

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

**COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN ALGUNAS PINTURAS DE
LEONARDO DA VINCI**

**JORGE MIGUEL MUÑOZ VERA
JUAN SERGIO SALAMANCA GODOY**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ÉNFASIS EN HISTORIA
BOGOTÁ D C
2013**

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

**COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN ALGUNAS PINTURAS DE
LEONARDO DA VINCI**

**JORGE MIGUEL MUÑOZ VERA
JUAN SERGIO SALAMANCA GODOY**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE ESPECIALISTA EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**DIRECTOR PROFESOR JHON BELLO CHAVEZ
MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ÉNFASIS EN HISTORIA
BOGOTÁ D C**

2013


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de las Américas

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ACTA DE EVALUACION
DE TESIS DE GRADO**

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "Compás Áureo y Espiral áurea en algunas pinturas de Leonardo da Vinci" Presentado por los estudiantes:

Jorge Miguel Muñoz Vera - 2013182016
Juan Sergio Salamanca Godoy - 2013182029

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **48** puntos.

Observaciones:


En constancia se firma a los 10 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) 
JOHN HELVER BELLO

Jurado: Profesor(a) 
LEONARDO ANGEL

FORMATO RAE

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 58	

1. Información General	
Tipo de documento	Monografía
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Compas Áureo y Espiral Áurea en Algunas Pinturas de Leonardo da Vinci
Autor(es)	Jorge Miguel Muñoz Vera y Juan Sergio Salamanca Godoy
Director	Jhon Bello Chávez
Publicación	Bogota, Universidad Pedagógica Nacional. 2013. 58p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Razón Áurea, Proporción, Espiral Áurea, Leonardo da Vinci, Pintura, Hombre Vitruvio
2. Descripción	
<p>El trabajo se desarrolla alrededor de algunas obras de Leonardo da Vinci, en especial en las matemáticas que se visualizan en sus pinturas, particularmente se referencia el dibujo del Vitruvio y se hace uso de las proporciones propuestas allí, para determinar algunas hipótesis respecto al tratamiento de la composición de las pinturas: En los dibujos planos de Leonardo está presente la razón áurea, en las pinturas de Leonardo con perspectiva está presente la razón áurea, en las pinturas de Leonardo con perspectiva está presente la espiral áurea en la curvatura de los cuerpos y en los dibujos y pinturas de Leonardo se encuentra el rectángulo áureo. Con este propósito, se analizan los dibujos: Isabella d'Este y el Retrato de un hombre; y las pinturas: Leda, el cisne, y la Virgen de las Rocas. A partir de la elaboración del compás áureo y la espiral áurea en el programa Geogebra, se observan y analizan algunos elementos que</p>	

permiten verificar las hipótesis propuestas acerca de las pinturas de Leonardo.

Inicialmente acudimos a la ubicación histórica de Leonardo da Vinci par conocer quiénes fueron los personajes que influenciaron sus pinturas y el uso de los elementos matemáticos en las mismas.

Mostramos una herramienta dinámica, que en algún momento permitiría enlazar la enseñanza de las matemáticas, en este caso, el tema de la razón áurea, con un aspecto clave de la historia de la humanidad, la pintura. Esta relación ahondaría el conocimiento del profesor, hacia un reconocimiento de una alternativa para trabajar este tema en el aula clase.

3. Fuentes

- youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8. (30 de 11 de 2011). Recuperado el 09 de 08 de 2013, de youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8: <http://www.youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8>
- Alberti, L. B. (1837). *Tratado de las pinturas* On openlibrary.org. Recuperado el 09 de 06 de 2013, de <http://books.google.com.co/books?id=qaNJnyApYG0C&printsec=frontcover&dq=tratado+de+la+pintura&hl=es-419&sa=X&ei=tQJxUqziN4itsATa9ICgCg&ved=0CDkQ6AEwAg#v=onepage&q=tratado%20de%20la%20pintura&f=false>
- Alicia Carvajal, V. V. (2012). *Actas - Instituto GeoGebra Uruguay*. Recuperado el 28 de 06 de 2013, de *Actas - Instituto GeoGebra Uruguay*: www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf
- Briceño, C. (17 de 09 de 2006). *Analitica.com*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de <http://www.analitica.com/media/6442397.pdf>
- Carrasco, J. J. (2010). *Renacimiento Siglo XV Y XVI*. Recuperado el 09 de 08 de 2013, de http://josejrodriguez carrasco.wikispaces.com/file/view/hist_arte_esquema.pdf
- (s.f.). COMPOSITION ET NOMBREN D`OR DANS LES OEUVRES PEINTES DE LA RENAISSANCE. EDITION.
- Concha, E. d. (s.f.). *Triptico da Vinci Geometría del Renacimiento*. Recuperado el 15 de 08 de 2013, de <http://www.triptico-davinci.com/el-metodo-leonardo-el-esqueleto-aureo>
- Cruz, J. A. (2001). *agcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf*. Recuperado el 07 de 06 de 2013, de jagcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf: <http://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf>
- Cynthia Phillips, P. S. (2010). El gran libro de Da Vinci. En P. S. Cynthia Phillips, *El gran libro de Da Vinci*

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

(pág. 33). Bogotá: Panamericana editorial Limitada.

