él les dijo que habían mal interpretado el mensaje de Apolo pues lo que él quería era que vieran la importancia de la matemática.

Sea cual fuese el origen de estos problemas lo cierto es que impulsaron el desarrollo de las matemáticas pues fue buscando su solución que se descubrieron curvas como la parábola, elipse e hipérbola, por Menecmo (alrededor de 350 a.C.), la espiral de Arquímedes (287 a.C.- 212 a.C.) y la cuadratriz de Hipias (alrededor de 420 a.C.), entre otras. Pero los problemas seguían sin solución puesto que ninguna de estas curvas se podía construir con regla y compás. Se necesitó que pasaran más de 2200 años antes de que se demostrara que tales problemas no tienen solución. Para esto se necesitaron las ideas algebraicas que fueron desarrolladas a lo largo de los siglos, en particular la teoría de las ecuaciones cúbicas, particularmente, el teorema que asegura que todo polinomio cúbico, con coeficientes enteros, que no tenga raíz racional, no tiene raíz construible. Con esta teoría, se demostró la imposibilidad de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo. Más tarde, cuando el matemático F. Lindemann (1852-1939) demostró que π no es un número construible, se pudo demostrar la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Para Euclides, una construcción era en esencia una demostración de existencia; en su libro Elementos, hay dos tipos de demostraciones: las construcciones y aquellas que se desarrollan deductivamente, según las ideas impuestas por Aristóteles a la matemática.

Muchos matemáticos se cuestionaron acerca de la utilización de ambos instrumentos en las construcciones. Abul Wafa (940-998) escribió un tratado en el cual describe cómo hacer construcciones y resolver problemas usando solamente el compás. Johann Heinrich Lambert (1728-1777), topógrafo de profesión, pero matemático de afición, escribió un tratado semejante llamado *Geometría de la Regla*. El artista alemán, Alberto Durero (1471-1528), famoso por sus bellos grabados para ilustrar libros, insistía que para poder entender el arte italiano del Renacimiento es necesario usar la geometría y la medida. Su primera obra teórica, publicada en 1525, fue un tratado de geometría, en el cual hace una recopilación de los métodos que se usaban para construir polígonos. En 1931, el matemático japonés, Kitize Yanagihara demostró que con una regla y un solo compás moderno es posible desarrollar toda la geometría euclidiana.

Capítulo 4

Elaboración de conjeturas

> Así pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, de ahí pasa a conceptos y termina con ideas.
>
> **Kant**

Algunos de los procesos asociados a la actividad geométrica son: conjeturar, experimentar, inducir, hipotetizar, simbolizar y abstraer; pero todos ellos van encaminados tanto a descubrir las verdades geométricas, como a poder justificarlas. No hay mejor lugar que la geometría para dilucidar y discutir el concepto y papel de la demostración en la construcción de pruebas matemáticas. El espectro completo de ver, creer, seguir o aceptar una afirmación o una línea de pensamiento, así como de ser convencido o persuadido, encuentra terreno fértil en la geometría.

En este taller se verá, tanto el fruto de la aproximación intuitiva a la actividad geométrica, como la necesidad de la demostración, elemento fundamental en la construcción de una teoría matemática. El uso de habilidades visuales, del lenguaje matemático y del conocimiento de algunos conceptos y propiedades geométricas permiten elaborar conjeturas acerca de nuevas propiedades. De esta manera se accede a posibles teoremas, por construcción propia, al generalizar las relaciones descubiertas y no por imposición externa del profesor o de un texto. Este proceso llevará a la necesidad de convencerse y convencer a otros de la validez de las conjeturas que se formulen y a la búsqueda de las condiciones que se consideran necesarias para que la explicación sea una demostración.

4.1 Formular conjeturas

1. Construya un paralelogramo y sus diagonales. Arrastre hasta que las diagonales sean congruentes. ¿Qué observa? Escriba la conjetura en la forma *si-entonces*.

2. Construya un triángulo. Estudie la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: *la bisectriz de un ángulo y la mediana con extremo en el vértice del mismo ángulo coinciden*. Construya una conjetura en la forma *si-entonces*.

3. Construya el ΔABC y trace $\overleftrightarrow{AC}$. Seleccione un punto D sobre $\overleftrightarrow{AC}$, trace el $\overline{BD}$ y halle el punto medio M de ese segmento. ¿Qué ocurre con el punto M cuando se mueve el punto D sobre $\overleftrightarrow{AC}$?

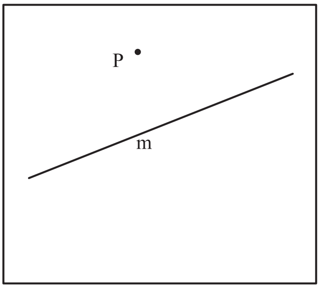
4. Usando la construcción anterior construya una circunferencia de centro M y radio BM. Sea E uno de los puntos de intersección de la circunferencia con la $\overleftrightarrow{AC}$. ¿Qué le ocurre al punto E al mover a D? ¿Qué propiedad especial tiene el punto E?

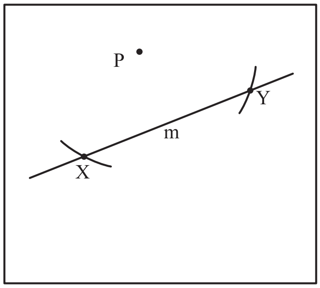
La construcción que se presenta a continuación será de utilidad para resolver el siguiente problema.

Construcción 7. Perpendicular a una recta desde un punto externo a esta

Paso 1. Sea P el punto dado y m la recta dada.

Paso 2. Centrado en P y con cualquier radio, marque arcos que intersecten a m en X y Y.



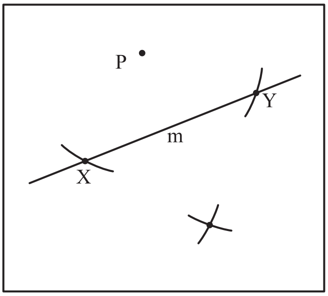


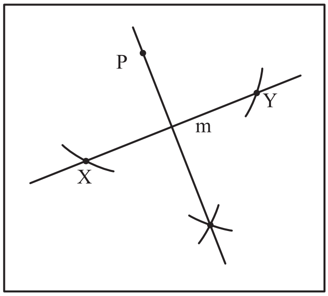
Paso 1

Paso 2

Paso 3. Centrado en *X* y luego en *Y*, con radio mayor que la mitad de *XY*, dibuje arcos en el semiplano determinado por *m* en el que no está *P*.

Paso 4. Trace una recta por *P* y el punto de intersección de los arcos.





Paso 3

Paso 4

5.Construya un triángulo isósceles, ΔABC, tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Luego construya la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$.

a. ¿Qué relación existe entre los segmentos determinados por el extremo de la altura en el $\overline{BC}$?

b. Repita el ejercicio con otro triángulo isósceles y exprese su conjetura.

6. Dibuje cualquier triángulo.

a. Halle el punto medio de cualquier par de lados y trace el segmento con extremos esos puntos.

b. ¿Qué relación existe entre ese segmento y el tercer lado?

c. Repita el ejercicio con dos triángulos más.

d. Escriba una conjetura al respecto.

7. Escriba una conjetura sobre la mediatriz de un segmento.

4.2 Cuadriláteros: algunas conjeturas

1. Construya el cuadrilátero descrito en cada literal. ¿Obtiene solamente ejemplos de algún tipo de cuadrilátero especial? Si es el caso, escriba una conjetura que recoja lo sucedido. Si no, represente en una hoja de papel los distintos tipos de cuadriláteros que obtuvo.

a. Cuadrilátero en el cual las dos diagonales son congruentes.

b. Paralelogramo con un ángulo recto.

c. Cuadrilátero con ángulos adyacentes suplementarios.

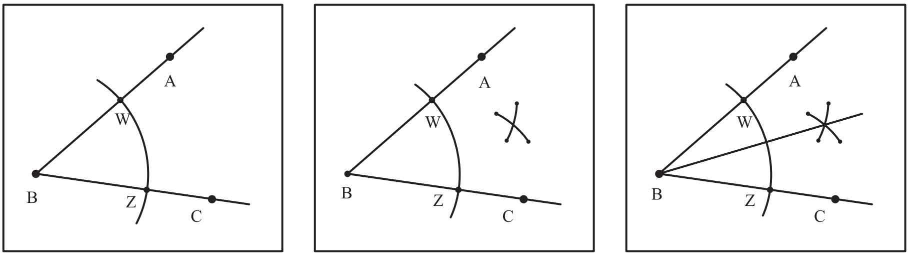
Se introduce otra construcción que será de utilidad para resolver el problema planteado en el numeral 2.

Construcción 8. Bisectriz de un ángulo

Paso 1. Dado el $\angle ABC$ y centrado en B, dibuje un arco que intersecte los dos lados del ángulo en W y Z.

Paso 2. Centrado en W y luego en Z, con el mismo radio, dibuje arcos que se intersequen en el interior del ángulo.

Paso 3. El rayo con extremo en B y que contiene al punto de intersección de los arcos es la bisectriz del ángulo.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

2. Construya varios tipos de cuadriláteros.
   a. ¿Qué relación existe entre las bisectrices de dos ángulos consecutivos del cuadrilátero? Escriba una conjetura.
   b. ¿Qué relación existe entre las bisectrices de dos ángulos opuestos del cuadrilátero? Escriba una conjetura.

3. Para cada descripción dada en la tabla, construya en papel translúcido un triángulo que cumpla las características enunciadas. Doble el papel sobre el lado del triángulo indicado en la tabla, y calque la imagen de este. Desdoble el papel y retiña los lados para que se forme un cuadrilátero.

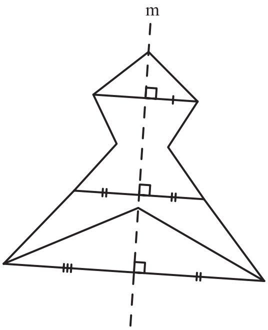
Tipo de triángulo	**Doblez**
Triángulo equilátero	Cualquier lado
Triángulo rectángulo	Hipotenusa
Triángulo isósceles (no rectángulo)	Cualquier lado
Triángulo escaleno (no rectángulo)	Cualquier lado

Observe los cuadriláteros formados. Todos ellos son kuids. Anote las características comunes a todos los kuids.

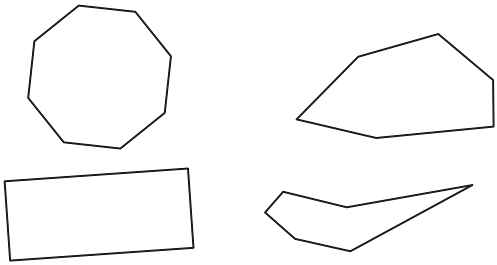
Para precisar lo que es un eje de simetría de una figura, considérese la siguiente definición e ilustración gráfica.