González, R. H. (2005). *El Legado del Vitruvio*. Recuperado el 07 de 07 de 2013, de <http://romher.webs.ull.es/cv/vitruvio.pdf>

Ignacio A, L. F. (s.f.). *El Número de Oro*. Recuperado el 16 de 08 de 2013, de <http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm>

Inconmesurables. (s.f.). Recuperado el 30 de 07 de 2013, de <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/incommensurables.pdf>

Letts, R. M. (1981). *El Renacimiento*. Barcelona: Cambridge University Press.

Ono. (s.f.). *pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista*. Recuperado el 15 de 07 de 2013, de [pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista: http://webs.ono.com/pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista/pintura%20renacentista.html#a1](http://webs.ono.com/pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista/pintura%20renacentista.html#a1)

Paula Chain, C. C. (2009). *iesramoncabanillas*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [iesramoncabanillas: http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm](http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm)

Pellico, A. M. (12 de 2006). *Historia de las Matemáticas*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Alberto%20Durero.pdf

Potts, R. (2002). *Euclid's Elements of Geometry*. Norwalk Connecticut: The Easton Press.

Rafael Argullol, D. C. (1988). *El Quattrocento*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de <http://www.geocities.ws/dchacobo/Quattrocento-RafaelArgullol.PDF>

Regatas, C. (06 de 2005). *clubregatas.org.pe*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [clubregatas.org.pe: http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm](http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm)

Torres, M. L. (1994). *Cursos 1993 y 1994 HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES*. Recuperado el 19 de 07 de 2013, de <http://exordio.qfb.umich.mx/archivos%20pdf%20de%20trabajo%20umsh/aphilosofia/tesis%20ejemplos/cs182%20Geometr%C3%ADa%20y%20dise%C3%B1o%20de%20la%20realidad%20sensible.pdf>

Torroella, R. S. (1995). *Historia del Arte*. Madrid: Editorial Debate S.A.

Venegas, L. (2012). Leonardo da Vinci Claro y oscuro. En L. Venegas, *Leonardo da Vinci Claro y oscuro* (pág. 142). Bogotá: Panamericana Editorial Limitada.

Zöllner, F. (2000). *Leonardo da Vinci "Artista y Científico"*. Madrid: TASCHEN.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

- youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8. (30 de 11 de 2011). Recuperado el 09 de 08 de 2013, de [youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8](http://www.youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8): <http://www.youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8>
- Alberti, L. B. (1837). *Tratado de las pinturas* On openlibrary.org. Recuperado el 09 de 06 de 2013, de <http://books.google.com.co/books?id=qaNJnyApYG0C&printsec=frontcover&dq=tratado+de+la+pintura&hl=es-419&sa=X&ei=tQJxUqziN4itsATa9ICgCg&ved=0CDkQ6AEwAg#v=onepage&q=tratado%20de%20la%20pintura&f=false>
- Alicia Carvajal, V. V. (2012). *Actas - Instituto GeoGebra Uruguay*. Recuperado el 28 de 06 de 2013, de Actas - Instituto GeoGebra Uruguay: www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf
- Carrasco, J. J. (2010). *Renacimiento Siglo XV Y XVI*. Recuperado el 09 de 08 de 2013, de http://josejrodriguezcarasco.wikispaces.com/file/view/hist_arte_esquema.pdf
- (s.f.). COMPOSITION ET NOMBREN D`OR DANS LES OEUVRES PEINTES DE LA RENAISSANCE. EDITION.
- Concha, E. d. (s.f.). *Tripticoda Vinci Geometria del Renacimiento*. Recuperado el 15 de 08 de 2013, de <http://www.triptico-davinci.com/el-metodo-leonardo-el-esqueleto-ÁUREO>
- Cruz, J. A. (2001). agacruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf. Recuperado el 07 de 06 de 2013, de jagacruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf: <http://jagacruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf>
- Cynthia Phillips, P. S. (2010). El gran libro de Da Vinci. En P. S. Cynthia Phillips, *El gran libro de Da Vinci* (pág. 33). Bogota: Panamericana editorial Limitada.
- González, R. H. (2005). *El Legado del Vitruvio*. Recuperado el 07 de 07 de 2013, de <http://romher.webs.ull.es/cv/vitruvio.pdf>
- Ignacio A, L. F. (s.f.). *El Numero de Oro*. Recuperado el 16 de 08 de 2013, de <http://rt000z8y.eresmas.net/EI%20numero%20de%20oro.htm>
- Inconmesurables*. (s.f.). Recuperado el 30 de 07 de 2013, de <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/incommensurables.pdf>
- Letts, R. M. (1981). *El Renacimiento*. Barcelona: Cambridge University Press.
- Ono. (s.f.). pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista. Recuperado el 15 de 07 de 2013, de pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista: <http://webs.ono.com/pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista/pintura%20renacentista.html#a1>
- Paula Chain, C. C. (2009). *iesramoncabanillas*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [iesramoncabanillas](http://iesramoncabanillas.com):

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

<http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm>

Potts, R. (2002). *Euclid's Elements of Geometry*. Norwalk Connecticut: The Easton Press.

Rafael Argullol, D. C. (1988). *El Quattrocento*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de <http://www.geocities.ws/dchacobo/Quattrocento-RafaelArgullol.PDF>

Regatas, C. (06 de 2005). *clubregatas.org.pe*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [clubregatas.org.pe: http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm](http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm)

Torres, M. L. (1994). *Cursos 1993 y 1994 HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES*. Recuperado el 19 de 07 de 2013, de <http://exordio.qfb.umich.mx/archivos%20pdf%20de%20trabajo%20umsh/afilosofia/tesis%20ejemplos/cs182%20Geometr%C3%ADa%20y%20dise%C3%B1o%20de%20la%20realidad%20sensible.pdf>

Torroella, R. S. (1995). *Historia del Arte*. Madrid: Editorial Debate S.A.

Venegas, L. (2012). Leonardo da Vinci Claro y oscuro. En L. Venegas, *Leonardo da Vinci Claro y oscuro* (pág. 142). Bogota: Panamericana Editorial Limitada.


Zöllner, F. (2000). *Leonardo da Vinci "Artista y Científico"*. Madrid: TASCHEN.

4. Contenidos

El trabajo de grado contiene:

Algunas Preguntas de las Matemáticas de Leonardo da Vinci, Ubicación Histórica de Leonardo da Vinci, Las Matemáticas de Leonardo da Vinci, los conceptos sobre Razón, Proporciones y Razón Áurea; fue necesario incluir el canon del cuerpo humano para Leonardo da Vinci y la Espiral de Durero.

Asimismo se contempló en el trabajo de grado, el compás Áureo creado para medir la proporción Áurea y el análisis de algunas pinturas de Leonardo da Vinci.

 <p>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formadora de Profesores</i></p>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 58	

5. Metodología

Por ser este trabajo un estudio que no pretende ser una investigación en su totalidad; a continuación describimos el método que permitió ir llevando a cabo de manera sistemática el desarrollo del mismo.

A partir de las intenciones del trabajo, se realizó una revisión bibliográfica y cibergráfica y posteriormente se seleccionó el material idóneo, en donde fuera posible acercarse a una respuesta a los cuestionamientos planteados.

Luego, se realizó un proceso de comprobación en las pinturas o dibujos escogidos, empleando el compás y la espiral construidos en el programa de geometría dinámica “Geogebra”.

6. Conclusiones

Al iniciar este trabajo nos preguntábamos sobre la razón áurea y la espiral áurea en algunas pinturas de Leonardo da Vinci, y la manifestación de estos objetos matemáticos en la composición de sus obras, para lo cual comenzamos con una revisión bibliográfica que nos dieran información acerca de la relación arte- geometría y Leonardo da Vinci durante la época del renacimiento.

Por otra parte empleamos un programa de geometría dinámica (Geogebra) que permitiera manipular en las pinturas, el compás áureo y la espiral áurea, para realizar algunas observaciones de las cuales concluimos:

En la revisión bibliográfica se evidenció, que en el renacimiento las obras de arte debían contener una composición geométrica que dotara a la pintura de orden y ubicación de los elementos principales y secundarios dentro de la misma.

El renacer del saber grecorromano influenció considerablemente la forma de pensar del pintor renacentista.

El interés y la preocupación por representar lo más fielmente posible la naturaleza en la pintura, condujo al pintor a profundizar sus estudios en matemáticas particularmente la geometría, tanto euclidiana como proyectiva.

Algunos de los apuntes que se conservan de las pinturas de Leonardo muestran algunos elementos del uso de la proporción Áurea en la composición del cuerpo humano que posteriormente usa para recrear la pintura, aunque no dejan ver la composición geométrica de la pintura, ya que realizaba sus bocetos en diferentes hojas para los diferentes elementos de la pintura.

Sobre las pinturas se observó que los rostros de las pinturas siempre están contenidos en un rectángulo áureo y la curva de la espiral delimita la curva del rostro y la cabeza en concordancia con la obra del hombre Vitruvio.