Una recta m es **eje de simetría de una figura** si para cada punto B de la figura, diferente a un punto de intersección de m con la figura, existe un punto C en la figura tal que m es mediatriz del $\overline{BC}$.

En la figura, la recta *m* es eje de simetría.



4. ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen eje de simetría? ¿Cuántos ejes de simetría tiene?



5. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado? ¿Una circunferencia?

6. Dibuje cualquier figura geométrica y una recta *m*. Complete la figura para que *m* sea eje de simetría de la figura completa.

7. Los kuids tienen ejes de simetría. Esa característica facilita la construcción de kuids con geometría dinámica, si se usa la herramienta *Simetría axial* o *Reflection*. Construya un kuid usando geometría dinámica. Determine si las características establecidas en el numeral 3 son válidas para todos los kuids.

8. Defina kuid.

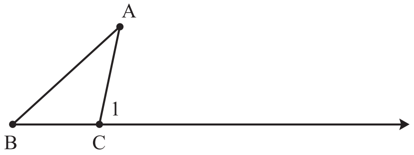
9. Usando geometría dinámica, determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe.

a. ¿Los kuids tienen dos pares de lados paralelos?

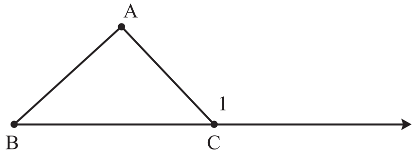
b. ¿Las bisectrices de un par de ángulos opuestos del kuid tienen más de un punto en común?
c. ¿Una diagonal del kuid biseca a la otra?
d. En un kuid, ¿la recta que contiene una de las diagonales es mediatriz de la otra diagonal?
e. ¿Las diagonales de un kuid son congruentes?
f. ¿Las mediatrices de lados opuestos de un kuid son paralelas?

4.3 ¿Toda conjetura es verdadera?

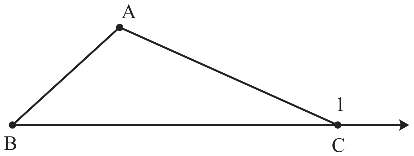
1. Considere la siguiente representación gráfica:



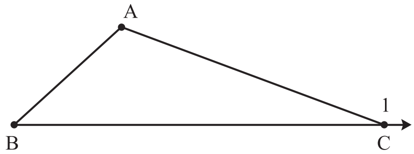
i.



ii.



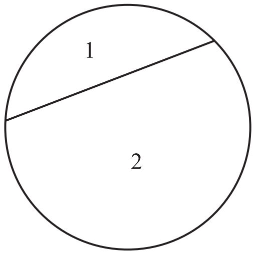
iii.

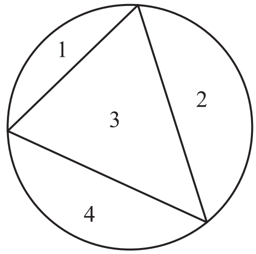


iv.

a. A través de la simple observación, indique, en cada caso, la relación que existe entre las medidas de $\angle A$ y $\angle 1$.
b. Si en la última representación, se hace que el punto C se aleje, cada vez más del punto B, ¿se puede asegurar que las medidas de $\angle A$ y $\angle 1$, en cada momento, mantienen la relación descrita al inicio del ejercicio?
c. Represente la situación en geometría dinámica y estudie la relación entre las medidas de $\angle 1$ y los ángulos del triángulo.
d. Escriba una conjetura.

2. Si se escoge un conjunto de puntos sobre una circunferencia y se dibujan todos los segmentos posibles entre ellos, el círculo queda dividido en varias regiones, como se ilustra en la siguiente página.



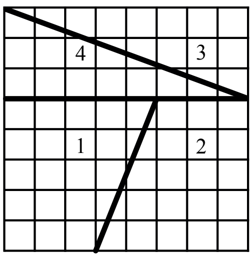


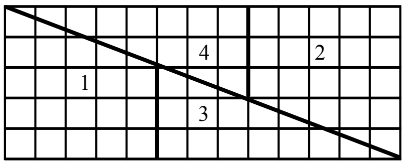
a. Realizando diagramas como los anteriores, complete la tabla indicada.

Número de puntos	Cantidad máxima de regiones	Número de regiones expresado como potencia de 2
2		
3		
4		
5		

b. ¿En cuántas regiones quedará separado el círculo si se toman seis o siete puntos? Compruebe su respuesta. Elabore una conjetura.

3. Examine la siguiente figura, en la cual se muestra cómo, usando los pedazos en los cuales se corta el cuadrado, se construye el rectángulo.





a. Calcule el área del cuadrado y del rectángulo. ¿Qué concluye?

b. Copie la primera figura en papel cuadriculado, haga las divisiones correspondientes y corte las cuatro piezas. Construya el rectángulo ilustrado. ¿Qué opina?

4. Considere la siguiente situación y las variantes que se describen:

a. Tome una tira angosta de papel y pegue los extremos. Corte el papel longitudinalmente por la mitad de la tira. ¿Qué sucede?

b. De nuevo, tome una tira de papel. Voltee un extremo del papel antes de pegarlo al otro extremo. Si cortara la tira, al igual que en el paso a, ¿qué cree que sucederá? Efectúe el corte y verifique su respuesta.

c. ¿Qué pasará si efectúa un nuevo corte como lo ha venido haciendo? Verifique su respuesta realizando el corte.

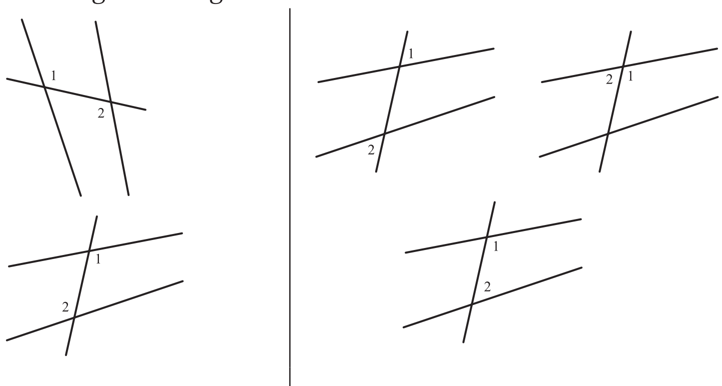
5. ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Z y X son puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $\overline{CZ} \cong \overline{BX}$. Sea P el punto de intersección de $\overline{BX}$ y $\overline{CZ}$. ¿Es $PX = PZ$? Escriba una conjetura.

4.4 Justificación de conjeturas

1. Construya $\angle EFG$ y $\angle EFH$ par lineal tales que $\angle EFG \cong \angle EFH$. Escriba una conjetura y justifíquela.

2. Construya una recta y los puntos A, B y C tales que A-B-C. Sean D y E dos puntos en semiplanos diferentes determinados por la $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $\angle DBC \cong \angle EBC$. ¿Qué relación existe entre $\angle DBA$ y $\angle EBA$? Justifique su conjetura.

3. Observe la siguiente figura.



$\angle 1$ y $\angle 2$ son alternos internos | $\angle 1$ y $\angle 2$ no son alternos internos

a. Enuncie las características que tienen los ángulos alternos internos.

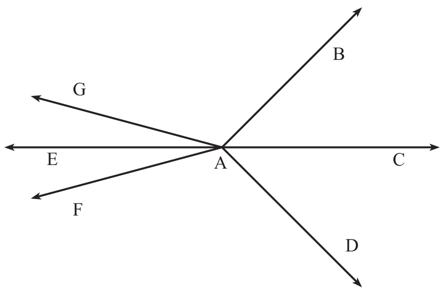
b. Analice la siguiente definición de ángulos alternos internos y determine si es correcta. Si no lo es, sugiera cómo transformarla.

Dadas dos rectas y una trasversal, $\angle A$ es alterno interno con $\angle B$ si uno de ellos es opuesto por el vértice a un ángulo que es correspondiente con el otro ángulo.

4. Usando hechos geométricos dados anteriormente, justifique la siguiente afirmación.

HG ángulos alternos internos congruentes. Si dos rectas intersecadas por una trasversal determinan dos ángulos alternos internos congruentes entonces, son paralelas.

5. En la figura se tiene que $\angle BAC$ y $\angle BAE$ son par lineal, $\angle CAD$ y $\angle DAE$ son par lineal, $\angle BAC \cong \angle DAC$ y $\angle GAE \cong \angle FAE$.



a. ¿Qué relación existe entre $\angle GAB$ y $\angle FAD$? Formule una conjetura.
b. Usando el **HG ángulos adyacentes no par lineal** y el diagrama-deducción, justifique su conjetura.

6. Usando el diagrama-deducción, demuestre que el segmento con extremos en los puntos medios de dos lados de un triángulo tiene como medida la mitad de la longitud del tercer lado. Para ello tome como verdadero el siguiente hecho geométrico:

HG de segmento puntos medios lados de un triángulo. Si un segmento tiene extremos en los puntos medio de dos lados de un triángulo, entonces es paralelo al tercer lado del triángulo.

4.5 Puntos notables de un triángulo

1. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. Si la respuesta es No o No se sabe, determine las condiciones para establecer una conjetura verdadera. Escriba la conjetura.

a. Dado el ΔDEF, ¿el punto de intersección de las medianas, denominado centroide, está en el interior del triángulo?

b. ¿El centroide de un triángulo determina en cada mediana segmentos cuyas longitudes están en una relación de 1 a 2?

c. Dado el ΔABC, ¿el punto de intersección de las mediatrices está en el triángulo?

d. Dado el ΔJHK, ¿la distancia del vértice del ángulo de mayor medida del triángulo al punto de intersección de las mediatrices es mayor que la distancia de dicho punto a los demás vértices?

e. Dado el ΔMNO, ¿el punto de intersección de las bisectrices está en el exterior del triángulo?

f. Dado el ΔPQR, S, T y U puntos de $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$, respectivamente, ¿es la distancia del punto de intersección de las bisectrices a S, T y U menor cuando ellos son los puntos medio del lado respectivo?

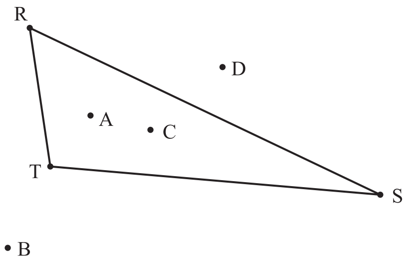
g. Dado el ΔWXY, ¿sus alturas se intersecan?

2. ¿Cómo definiría la distancia de un punto P a una recta m, si P no pertenece a la recta? Explique su respuesta.