Los detalles del rostro en las obras están de acuerdo a las proporciones establecidas en el cuadro del vitruvio.

Debido al uso de la perspectiva y la curvatura de los cuerpos en las pinturas, el instrumento usado mediante el programa no permite evidenciar de forma clara las demás proporciones del cuerpo, de acuerdo al retrato del vitruvio.

En este trabajo no se tuvo en cuenta ni se estudió el uso de la perspectiva en las pinturas, entonces queda como una cuestión abierta para un posible trabajo el estudio de la perspectiva en las obras empleando algún programa de geometría dinámica.

Hacer un estudio del uso de las matemáticas en otras áreas del conocimiento en un momento clave de la historia permite al profesor tener una visión más amplia de lo que son las matemáticas.

Elaborado por:	Jorge Miguel Muñoz Vera y Juan Sergio Salamanca Godoy
Revisado por:	Jhon Bello Chávez

Fecha de elaboración del Resumen:	21	10	2013
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION.....	13
1. ALGUNAS PREGUNTAS DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS OBRAS DE LEONARDO DAVINCI.....	14
1.1 INTENCIONES DE ESTE ESTUDIO.....	15
2. UBICACIÓN HISTÓRICA DE LEONARDO DA VINCI.....	16
2.1 CONSIDERACIONES SOBRE LEONARDO DA VINCI Y EL RENACIMIENTO.....	17
2.2 LEONARDO DA VINCI.....	18
2.3 LAS MATEMÁTICAS DE LEONARDO DA VINCI.....	19
2.3.1 Razón.....	21
2.3.2 Proporción.....	21
2.3.3 Razón áurea.....	22
2.3.4 El Canon del Cuerpo Humano para Leonardo da Vinci.....	24
2.4 LA ESPIRAL DE DURERO.....	26
3. UN INSTRUMENTO CREADO PARA MEDIR LA PROPORCION AUREA.....	29
3.1 COMPAS DE DOS PUNTAS.....	29
3.2 COMPAS DE TRES PUNTAS.....	30
3.3 CONSTRUCCIÓN COMPÁS ÁUREO EN GEOGEBRA.....	30
4. ANÁLISIS DE ALGUNAS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI.....	35
4.1 ANÁLISIS DE DIBUJO RETRATO DE UN HOMBRE.....	35
4.2 ANÁLISIS DEL DIBUJO DE LEONARDO DA VINCI ISABELLA D' ESTE.....	38
4.3 ANÁLISIS PINTURA DE LEONARDO DA VINCI LEDA Y EL CISNE.....	44
4.4 ANÁLISIS PINTURA DE LEONARDO LA VIRGEN DE LAS ROCAS.....	47
CONCLUSIONES.....	54
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Explicativo del Teorema 11 libro II de Euclides parte 1	24
Ilustración 2: Explicativo del Teorema 11 libro II de Euclides parte 2	24
Ilustración 3: Dibujo del Vitruvio	26
Ilustración 4: Rectángulo Áureo.....	28
Ilustración 5: Espiral Áurea	29
Ilustración 6: Espiral Áurea a partir de un Triángulo	29
Ilustración 7: Construcción Compás de dos Puntas	30
Ilustración 8 Construcción Compás de tres Puntas	31
Ilustración 9: Construcción Sección Áurea.....	32
Ilustración 10: Creación de una Macro en Geogebra pasó 1	33
Ilustración 11: Creación de una Macro en Geogebra pasó2	33
Ilustración 12: Creación de una Macro en Geogebra pasó3	34
Ilustración 13: Creación de una Macro en Geogebra pasó 4	34
Ilustración 14: Creación de una Macro en Geogebra pasó 5	35
Ilustración 15: Compás de tres puntas, teniendo en cuenta los protocolos de construcción en Geogebra.	35
Ilustración 16: Retrato de un hombre	37
Ilustración 17: Retrato de un hombre observación 1	37
Ilustración 18: Retrato de un hombre observación 2	38
Ilustración 19: Retrato de un hombre observación 3	38
Ilustración 20: Retrato de un hombre observación 4	38
Ilustración 21: Retrato de un hombre observación 5	39
Ilustración 22: Isabella d`Este.....	40
Ilustración 23: Isabella d`Este observación 1	41
Ilustración 24: Isabella d`Este observación 2.....	41
Ilustración 25: Isabella d`Este observación 3.....	42
Ilustración 26: Isabella d`Este observación 4.....	42
Ilustración 27: Isabella d`Este observación 5.....	42
Ilustración 28: Isabella d`Este observación 6.....	43
Ilustración 29: Isabella de d`Este observación 7	43
Ilustración 30: Isabella d`Este observación 8.....	43
Ilustración 31: Isabella d`Este observación 9.....	44
Ilustración 32: Isabella d`Este observación 10.....	44
Ilustración 33: Leda y el cisne	46
Ilustración 34: Leda y el Cisne observación 1	46
Ilustración 35: Leda y el Cisne observación 2.....	47
Ilustración 36: Leda y el Cisne Observación 3.....	47

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

Ilustración 37: Leda y el Cisne Observación 4	48
Ilustración 38: Leda y el Cisne observación 5	48
Ilustración 39: La Virgen de las Rocas	49
Ilustración 40: La Virgen de las Rocas observación 1	50
Ilustración 41: La Virgen de las Rocas observación 2	50
Ilustración 42: La virgen de las Rocas observación 3	51
Ilustración 43: La Virgen de las Rocas observación 4	51
Ilustración 44: La Virgen de las Rocas observación 5	52
Ilustración 45: La virgen de las Rocas observación 6	52
Ilustración 46: La Virgen de las Rocas observación 7	53
Ilustración 47: La Virgen de las Rocas observación 8	53
Ilustración 48: La Virgen de las Rocas observación 9	54

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se realiza con el fin de verificar las hipótesis: En los dibujos planos de Leonardo está presente la razón áurea, en las pinturas de Leonardo con perspectiva está presente la razón áurea y en las pinturas de Leonardo con perspectiva está presente la espiral áurea en la curvatura de los cuerpos; a partir del uso de la razón áurea y la espiral áurea en algunas pinturas de Leonardo da Vinci, particularmente se estudia el dibujo del Vitruvio, Isabella d'Este, La virgen de las rocas, Retrato de un hombre, Leda y el Cisne.

Se utiliza el programa Geogebra, debido a que permite de manera dinámica observar algunos elementos en la composición de la pintura que se relacionan con Φ , por ejemplo, la ubicación de los elementos de la pintura, estructura de los cuerpos y curvatura del cuerpo.

De igual forma se indaga, sobre sí Leonardo da Vinci usa la razón aurea y la espiral aurea, en sus obras y qué tipo de objetos o partes del cuerpo representaba a través de estos objetos matemáticos en la pintura.

Acudiendo a la historia como fuente de referencia y conocimiento, se describe, algunos elementos que influenciaron las matemáticas inmersas en las pinturas de Leonardo da Vinci.

Una vez reunidos elementos como razón áurea y espiral áurea, alrededor de las pinturas de, da Vinci, realizamos un análisis mediante el compás áureo y la espiral áurea, construidos con el programa Geogebra, para responder a las hipótesis planteadas y poder verificar el uso de estos elementos en algunas de sus pinturas.

Así mismo, se muestra, una herramienta dinámica, que en algún momento permitiría enlazar la enseñanza de las matemáticas, en este caso, el tema de la razón áurea, con un aspecto clave de la historia de la humanidad, la pintura. Esta relación ahondaría el conocimiento del profesor, hacia un reconocimiento de una alternativa para trabajar este tema en el aula clase.

1. ALGUNAS PREGUNTAS DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Al hacer una revisión a la historia de la humanidad y de las matemáticas, podemos identificar una época denominada “renacimiento” ubicada entre los siglos XV y XVI, representada por cambios en la historia; un cambio mencionable en el renacimiento es considerar al hombre según (Letts, 1981, pág. 13) “Como centro y medida de todas las cosas”.

Otro de los cambios que se presenta en el renacimiento fue la actitud mental nueva, debido a que la naturaleza no estaba para ser contemplada, sino para ser examinada y comprendida, marcando una sólida frontera entre el mundo antiguo lleno de religiosidad a un mundo nuevo, lleno de expresión. (Letts, 1981, pág. 11)

El espíritu del renacimiento, se marca en los cambios de la forma de pensar del ser humano; aspecto que influenció el arte de la época, a través de pinturas y esculturas que representaban de manera detallada los objetos de la naturaleza y en especial, el cuerpo humano; aspectos que fueron tratados por medio de objetos pertenecientes a las matemáticas.

En el renacimiento surge un personaje llamado Leonardo da Vinci quien es uno de los máximos exponentes de esta época, debido a que rompió moldes y estereotipos que se manejaban en la época medieval, trató el arte de las pinturas con una nueva visión.

Esta nueva visión estaba centrada en la preocupación de expresar la naturaleza y al hombre lo más fielmente posible, y esta representación solo se podía hacer con ayuda de elementos matemáticos como la perspectiva y la proporción, elementos que a su vez estaban relacionados con el resurgir de la cultura grecorromana, donde la belleza estaba relacionada con la proporcionalidad en el cuerpo humano y en la representación de las pinturas, con este renacer entre la pintura y las matemáticas en el renacimiento surgen los siguientes cuestionamientos:

¿Cómo da Vinci uso las matemáticas para reflejar su sentir en la pintura?