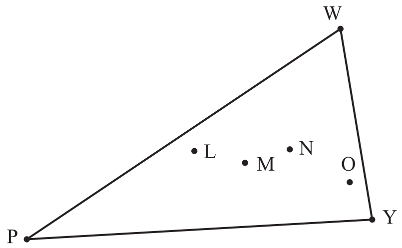
3. Explique por qué el punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro y el de las bisectrices, incentro.

El *centroide*, el *circuncentro* y el *incentro* se dicen *puntos notables de un triángulo*.

4. En cada triángulo están marcados los puntos notables.



i.



ii.

a. Identifique cada uno de los puntos notables a simple vista. Justifique su respuesta.

b. Descubra una relación entre tres de los puntos. Establezca una conjetura.

5. Determine el tipo de triángulo para el cual los tres puntos notables y el punto de intersección de las rectas que contienen las alturas de un triángulo, llamado ortocentro, son colineales.

6. Los puntos notables que son colineales determinan *la recta de Euler*. En el segmento determinado por los puntos colineales, compare las longitudes de las dos partes en que está dividido. Escriba una conjetura que exprese lo que descubrió.

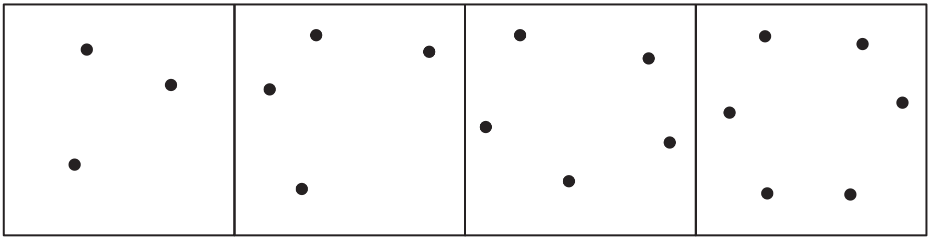
7. En un triángulo acutángulo escaleno, la circunferencia de Euler o de los nueve puntos, contiene los siguientes puntos: el punto medio de cada lado; el punto de intersección de cada altura con el lado correspondiente y el punto medio del segmento de cada vértice al ortocentro. El punto medio del segmento con extremos el circuncentro y el ortocentro es el centro de la circunferencia. Construya un triángulo acutángulo y la circunferencia de Euler correspondiente.

8. Construya un triángulo equilátero. ¿Para cuál punto en el interior del triángulo se tiene que la suma de sus distancias a los tres lados del triángulo es máxima? Escriba una conjetura.

9. Determine si es verdadera la siguiente afirmación: *El circuncentro de un triángulo coincide con el ortocentro de otro triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo original.*

Tareas complementarias

1. Considere las siguientes cuatro configuraciones de puntos:



i. ii. iii. iv.

a. ¿Cuántos segmentos pueden dibujarse que tienen extremos en los puntos en cada numeral?

b. Si hay siete puntos, de los cuales ningún trío de puntos son colineales, ¿cuántos segmentos pueden dibujarse con extremos en los puntos?

c. Escriba una conjetura.

2. Escriba una conjetura que sea resultado del siguiente proceso:

a. Dibuje una circunferencia y marque su centro.

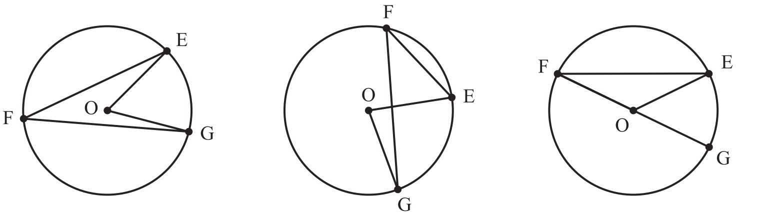
b. Dibuje dos cuerdas distintas.

c. Construya la mediatriz de cada cuerda y determine su punto de intersección.

d. Repita el ejercicio con otra circunferencia.

3. Escriba una conjetura que sea resultado del siguiente proceso:

a. Dibuje tres circunferencias de igual radio y llame O al centro. Dibuje el ángulo central $\angle EOG$ y el ángulo inscrito $\angle EFG$ según cada esquema dado a continuación.



b. En cada caso, con un transportador mida los ángulos. ¿Qué relación existe entre las medidas de estos ángulos?

4.Construya un triángulo cualquiera.

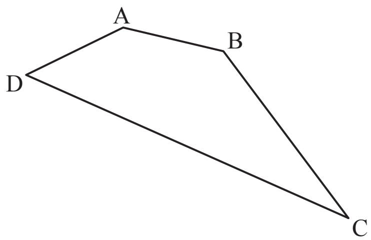
a. Sobre cada lado construya un triángulo equilátero.

b. Construya los centroides de los triángulos equiláteros.

c. Construya los segmentos cuyos extremos sean dichos centroides. ¿Qué tipo de triángulo se forma? Escriba una conjetura.

d. ¿Qué pasa si la figura inicial es un cuadrilátero y se construyen sobre los lados triángulos equiláteros?

5. Explique cómo encontrar, en la siguiente figura, cada uno de los puntos descritos a continuación. Haga la construcción correspondiente.



a. Un punto equidistante de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ y que, a la vez, sea equidistante de *D* y *C*.

b. Un punto equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$.

6. Construya el ΔABC y un punto *D* tal que *A-D-C*. Construya una recta paralela a $\overline{CB}$ que contenga a *D* y sea *E* el punto de intersección de tal paralela con el $\overline{AB}$; construya ahora $\overline{CE}$ y $\overline{DB}$. Sea *P* el punto de intersección de dichos segmentos. ¿Qué ocurre con el punto *P* cuando se mueve el punto *D*?

7. Dado el ΔABC, construya las bisectrices del $\angle ABC$, del $\angle CAB$ y la recta que contiene la bisectriz de uno de los ángulos externos con vértice en C. ¿Las bisectrices y las rectas construidas cortan en tres puntos a las respectivas rectas que contienen los lados opuestos a cada uno de los vértices del triángulo? ¿Qué relación tienen estos puntos de intersección? Escriba una conjetura.

Nota histórica

La geometría era inicialmente una ciencia empírica, en la cual todos los conocimientos eran conjeturas. Hasta la época de los griegos, no se sintió la necesidad de demostrar dichas conjeturas. Fue en la organización de los conocimientos geométricos dentro del marco de un sistema axiomático que se validaron algunas de ellas y se refutaron otras. De este modo se construyen las teorías matemáticas.

El matemático francés, Pierre de Fermat (1601-1665), formuló muchos teoremas y conjeturas, algunas de las cuales aún hoy no se han podido demostrar. Su tema favorito fue la Teoría de Números. Curiosamente, Fermat nunca publicó los resultados de sus estudios. Estos fueron encontrados, después de su muerte, en hojas sueltas o en el margen de su copia del libro Aritmética de Diofanto. Entre las conjeturas que formuló se encuentran las tres siguientes:

$N_p = 2^{2^p} + 1$, donde p es un número natural, es una fórmula para generar números primos.

Si a es un entero no divisible por un número primo p, entonces $a^{p-1} - 1$ es divisible por p.

Ningún número que sea potencia mayor que la segunda puede ser suma de dos potencias semejantes, es decir, no existen enteros x, y, y z tal que $x^n + y^n = z^n$, para n un natural mayor que 2.

Esta última conjetura se conoce como “el último teorema de Fermat”. Él escribió en el margen del libro mencionado, la siguiente frase con respecto a esta conjetura, “He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición que este margen es demasiado estrecho para contener.”

Cien años más tarde, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) demostró que la primera conjetura no era válida al comprobar que N_5 no es un número primo pues 641 lo divide. Desde entonces se ha demostrado que para p = 6,7,8,9,11,12,18,23,36,38 y 734, entre otros, N_p no es un número primo. A la vez, Euler publicó demostraciones de la segunda y de la tercera conjetura, para n = 3, siendo la demostración de esta última errónea. Con el uso de un computador, en 1970, se demostró el último teorema de Fermat para los números naturales menores a 125 000. Finalmente, el 22 de junio de 1993, en Cambridge, Andrew Willes presentó una demostración del teorema. Esta ocupaba más de mil páginas y no estaba completa. Dos años más tarde, Willes entrega la prueba completa del último teorema de Fermat.

En el campo de la geometría, una conjetura muy famosa es la denominada Conjetura de los Cuatro Colores, intuida en 1852 por Francis Guthrie, quien al colorear un mapa de Inglaterra se dio cuenta que era suficiente usar cuatro colores diferentes. Él le comentó a su hermano Frederick Guthrie, quien formula la conjetura y se la comunica a De Morgan: "Todo mapa puede ser coloreado con cuatro colores de tal manera que regiones con fronteras comunes tienen distinto color". El primer intento de prueba lo hace Kempe en 1878, pero once años más tarde Heawood indica que es incorrecto. En 1880, Tait produce otra demostración, la cual en 1891 es refutada por Peterson. Ambas demostraciones son valiosas para la matemática porque en ellas se introducen nuevos conceptos matemáticos. Usando los avances logrados por Birkhoff, en 1922, Franklin demuestra el teorema para mapas que tienen a lo más 25 regiones y Heesch desarrolla dos herramientas cruciales que serían posteriormente usadas en la demostración de la Conjetura de los Cuatro Colores hecha por Appel y Hakem en 1976. Sin embargo, aún hoy existen matemáticos que no consideran satisfactoria la demostración porque en parte de ella se hace uso del computador y no puede ser verificada manualmente.

Capítulo 5

Acercamiento a los conceptos de congruencia y semejanza

> Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras deben relacionarse de manera armoniosa.
>
> **G. H. Hardy**

Entre las relaciones importantes que se estudian en la geometría están las de paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza. Las nociones de semejanza y congruencia son usadas en forma práctica tanto por el artesano como por el ingeniero y el arquitecto. Los primeros para elaborar y decorar objetos, entre otros, de cerámica, forja o ebanistería; los segundos, en el diseño de fachadas, en la elaboración de maquetas y en la ejecución de obras arquitectónicas o de ingeniería.

En este capítulo se hace una aproximación, desde la matemática, a los conceptos de semejanza y congruencia, estructurando la idea intuitiva que se maneja en el contexto cotidiano. La experiencia con material manipulable, el uso de la geometría dinámica y los cuestionamientos que se establezcan del análisis de las relaciones que con dicho material se puedan estudiar, conlleva a la elaboración, como conjeturas, de los postulados que permiten asegurar la congruencia de dos triángulos. Dada la simplicidad y belleza teórica de estos conceptos, se usarán para justificar, de forma intuitiva, propiedades respecto a ángulos, segmentos y triángulos, comenzando así el camino hacia la demostración formal.