¿Qué elementos de las matemáticas uso en sus obras?

¿Está presente la razón áurea en las algunas pinturas de Leonardo da Vinci?

¿Las pinturas de Leonardo conservan en los cuerpos las proporciones áureas que describen el canon e ideal de belleza?

1.1 INTENCIONES DE ESTE ESTUDIO

Evidenciar el tratamiento de la espiral áurea implícito en algunas obras de arte de Leonardo Da Vinci.

Verificar algunas propiedades áureas de las obras de Leonardo da Vinci, mediante el compás áureo por medio del programa Geogebra.

2. UBICACIÓN HISTÓRICA DE LEONARDO DA VINCI

En este apartado mencionaremos el surgimiento del renacimiento; cuáles fueron sus características, los rasgos esenciales y los aspectos claves que fomentaron este periodo, también se presenta el resurgimiento de algunas ideas clásicas.

En el siglo XV en Europa Occidental florece un movimiento cultural denominado Renacimiento, el cual llega a su apogeo en el siglo XVI, planteando una nueva forma de ver el mundo y al ser humano, marcando un salto de la época Medieval a la Edad Moderna, trae consigo una gran transformación cultural, no sólo de las artes, sino también de las ciencias, las letras y de las formas de pensamiento.

Se caracteriza en primer lugar por el rechazo de muchos de los principios del conocimiento medieval en el que todo giraba en torno a la idea de Dios. Y en segundo lugar, por la admiración de la antigüedad grecorromana. Pretende recuperar el saber clásico, en el que busca una nueva escala de valores para el individuo. Durante el Renacimiento el hombre pasa a ser el centro del universo, porque emplea la razón como fuente del conocimiento y busca la verdad a través de la reflexión personal y de la investigación.

Los rasgos esenciales del arte renacentista son: el redescubrimiento de la cultura clásica griega y romana, dentro de ellas las matemáticas, el humanismo y el antropocentrismo.

El arte renacentista giró en torno al ser humano conjugado con lo divino, es decir, las pinturas presentan temas del hombre y su entorno, auspiciados por nuevos mecenas como los ricos comerciantes, los duques, la monarquía entre otros. En el caso de las ciencias aparecieron los fundamentos de la geometría proyectiva, el cálculo, el álgebra simbólica y la idea de experimento, que soportaría años después el método científico.

Para los pintores Florentinos la solución de sus problemas estaba en el surgimiento de la perspectiva y el estudio de la naturaleza, ampliándose el horizonte de los artistas. (Torroella, 1995, pág. 260)

Gracias al nuevo mecenazgo, el arte dejó de desempeñar exclusivamente funciones religiosas y aparecieron nuevos géneros y temas como los retratos, el desnudo, el paisaje o los cuadros mitológicos.

La época del renacimiento estuvo enmarcada por el crecimiento económico en Europa, con las nuevas rutas hacia el oriente musulmán, permitiendo a mercaderes, familiarizarse con técnicas matemáticas árabes tales como: los números arábigos, el sistema de notación decimal y los métodos de resolución de ecuaciones.

Dos aspectos claves para el inicio del renacimiento fueron: la invención de la imprenta por Johannes Gutenberg y la caída de Constantinopla en 1453, estos hechos beneficiaron a Italia y al resto de Europa con las traducciones de los trabajos de la antigüedad como los tratados griegos. Con la posibilidad de reimprimir estos trabajos y documentos clásicos se dio la posibilidad de estudiar las obras de: Euclides, Aristóteles, Vitruvio, Apolonio entre otros.

Al retomar a los clásicos griegos se exploran los problemas planteados en la antigüedad, como la trisección del ángulo, y el uso exclusivo de la regla y el compás; se retoma el estudio de las curvas mecánicas; ya que ellas daban solución a los interrogantes planteados, por tal razón se estudian, los mecanismos para trazar: parábolas, hipérbolas y cicloides; como por ejemplo la trisección de un ángulo a partir de la espiral de Durer.

En el renacimiento se resaltan dos aspectos, el primero de ellos es el rechazo hacia la cultura medieval y el segundo es la admiración hacia los clásicos y sus formas de expresión, generándose un movimiento intelectual preocupado por la perfección en el arte y en nuestro caso particular por la perfección de las pinturas.

En este movimiento cultural e intelectual, surge el multifacético Leonardo da Vinci, a quien los historiadores consideran brillante en: pintura, escultura, arquitectura, música, literatura, anatomía humana, hidráulica, aerodinámica, zoología, geología, astronomía, física e ingeniería.