5.1 El tangram

En esta actividad, usando construcciones con regla y compás, se harán las siete piezas de un tangram. Este es un juego chino llamado Chih-hui-pan, descubierto hace más de 1000 años. Según la leyenda, un hombre llamado Tan dejó caer una baldosa cuadrada la cual se partió en siete pedazos. Al tratar de reconstruirla, Tan descubrió que surgían varias formas distintas. Decidió tratar de crear figuras de animales, personas, objetos y formas abstractas. Hoy en día, se conocen por lo menos 16000 patrones distintos que pueden construirse con estas piezas. Aquí usaremos el juego para afianzar conceptos geométricos.

Con las instrucciones que se dan a continuación, primero haga un bosquejo en una hoja de papel, para usarlo como referencia al hacer las construcciones en un cartón. No haga los cortes mencionados en el modelo de papel.

> Paso 1. Construya un cuadrado de 8 cm de lado centrado en el cartón. Denomine los vértices B, C, D y E enumerados en el sentido del reloj.
> Paso 2. Dibuje ambas diagonales y llame G a su punto de intersección.

En lo que sigue, se trabajará solamente sobre el ΔCDE.

> Paso 3. Construya la mediatriz de $\overline{GD}$, llamando I su intersección con $\overline{ED}$ y H su intersección con $\overline{CD}$. Denote por T a la intersección de estos segmentos.
> Paso 4. Construya el segmento perpendicular por I a $\overline{EG}$ y denote por K el pie de este.
> Paso 5. En el trapecio $GTHC$, dibuje el segmento $\overline{GH}$ y construya el segmento perpendicular a este por el vértice T. Denote por L el corte de este con $\overline{GC}$.
> Paso 6. Corte el cuadrado. Corte por la diagonal $\overline{EC}$, formando ΔCDE y ΔBCE. En el ΔCDE recorte: el ΔEKI, el cuadrilátero $KITG$, el ΔIHD, el ΔGLT y el cuadrilátero $LTHC$. Corte por la diagonal ya dibujada, en el ΔBCE.

Con el tangram construido realice lo siguiente:

1. Construya la figura, usando las siete piezas del tangram, que sea exactamente igual a la imagen dada. (Anexos 1 y 2)
2. Ahora, construya figuras semejantes a las dadas. (Anexo 3)

La siguiente definición es útil para hacer el análisis que se solicita a continuación.

Definición. Dos polígonos son **congruentes** si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son congruentes.

Para indicar la congruencia entre dos polígonos se usa el símbolo $\cong$ y se nombran los vértices en el orden que indica la correspondencia de los vértices. Por ejemplo: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ significa que $A \to D$, $B \to E$ y $C \to F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$.

3. En un párrafo, analice la diferencia, frente a su experiencia, al realizar las construcciones de los ejercicios 1 y 2, y establezca el aporte de esta actividad para la construcción de los conceptos de congruencia y semejanza.

5.2 Los conceptos de semejanza y congruencia

1. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. Justifique su respuesta.

a. Los polígonos A y B son congruentes. ¿Son los polígonos semejantes?

b. Los polígonos A y B son semejantes. ¿Son los polígonos congruentes?

c. Los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados y $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. ¿Son los cuadriláteros congruentes?

d. Los cuadriláteros $PQRS$ y $TUVW$ son rectángulos. ¿Son los cuadriláteros semejantes?

e. Los cuadriláteros $HIJK$ y $MNOP$ son cuadrados. ¿Son los cuadriláteros semejantes?

f. ΔABC y ΔGHJ son isósceles. ¿Son semejantes?

g. ΔKLM y ΔRST son equiláteros. ¿Son semejantes?

h. ¿Es el polígono C congruente a sí mismo?

i. ΔTHE y ΔNOM son rectángulos. ¿Son congruentes?

2. Construya el ΔABC con D un punto entre A y B, y E un punto entre A y C tal que $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se intersecan en F.

a. ¿Cuál debe ser la posición de D para que $FB \cdot CE = FC \cdot EA$?

b. Coloque a D en la posición determinada en el ítem a) y al punto E tal que $AE > EC$. Construya la recta m por C paralela a la $\overleftrightarrow{AB}$. Sea P el punto de intersección de m y $\overline{EF}$. ¿Qué pares de triángulos semejantes se forman? Justifique su respuesta.

c. Escriba las proporciones que resultan de la semejanza de los triángulos del ítem b). Úselas para mostrar por qué la ecuación del ítem a es verdadera.

3. Construya el ΔPQR. Escoja cualquier punto X en el plano y con Edición numérica escriba un número entre 0 y 2 diferente a 1. Aplique la herramienta Homotecia (o Dilation) haciendo la selección de los objetos en el siguiente orden: figura, número y punto.

a. ¿Qué observa? Escriba una conjetura. Nombre la figura resultante usando P', Q', R'.

b. Identifique los puntos que son libres y el efecto que tiene el arrastre de ellos sobre las figuras.

c. ¿Qué sucede cuando se cambia el número?

d. ¿Qué relación tiene X con los vértices de las figuras?

e. Encuentre XP y XP', y encuentre la relación entre estas distancias y el número dado. ¿Se cumple esa relación para XQ y XQ', y para XR y XR'?

f. Utilice el diagrama-deducción y el siguiente hecho geométrico para justificar que $\Delta Q'XR' \sim \Delta QXR$.

HG de criterio de semejanza LAL. Dados los ΔABC y ΔDEF tales que $\angle B \cong \angle E$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

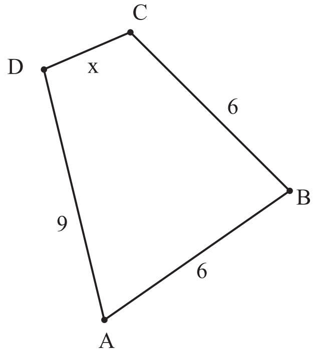
g. Con base en el mismo argumento utilizado en el ítem f), ¿qué otras parejas de triángulos puede justificar que son semejantes?

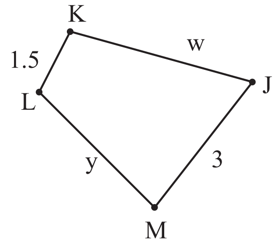
h. Explique por qué lo anterior permite afirmar que la conjetura inicial es verdadera.

4. $\Delta ADC \sim \Delta PSR$, B es un punto en $\overleftrightarrow{AD}$ y Q un punto en $\overleftrightarrow{PS}$. ¿Qué propiedad deben tener los puntos B y Q para que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$? Justifique su respuesta.

5.3 Uso de semejanza

1. Suponga que $\square ABCD \sim \square JMLK$ son semejantes.





Halle las medidas de los lados que faltan.

2. $\Delta SBM \sim \Delta TCN$, $SB = 7$, $TC = 9$ y el perímetro de $\Delta SBM = 63$. Halle el perímetro de ΔTCN.

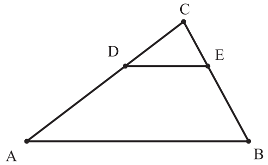
3. Los perímetros de los triángulos semejantes ΔJRE y ΔKQD son 28 y 42, respectivamente y $DK = 18$. Halle EJ.

4. Usando el diagrama-deducción, los hechos geométricos aceptados y los criterios y definición de semejanza, realice los siguientes ejercicios. Para cada ítem, ver la figura al final.

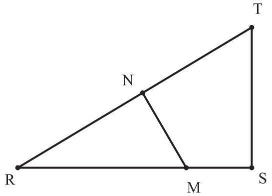
a. En el ΔABC, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Explique por qué $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

b. En el ΔRST, $\overline{ST} \perp \overline{RS}$ y $\overline{MN} \perp \overline{RT}$. Explique por qué $\Delta RMN \sim \Delta RTS$.

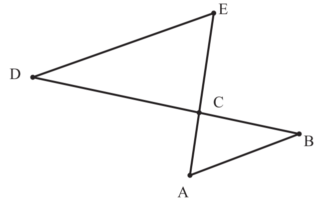
c. En la figura, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Explique por qué: $DC \times AC = EC \times BC$.



a)



b)

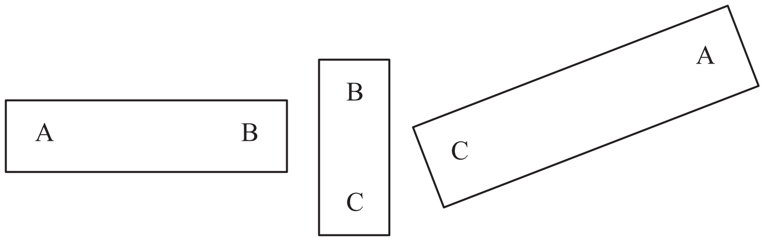


c)

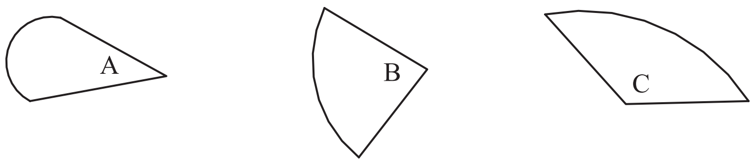
5.4 El concepto de congruencia

Conforme un grupo de tres personas. Algún miembro del grupo dibuja, en papel sin líneas, un triángulo acutángulo de tamaño mediano; otro, un triángulo obtusángulo y, el tercero, un triángulo rectángulo, denotando los vértices con las letras *A*, *B* y *C*. Cada miembro del grupo realiza las actividades que se enuncian a continuación.

1. Sobre cartón paja, copie, usando regla y compás, cada lado para formar una regleta de la longitud correspondiente y del ancho que crea conveniente, marcando los vértices como se muestra a continuación. Recorte las tres regletas.



2. Usando la regla y el compás, copie cada ángulo por separado, en el cartón. Recorte el molde del ángulo y demarque el vértice con la letra correspondiente.



3. Intercambie las seis piezas, regletas y moldes, con otra persona que no sea de su grupo, para realizar las siguientes acciones.

   a. Construyan triángulos, si es posible, a partir de los elementos indicados en cada caso, haciendo que concuerden las letras correspondientes en los materiales utilizados. Por ejemplo, si usan la regleta *AB* y el ángulo *A*, el vértice del ángulo y el extremo del segmento deben coincidir en *A*. En cada caso, no se limiten a una sola combinación de los elementos solicitados; por ejemplo, cuando trabajen con un lado y un ángulo, examinen el resultado cuando el ángulo comparte el vértice con un extremo del segmento y cuando no lo comparte. Indiquen el nombre de los ángulos y lados que utilizan. ¿Cuántos triángulos diferentes pueden armar con las piezas escogidas?

Delinee cada triángulo construido en una hoja.