2.1 CONSIDERACIONES SOBRE LEONARDO DA VINCI Y EL RENACIMIENTO

Como se mencionó anteriormente, la pintura en el renacimiento se centra en el estudio del hombre y la naturaleza para representar la realidad tal y como es. De esta manera, el cuerpo humano para Leonardo se convierte en una de sus preocupaciones, y teniendo como base el sistema de proporciones de marco vitruvio, considera que el origen de las medidas de todas las cosas podía encontrarse en las medidas corporales.

En el Renacimiento, las figuras humanas y de animales se representan de tal modo que se parezcan a sus modelos reales. Los aspectos de preferencia en las pinturas son la simetría y la distribución de las figuras con composiciones triangulares, circulares, piramidales o rectangulares, conforme se manifiestan en la realidad.

De este modo, Leonardo el pintor, no confiaba más que en lo que veían sus propios ojos, ante cualquier problema que se enfrentase, no consultaba lo que examinaba a las autoridades, sino que intentaba resolverlo por su cuenta. (Torroella, 1995, pág. 294)

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

La pintura del renacimiento se divide en tres etapas:

El Quattrocento es la presentación de un nuevo movimiento cultural y Artístico que se inicia en Italia y se propaga por toda Europa con un realismo objetivo y armonía en las composiciones con colores igualmente equilibrados buscando la complementariedad cromática llamado Quattrocento pictórico. (Rafael Argullol, 1988)

El Cinquecento es un periodo afortunado alguno de sus representantes son: Leonardo da Vinci, Miguel Ángel y Rafael; se producen transformaciones, debido a que se da una importancia a la búsqueda constante del movimiento, es el siglo de roma y los papas son los mecenas. (Carrasco, 2010)

El Manierismo, que es la última fase del renacimiento o alto renacimiento, el manierismo significa estilo o arte elegante, teniendo en cuenta la perfección técnica representada en la belleza de la obra. (Carrasco, 2010)

La pintura se representa, con las siguientes características:

El color empieza a imponerse al dibujo y los contornos se difuminan en un intento de captar la perspectiva aérea, no sólo en paisajes sino también en planos más cercanos. La luz difusa anterior se sustituye por un claroscuro más contrastado, ya con zonas en sombra.

Al igual que en arquitectura, hay un deseo de claridad y grandiosidad: las composiciones buscan una ordenación geométrica y simétrica; ejemplo de ello es la composición triangular o piramidal, en la que además, las figuras forman un grupo cerrado y se relacionan entre sí con manos y miradas. Las composiciones por tanto se simplifican frente a la complejidad del Quattrocento donde muchas obras tenían un carácter narrativo, acumulando varias escenas en la misma representación. (Ono)

La temática de las pinturas es tanto religiosa como profana, en esta época el arte se presenta desde un punto de vista más humano y Cristo es presentado como hombre.

El retrato se revela como una manifestación del culto al individuo y al humanismo con representaciones más naturales y la pintura mitológica es el resultado de la recuperación de la antigüedad clásica con los ejemplos artísticos de Grecia y Roma.

2.2 LEONARDO DA VINCI

Leonardo da Vinci (1452–1519) Inicia su educación aprendiendo a leer y a escribir en latín adquiriendo conocimientos en Matemáticas y música, a los 16 años se

inicia en el arte y pasa al taller de Andrea Verrocchio y amplía sus conocimientos en pintura, arte y geometría, a los 20 años ya era un artista independiente. Conforme pasaba el tiempo se fue haciendo de escritos tales como: el tratado de los elementos de Euclides, el tratado de Arquímedes, el tratado de Marco Vitrubio y el tratado de la perspectiva de Alberti entre otros. (Torroella, 1995, pág. 291)

Leonardo da Vinci es considerado como la primera mente moderna de su época, y uno de los artistas más grandes de la historia, logro diseñar máquinas que probablemente fueron utilizadas como calculadoras o para el cálculo de proporciones, también diseño máquinas de guerra, máquinas voladoras y sorprendentes inventos que realizó a lo largo de su vida. Como artista contribuyó a la medicina con sus dibujos sobre el cuerpo humano y sus partes, sus dibujos ayudaron a comprender de una mejor forma el funcionamiento y la articulación de esta estructura.

En cuanto al arte su producción pictórica, esta no es exenta de grandes aportaciones, es el primero en teorizar sobre la representación de la naturaleza, y en aplicar soluciones. Como gran observador de la naturaleza, se interesó por su representación pictórica ampliando el conocimiento de la perspectiva no solo la lineal, ya conocida en el *Quattrocento*, sino dando los primeros pasos en la perspectiva aérea (la difuminación de los colores según las diversas distancias, y la pérdida de determinación de los cuerpos, también con la distancia).