- Caso 1. Dos ángulos cualesquiera.
- Caso 2. Dos lados cualesquiera.
- Caso 3. Un lado y un ángulo cualquiera.
- Caso 4. Tres lados.
- Caso 5. Tres ángulos.
- Caso 6. Dos lados cualesquiera y un ángulo cualquiera.
- Caso 7. Dos ángulos cualesquiera y un lado.

b. Solicite el triángulo original correspondiente al material que recibió y compárelo con los triángulos que obtuvo. Complete la siguiente tabla:

Piezas	Observaciones	Conclusiones
1. Dos ángulos cualesquiera		
2. Dos lados cualesquiera		
3. Un lado y un ángulo cualquiera		
4. Tres lados		
5. Tres ángulos		
6. Dos lados cualesquiera y un ángulo cualquiera		
7. Dos ángulos cualesquiera y un lado cualquiera		

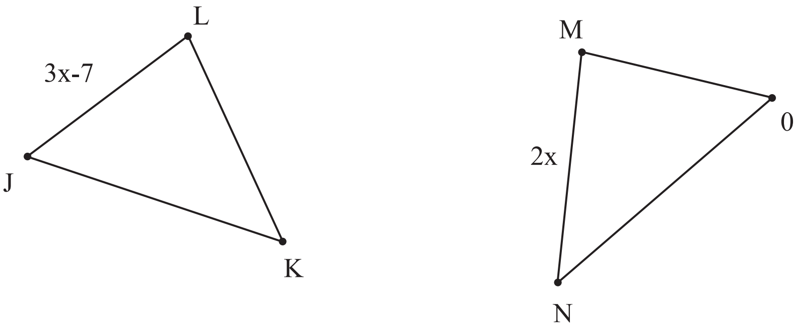
c. Escriba conjeturas acerca de lo analizado.

5.5 Uso de congruencias

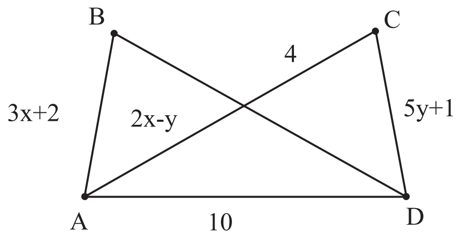
1. $\Delta JKL \cong \Delta NOM$.

   a. Halle JL y NM.

   b. Si MO es 35 unidades menos que $3NM$, halle KL.

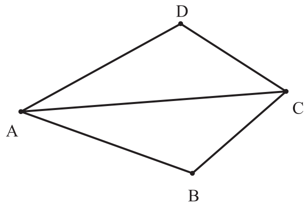


2. En la siguiente figura se tiene $\Delta ABD \cong \Delta DCA$. Si se sabe que $BD = 8$, y las longitudes de los otros segmentos se denotan en la figura, halle el valor de x y y.

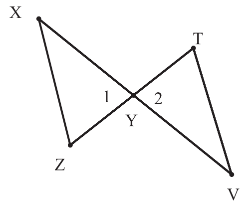


3. Usando el diagrama-deducción, los hechos geométricos aceptados y los criterios de congruencia, realice los siguientes ejercicios. Para cada ítem, ver figura al final.

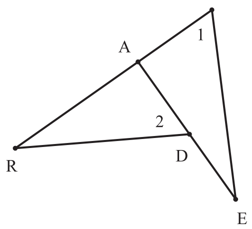
a. $\overline{AC}$ biseca a $\angle DAB$, $\overline{AC}$ biseca a $\angle DCB$. Explique por qué $\Delta ACD \cong \Delta ACB$.
b. $\overline{XV}$ y $\overline{ZT}$ se bisecan. Justifique la congruencia de ΔXYZ y ΔVYT.
c. Está dado que $\overline{HR} \perp \overline{AE}$, $\overline{AH} \cong \overline{AD}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$. Demuestre que $\Delta AHE \cong \Delta ADR$.
d. $\overline{BF}$ biseca a $\angle ABC$ y $ABCDE$ es un pentágono regular. Explique por qué $\Delta ABF \cong \Delta\ CBF$.



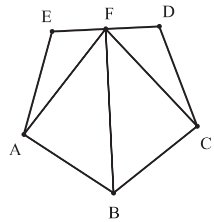
a)



b)



c)



d)

A veces, la meta de una demostración no es la congruencia de dos triángulos, sino de algunas de sus partes. Por eso, primero deben buscarse los triángulos que contienen las partes correspondientes, mostrar su congruencia para luego concluir que dichas partes son congruentes, usando la definición de triángulos congruentes.

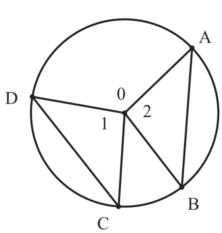
4. Haga uso del diagrama-deducción para explicar/justificar los siguientes enunciados. Las figuras correspondientes se dan al final.

a. O es el centro de la circunferencia y $\angle 1 \cong \angle 2$. Explique por qué $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

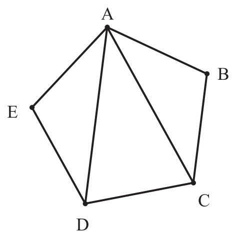
b. $ABCDE$ es un pentágono regular. Explique por qué ΔADC es isósceles.

c. Si $\overleftrightarrow{XO}$ es la mediatriz de $\overline{MP}$, justifique que ΔXMP es isósceles.

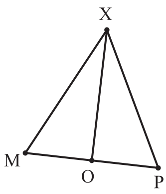
d. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$ y N es el punto medio de $\overline{AB}$. Explique por qué ΔCND es isósceles.



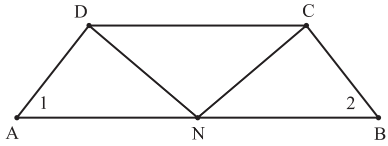
a)



b)



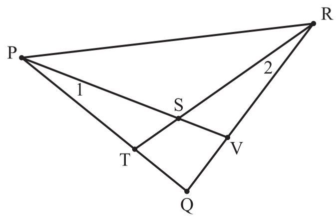
c)



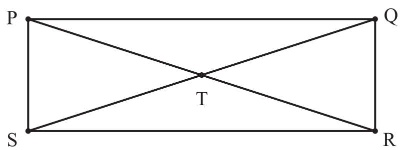
d)

En los siguientes ejercicios, los triángulos que se quieren mostrar congruentes pueden estar solapados.

5. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$ y $\overline{PV} \cong \overline{TR}$. Explique por qué $\overline{QT} \cong \overline{QV}$.



6. *PQRS* es un rectángulo con $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$. Explique por qué $\overline{QS} \cong \overline{RP}$.



7. La recta l es perpendicular al $\overline{BC}$, $A \in \overline{BC}$. Construya en Cabri las perpendiculares n y m al $\overline{BC}$ por B y C, respectivamente. Sean $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ tales que $\angle BAD \cong \angle CAE$ donde $D \in n$, $E \in m$ y D y E están del mismo lado de la $\overleftrightarrow{BC}$.

a. Para cada caso, formule una conjetura y justifíquela utilizando el diagrama–deducción.

- ¿Qué relación hay entre los triángulos que se forman?
- ¿Cuándo son congruentes los triángulos?

b. Construya $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ y sea $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{F\}$. Con la condición establecida para el ítem a), determine tres parejas más de triángulos congruentes.

Tareas complementarias

En cada numeral, se indica la congruencia entre algunos de los elementos de los triángulos. Usando esa información, justifique la congruencia de los triángulos. Utilice el diagrama-deducción.

1. En la Figura 1,

   a. Se tiene que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$, explique por qué $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

   b. Si se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$, explique por qué $\Delta ABD \cong \Delta\ CDB$.

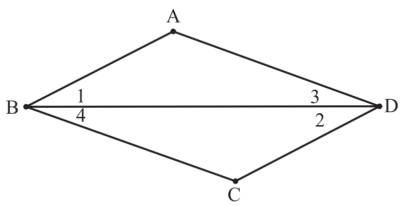


Figura 1

2. En la Figura 2, $\overline{EF} \cong \overline{GH}$.

   a. Explique por qué $\overline{EG} \cong \overline{FH}$.

   b. Si además, $\angle E \cong \angle HFI$ y $\angle EGD \cong \angle H$, justifique la congruencia entre ΔEDG y ΔFIH.

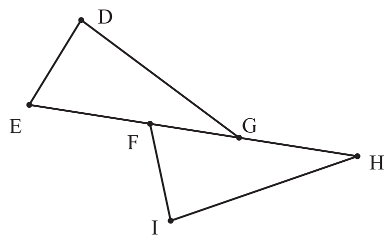


Figura 2

3. En la Figura 3,

   a. $\angle A \cong \angle C$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Explique por qué $\Delta CBE \cong \Delta ABD$.

   b. Si el punto de intersección $\overline{DA}$ y $\overline{CE}$ es F, decida si es posible demostrar que $\Delta DCF \cong \Delta EAF$.

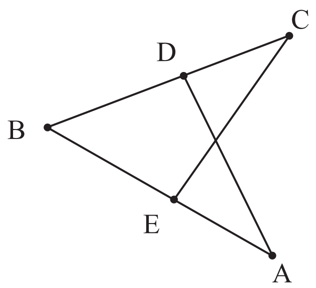


Figura 3

4. Está dado que $\overline{QS} \perp \overline{PR}$ y S es punto medio de $\overline{PR}$. Demuestre que $\Delta PSQ \cong \Delta RSQ$ (ver Figura 4).

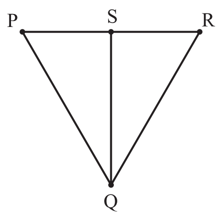
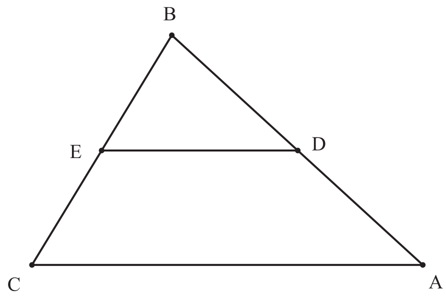


Figura 4

Nota histórica

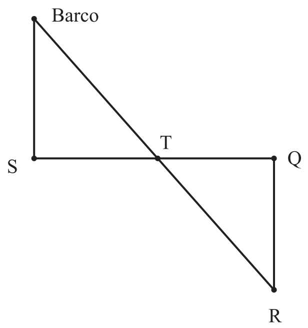
En las tablillas de barro de los babilonios y en los papiros egipcios se encuentran aplicaciones numéricas donde se evidencia el conocimiento que estas civilizaciones tenían de la proporcionalidad entre lados de triángulos semejantes.

Un problema hallado en una tableta mostraba cómo hallar BE, EC y ED conociendo AC, la diferencia entre las áreas del trapecio $EDAC$ y del ΔBED, y la diferencia entre BE y EC. En su solución se usa que $\Delta BED \sim \Delta BCA$.



Como en esta etapa del desarrollo del saber no existía la preocupación por demostraciones teóricas, se hacía uso de propiedades sin justificarlas. Con Tales de Mileto (624 – 547 a.C.) se presenta un cambio radical en el tratamiento del saber. Su contribución al desarrollo de la geometría es valiosa pues por primera vez se evidencia el esfuerzo por demostrar algunas de las propiedades consideradas válidas. A él se le atribuyen las demostraciones de cinco teoremas y la solución a dos problemas muy conocidos: determinar la distancia de una nave al puerto y la altura de una pirámide.

Puesto que uno de los teoremas que demostró Tales es el Criterio de Congruencia ALA, se cree que usó el siguiente esquema para resolver el primer problema. Un observador camina desde S hasta T, donde coloca una estaca, y luego, en línea recta, hasta Q de tal forma que $ST = TQ$. Luego camina sobre una recta perpendicular a $\overline{SQ}$ hasta el punto R donde ve la estaca y el barco alineados. Como los triángulos son congruentes, la distancia del barco al puerto es QR.



Según cuenta la leyenda, para solucionar el segundo problema, Tales colocó un palo en la tierra y esperó a que la longitud de su sombra fuese igual a la del palo. En ese momento, midió la longitud de la sombra de la pirámide, la cual es igual a la altura de esta. Aquí se ve el uso de la proporcionalidad de lados correspondientes de triángulos semejantes.

Hipócrates de Chios (460 – 380 a.C.) compila el primer texto de Geometría del que se tenga noticia. Aun cuando no existe copia de dicho texto, se sabe que Aristóteles lo conoció y que fue estudiado por generaciones, sirviendo, tal vez, como fuente para el libro *Elementos* de Euclides, escrito 100 años más tarde. *Elementos* consta de trece libros. Los temas del primer libro son la congruencia de triángulos, rectas paralelas y áreas de figuras planas. En él, la proposición 4 es, precisamente, el criterio de congruencia LAL, la proposición 8, corresponde al criterio LLL y la proposición 26, al criterio ALA. El quinto libro se dedica a la proporcionalidad y el sexto, al uso de proporciones en el contexto de magnitudes, usando triángulos semejantes.

Capítulo 6

Transformaciones y teselaciones

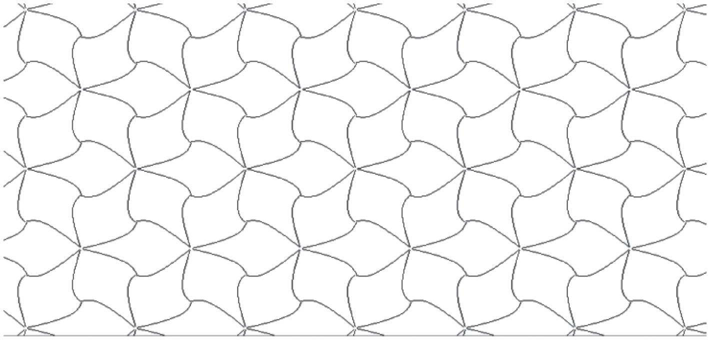
> La abstracción, a veces lanzada como reproche a la matemática, es su principal gloria y su más seguro título a la utilidad práctica. Es también fuente de cuan belleza pueda surgir de la matemática.
>
> **Eric Bell Temple**

Desde épocas prehistóricas es evidente el deseo del hombre por representar el movimiento de figuras con dibujos bidimensionales. Esto se evidencia en los trazos hallados en cuevas que representan animales y personas en acción. Es el movimiento lo que impulsa el progreso de civilizaciones, ya sea a través del desarrollo de artefactos que realizan tareas específicas o en procesos que permiten la expresión artística. Como suele suceder, la matemática se convierte en herramienta para expresar y estudiar las propiedades de los distintos tipos de movimiento.

En este capítulo, inicialmente se presentan actividades para descubrir los diferentes tipos de movimientos de figuras que se pueden realizar en el plano, los elementos que ellos requieren y las propiedades que cumplen, para luego establecerlos como conceptos matemáticos. Finalmente, se usarán dichos movimientos con fines artísticos.

6.1 ¿Cuál es el patrón?

1. En la siguiente figura, delinee una forma básica que sirva para reproducir toda la figura. Haga un molde de ella y reproduzca la siguiente figura en una hoja en blanco. Explique cómo lo usa para hacerlo.



2. Repita el ejercicio anterior con otras dos formas básicas, delineándolas con colores diferentes.

6.2 Movimiento orientado

1. En la pantalla del computador

   a. Construya un vector y un rayo. ¿En qué difieren las representaciones?

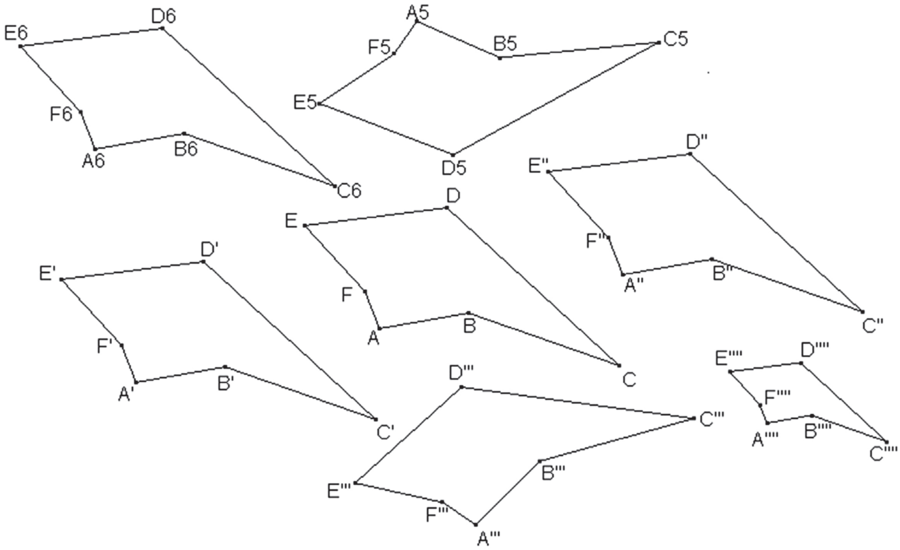
   b. ¿En qué difieren las representaciones de un segmento y un vector?

   c. Interprete el icono de la herramienta traslación y establezca los elementos que se necesitan para realizar una traslación.

   d. Construya cualquier cuadrilátero *ABCD*.

   e. Aplique la función *Traslación* a la figura y nombre los vértices de la figura resultante *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, de tal forma que correspondan con los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

2. Determine cuáles de las siguientes figuras se obtienen a partir de una traslación de la figura *ABCDEF*. Explique su decisión. Para aquellas figuras que son resultado de una traslación, describa cómo obtener cada figura usando regla y compás.



3. Es necesario precisar el concepto de traslación de una figura.

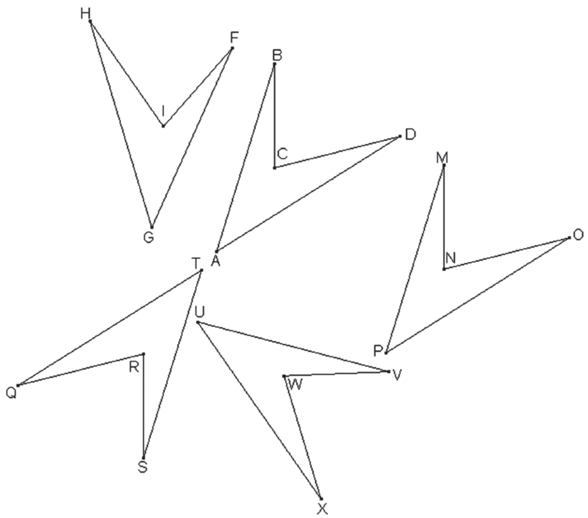
   a. ¿Qué propiedades tiene la imagen de una figura bajo una traslación?

   b. Defina traslación.

6.3 Un espejo

1. Construya cualquier cuadrilátero *ABCD* y una recta. Aplique la función *Reflection* o *Simetría axial* a la figura y nombre los vértices de la figura resultante *A ’B ’C ’D ’* de tal forma que éstos se correspondan con los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. ¿Qué relación hay entre la recta y los puntos que se corresponden?

2. En la siguiente representación, encuentre parejas de figuras tales que una de ellas se haya obtenido de la otra usando la función *Simetría axial*. Para aquellas que tienen esta relación, identifique la recta correspondiente (eje de reflexión) y describa cómo obtener la imagen usando regla y compás.



3. Con el propósito de precisar el concepto de reflexión de una figura, realice las siguientes tareas:

a. ¿Qué propiedades tiene la imagen de una figura bajo una reflexión?

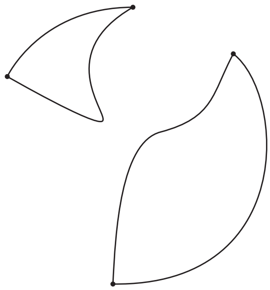
b. Defina reflexión.

c. ¿Qué relación hay entre la reflexión y figuras con simetría axial?

6.4 Movimiento circular

1. Las siguientes piezas son parte de un plato que se ha roto. Pedro es un artesano que elabora objetos en cerámica y quiere construir un plato igual al que se rompió. Para ello, necesita usar un torno (ver figura) y demarcar en él una circunferencia del mismo tamaño del plato.

a. ¿Cómo debe proceder Pedro para encontrar el radio de tal circunferencia?



b. Describa el proceso que debe seguir Pedro para moldear el plato.

2. Un ángulo central determina dos arcos en una circunferencia, uno mayor y uno menor.

a. Defina arco mayor y arco menor.

b. ¿Puede definirse semicircunferencia de la misma forma?

c. Teniendo en cuenta los siguientes hechos geométricos y la siguiente definición, defina la medida de arco mayor.

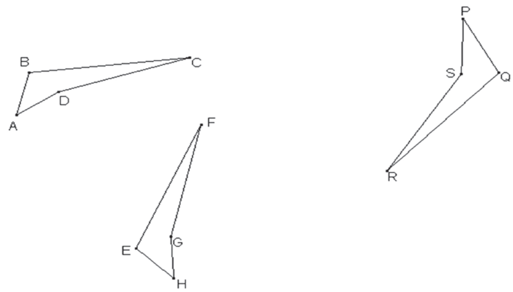
HG medida de arcos. La medida del arco de semicircunferencia es de 180 y la medida de arco de cualquier circunferencia es 360.

HG suma de medidas de arcos. Si *B* es un punto del arco *AC*, entonces la medida del arco *ABC* es igual a la suma de la medida de cada uno de los arcos *AB* y *BC*.

Definición medida de arcos. La **medida** de un **arco menor** es igual a la medida del ángulo central que lo determina.

3. Describa el procedimiento para obtener, con regla y compás, el cuadrilátero *EFGH* a partir del cuadrilátero *ABCD* por medio de una rotación.

¿Se obtiene el cuadrilátero *PQRS* a partir de alguno de los otros cuadriláteros por medio de una rotación? Explique su respuesta.



4. ¿Qué propiedades tiene la imagen de una figura bajo una rotación?

5. Defina rotación.

6. ¿Cómo definiría simetría rotacional? Dé ejemplos de figuras que tienen simetría rotacional y algunas que no tengan.

6.5 Análisis de propiedades

1. Decida si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se Sabe. Justifique su respuesta.

a. La recta m es paralela al vector v. ¿Es la imagen de m, bajo la traslación respecto a v, la recta m?

b. Dados el ΔMNO y la traslación respecto a un vector w. Se tiene que la imagen de M bajo la traslación es N. ¿Es la imagen de N el punto O?

c. La recta n es perpendicular al vector u. ¿Es la imagen de n perpendicular al vector u?

d. La recta k es la mediatriz del $\overline{AB}$. ¿Es la imagen del punto B bajo la reflexión por k el punto A?

e. P y P' son dos puntos tales que la imagen de P bajo la reflexión por la recta k es P' y la imagen de P' bajo la reflexión por la recta m es P. ¿Son las rectas k y m la misma recta?

f. La recta n contiene la bisectriz del $\angle FGH$. ¿Es la imagen bajo la reflexión por la recta n del $\overrightarrow{GF}$ el $\overrightarrow{GH}$?

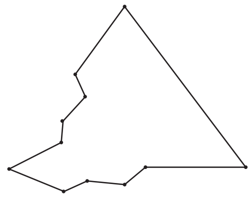
g. El ΔNOP es isósceles con $\overline{NO} \cong \overline{OP}$. La imagen del ΔNOP bajo la reflexión por la recta m es el ΔPON. ¿Contiene la recta m una altura del ΔNOP?
h. Se define una rotación en el plano α alrededor del punto P de arco de 120°. ¿Existe algún punto del plano que no se mueve?
i. La imagen del ΔABC, bajo una rotación alrededor del punto Q de arco de 90°, es el $\Delta A'B'C'$. ¿Es la imagen del $\Delta A'B'C'$, bajo la rotación alrededor de Q un arco de 90°, el ΔABC?
j. La imagen del punto T bajo una rotación alrededor de P un arco de 180° es el punto S. ¿Es el punto T la imagen de S, bajo la misma rotación,?
k. A, B y C son vértices de un triángulo y D, E y F los vértices de otro triángulo. Las imagenes de A y B, bajo una rotación alrededor del punto P un arco de 60°, son los puntos D y E, respectivamente. ¿Es F la imagen de C bajo la misma rotación?

6.6 Teselas artísticas

1. Regrese a sus respuestas a la tarea de la sección 6.1 y exprese, usando la terminología de traslaciones, rotaciones y reflexiones, cómo obtiene la figura completa a partir de la básica escogida.

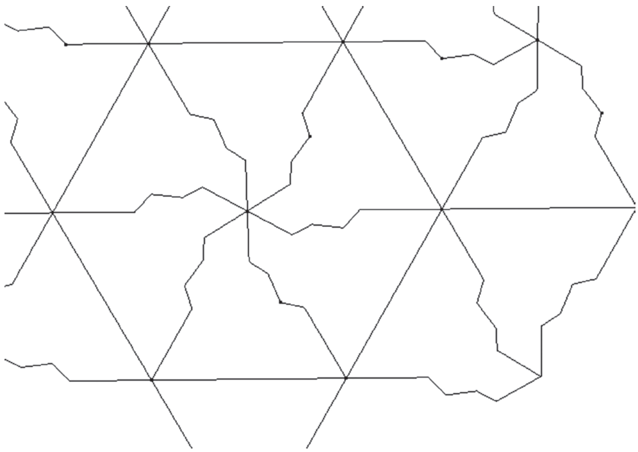
2. La figura completa que se genera a partir del movimiento de una figura básica se llama una **tesela del plano**. El proceso de generar una tesela se llama **teselado.** ¿Qué polígonos regulares se pueden usar para teselar el plano? Explique su respuesta.

3. Represente un triángulo equilátero. Se construirá una figura que tesele el plano. Para recortar un trozo de la región triangular se construye un polígono en el interior, con uno de sus lados contenido en un lado del triángulo equilátero. Mediante una transformación se mueve el trozo a otro lado del triángulo, formando así la figura base del teselado. La figura resultante debe ser reconocida por Cabri como polígono para poder usarla en la teselación.



a. Explique cómo se formó el polígono de la figura anterior, a partir de un triángulo equilátero.

Con el polígono anterior, se puede teselar el plano tal como se muestra en la figura siguiente:



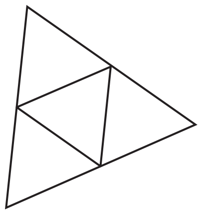
b. En cada caso, siga las instrucciones dadas, usando un triángulo equilátero, para crear la figura base que debe teselar el plano, imitando el proceso que se siguió para crear la figura anterior. Tesele el plano y escriba qué transformaciones usó en la teselación. Convierta su teselado en un diseño artístico y guárdelo en un archivo.

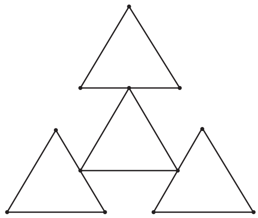
- Recorte un trozo, a partir de un vértice, y luego rótelo para que la media del arco sea 300º.
- Recorte un trozo que tenga como punto inicial un vértice y como punto final el punto medio. Rótelo con respecto al punto medio 180°.

- Recorte un trozo sobre un lado, que no incluya un vértice de este y rótelo 60º con respecto a alguno de los vértices del lado en cuestión.
- Imite la experiencia anterior con un triángulo rectángulo isósceles y produzca una tesela.

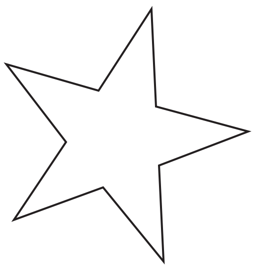
Tareas complementarias

1. Mediante traslaciones, reproduzca en Cabri cada uno de los siguientes diseños. Explique cuál fue la figura original, cuáles las que se obtienen por la traslación y cuál fue el vector de traslación para cada una de ellas.



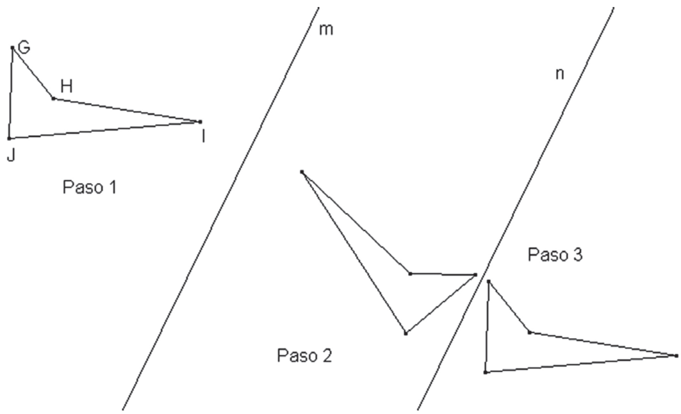


2. Mediante rotaciones, reproduzca el diseño usando una figura base. Explicite cuál fue la figura original, cuáles las que se obtienen por la rotación de esta, determine el centro de la rotación y las medidas de los arcos correspondientes.

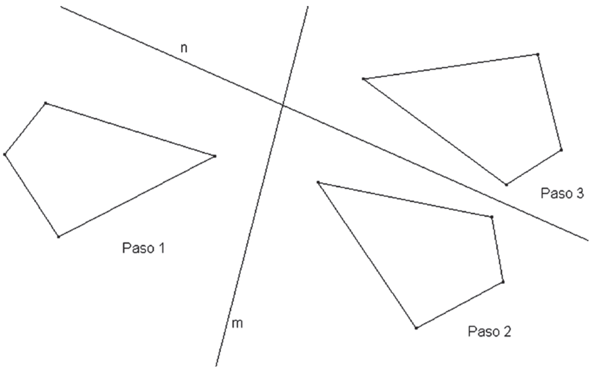


3. Describa el proceso realizado en cada ilustración. ¿Es posible llegar a la última figura, desde la inicial, en un solo paso? Explique su respuesta.

a.



b.



4. Con base en sus respuestas a los literales a y b, formule una conjetura.
5. ¿Qué relación hay entre el ángulo formado por las rectas *m* y *n* y la longitud del arco de rotación?

Nota histórica

La idea de usar transformaciones en geometría para explicar hechos o comprobarlos es muy antigua. El papiro de Ames, escrito entre 2000 y 1800 a.C, es una colección de ejercicios de matemáticas con su solución. En uno de estos ejercicios se justifica la forma de encontrar el área de un triángulo isósceles, mencionando que éste puede considerarse como la unión de dos triángulos rectángulos, y que al mover uno de ellos es posible formar con ambos un rectángulo. Euclides (300 a.C.), en el Libro 1 de Elementos, aparentemente usa la idea de movimiento de figuras geométricas cuando aborda la noción de congruencia. Él no define este concepto y usa la frase “superponer figuras” cuando trata el tema. Se cree que para Euclides “superponer” es mover las figuras para cubrir una con la otra.

Muchos siglos después, un matemático alemán, Félix Klein (1849-1925) mostró cómo las diferentes geometrías que habían aparecido en el siglo XIX, podía caracterizarse usando transformaciones. Al ser nombrado profesor en Erlanger en 1872, Klein propuso un programa en el que describe la geometría como el estudio de las propiedades de figuras que se mantienen invariantes bajo un grupo específico de transformaciones. Usando el concepto algebraico de grupo, Klein muestra que clasificar grupos de transformaciones es equivalente a codificar geometrías. Con esa idea, se caracterizan la geometría euclidiana, la geometría afín y la geometría proyectiva. La geometría euclidiana plana es el estudio de las propiedades de figuras, que se mantienen invariantes bajo rotaciones y traslaciones, transformaciones incluidas en las llamadas isometrías porque conservan la distancia entre puntos. La palabra “isometría” tiene su origen en dos palabras griegas: *isos* que significa igual y *metron* que quiere decir medida.

Bibliografía

Alfonso, H. (1997). *Geometría Plana y del Espacio*. Bogotá.

Ball, W.W. R. (1960). *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Bunt, L. et al. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Clemens, S.; O'Daffer, P. y Cooney, T. (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Addison Wesley Iberoamericana.

Collette, J. (1985). *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo veintiuno editores, S.A.

Eves, H. (1963). *Estudio de las Geometrías*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Geltner, P. y Peterson, D. (1998). *Geometría.* México: International Thomson Editores.

Hemmerling, E. (1998). *Geometría Elemental*. México: Editorial Limusa.

Jurgensen, R. et al. (1983). *Geometry.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Martin, G. E. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, New York.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Delaware, E.U.A.: Addison-Wesley Iberoamericana.

Newman, J. (1994). *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Grijalbo. 6 tomos.

Pastor, J. R. y Babini, J. (1985). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa, S.A.

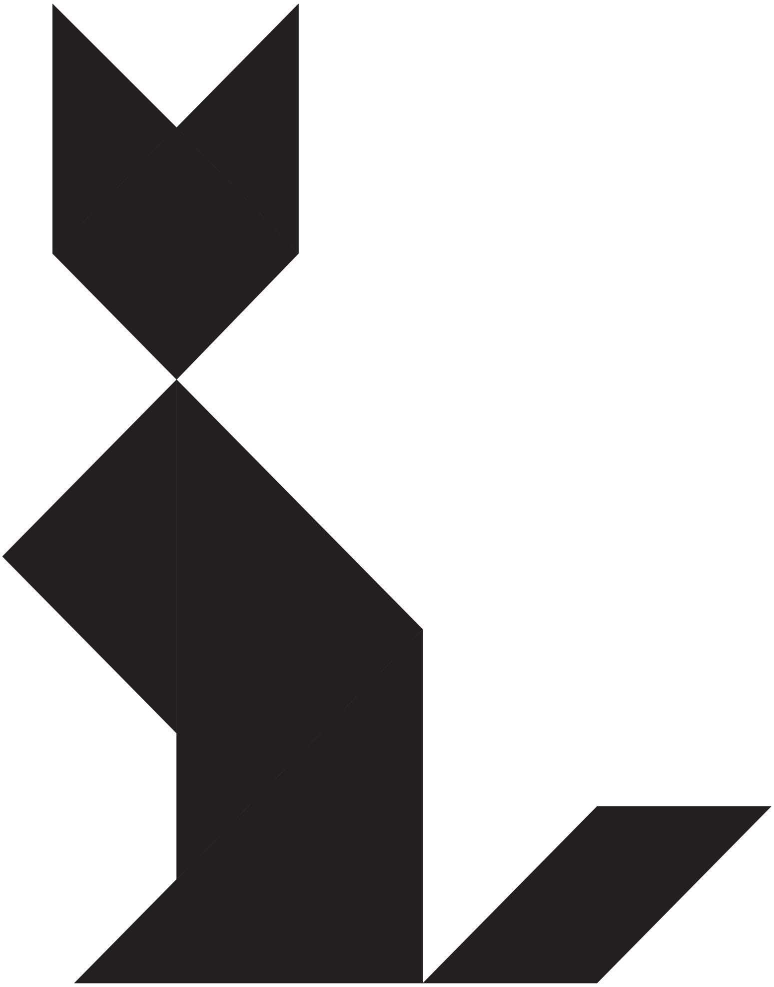
Samper, C. (2008). *Geometría*. Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Serra, M. (1997). *Discovering Geometry. An Inductive Approach*. Berkeley, California: Key Curriculum Press.

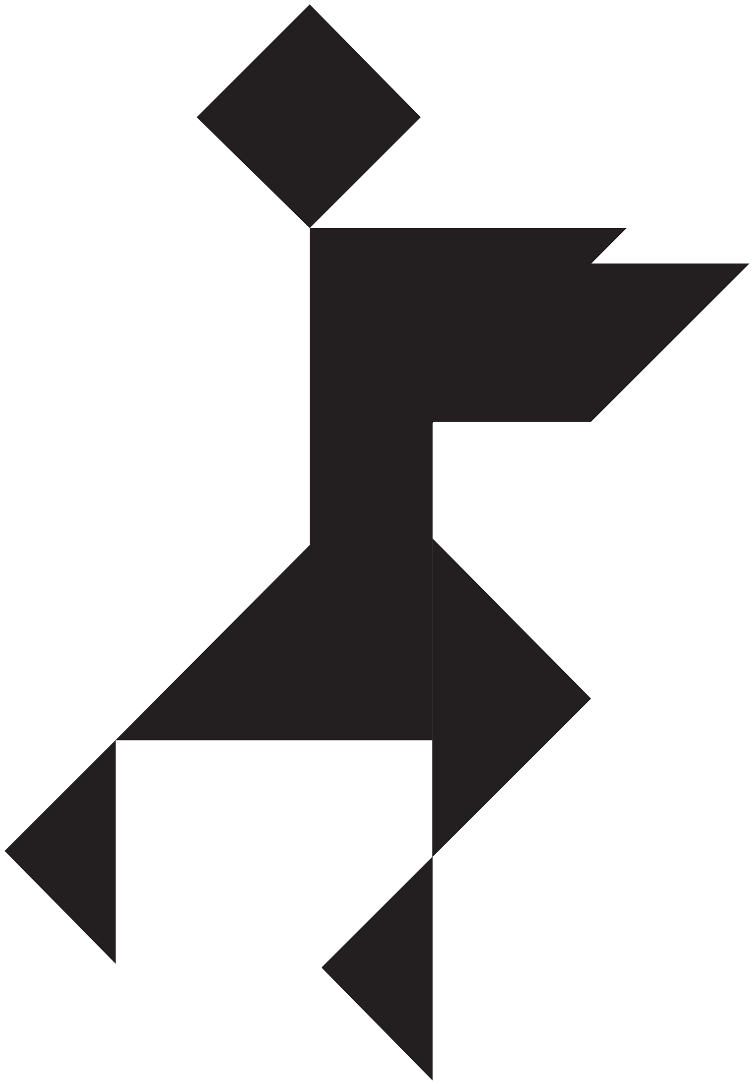
Shively, L. (1961). *Introducción a la Geometría Moderna*. México: Compañía Editorial Continental.

Lista de definiciones y hechos geométricos

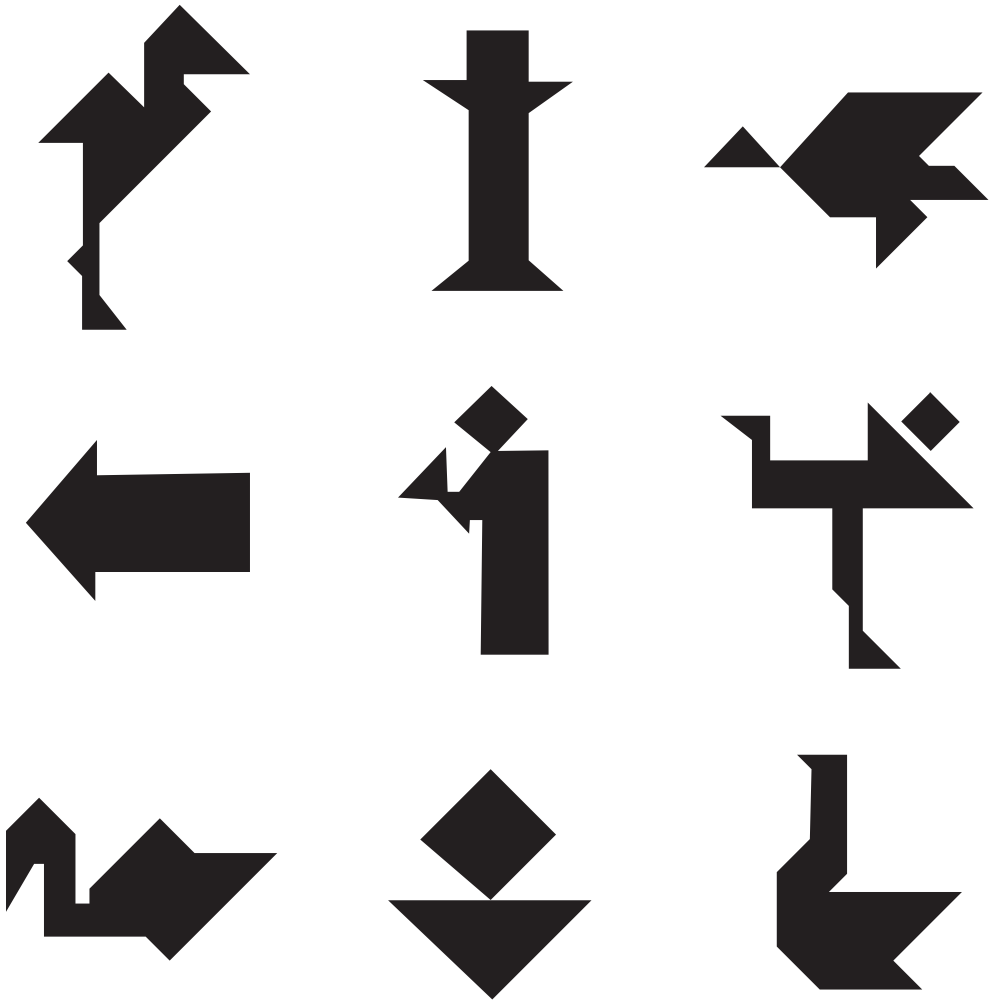
Anexo 1



Anexo 2



Anexo 3



Editado en septiembre de 2013

Se compuso en caracteres ZapfHumnst BT de 10,5 puntos
y se imprimió sobre papel Bookcream de 70 gramos,
con un tiraje de 250 ejemplares.
Bogotá, Colombia

Universidad Pedagógica Nacional
Educadora de educadores

El curso Elementos de Geometría ha sido concebido para los estudiantes que inician su formación en la geometría en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). El curso pretende complementar la formación secundaria ampliando la visión del conocimiento geométrico y llenando posibles vacíos conceptuales, con el propósito de preparar a los alumnos para acceder significativamente al estudio formal de la geometría euclidiana en un curso posterior. No se busca construir un sistema axiomático deductivo formal, sino proporcionar, en un ambiente activo y constructivo, las herramientas necesarias para la formación de nociones y conceptos, para el establecimiento de propiedades geométricas a partir de la exploración, y para el uso efectivo de métodos y técnicas geométricas. Sin perder de vista que en cursos posteriores se pretende que los estudiantes adquieran un conocimiento formal de la geometría, en el curso Elementos de Geometría se combina la rigurosidad del lenguaje geométrico con un acercamiento informal que invita a los alumnos a hacer conjeturas basados en la exploración de situaciones especialmente diseñadas y a dar justificaciones de éstas, de manera intuitiva, propiciando el desarrollo de las habilidades de razonamiento que son indispensables en el estudio de la matemática avanzada.

ISBN 978-958-8650-46-3

9 789588 650463