Además de representar la luz y la sombra de forma exacta, las pinturas realistas necesitaban transmitir transiciones sutiles de un tono al otro, lográndose gracias a la técnica del *Sfumato*, palabra italiana que quiere decir esfumado, esta palabra es utilizada para describir la técnica que Leonardo desarrollo para lograr las variaciones de los tonos. (Cynthia Phillips, 2010, pág. 79)

Leonardo siempre fue un dedicado observador del mundo natural. En sus cuadernos, hizo frecuentes y dispersas referencias al agua, los océanos, ríos, desde la grava hasta la arena... (Cynthia Phillips, 2010, pág. 208)

Sus pinturas marcaron un nuevo concepto debido a sus técnicas del *esfumato* y la perspectiva aérea, donde estos elementos usan la luz y la sombra como esencia de la pintura que la dota de profundidad y espacio.

2.3 LAS MATEMÁTICAS DE LEONARDO DA VINCI

Leonardo da Vinci fue un ser apasionado por la conformación de la naturaleza y el hombre, sintió la necesidad de pensar que la naturaleza puede matematizarse, afirma que “hay que servirse en la experiencia de la mecánica y que la mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas”; lo que hace pensar que en Leonardo, surge la necesidad de usar la Matemática para el conocimiento de la naturaleza y

del hombre, ya que es en esta ciencia, donde la naturaleza puede ser representada y entendida; pensamiento reflejado en sus obras de arte, sus esculturas y las máquinas que él diseñó.

Para Leonardo las matemáticas eran la herramienta que demostraba la validez de las investigaciones, ya que en su libro tratado de las pinturas sustentaba que *“Ninguna humana investigación puede ser denominada ciencia si antes no pasa por demostraciones matemáticas”* (Alberti, 1837).

En 1501 fue hallada una carta Escrita por un miembro de la corte donde residía Leonardo, Dirigida a Isabella d'Este, quien había encargado un retrato a Da Vinci. En ella se afirma que los experimentos matemáticos de Leonardo estaban copando casi todo su tiempo y que disponía de poco para pintar. Sus prioridades muestran claramente que era mucho más que un artista. (Cynthia Phillips, 2010, pág. 155)

Los estudios geométricos de Leonardo, se pueden dividir en tres categorías:

- De visión: A través de la cual intenta explicar geoméricamente los fenómenos ópticos usando los cuerpos piramidales y la perspectiva.
- De la naturaleza: con la que intenta construir los fenómenos que observaba en la física y en la naturaleza que estaban relacionados matemáticamente por modelos geométricos.
- Geometría pura: en las que estudia las obras de Euclides y Arquímedes entre otros.

Los conocimientos matemáticos de Leonardo se ven influenciados por Luca Paccioli, invitado a Milán, por el propio Leonardo; autor de la obra matemática llamada “summa” en donde se publica la mejor álgebra para ese periodo, esta obra fue adquirida por Leonardo, se terminó de escribir en 1487 y se publicó en 1494.

La obra matemática “summa” es una compilación de: aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y contabilidad. En el capítulo de aritmética se utiliza el Abaco (Instrumento que sirve para realizar operaciones aritméticas sencillas como sumas, restas y multiplicaciones) que era muy utilizado para instruir a artesanos y comerciantes. En el capítulo de álgebra resuelve ecuaciones simples y cuadráticas, se puede considerar como el comienzo del álgebra sincopada, que corresponde a la segunda fase en el desarrollo histórico del álgebra, caracterizada por el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se desarrollaran en el lenguaje natural.

Años más tarde en 1509, Paccioli publicó la obra titulada la divina proporción, ilustrada por Leonardo da Vinci, la primera parte presenta la sección áurea y sus aplicaciones en construcciones geométricas, polígonos y perspectiva; la segunda

parte analiza las ideas de Marco Vitruvio sobre la aplicación de las matemáticas en la arquitectura; la tercera parte realiza un estudio de los sólidos.

“los textos antiguos usados como fuente, considerados por Paccioli como las obras de los autores que originaron la teoría de la proporción son: el Timeo de Platón y Los elementos de Euclides” (Torres, 1994).

Sobre los elementos de Euclides nos vamos a centrar en su construcción de la razón Áurea. Para ello, revisaremos algunas definiciones y proposiciones del trabajo realizado en los libros II, III, V y VI

En primer lugar revisaremos el libro V en el cual se desarrolla toda la teoría de las proporciones; según González *“El Libro V proporcionaría, pues, una base lógica firme a toda doctrina que en la Geometría griega tuviera que ver con proporciones”* (Inconmesurables)

“Dos longitudes constituyen magnitudes homogéneas o de la misma especie. Lo mismo podemos decir de las áreas y los volúmenes. Una longitud y un área no son homogéneas, no son de la misma especie”

En segundo lugar trataremos la idea de Magnitud, de la cual Euclides en su libro V no presenta una definición concreta de lo que es. Pero la caracteriza a partir de una comparación entre ellas estableciendo una relación de orden entre equimúltiplos de una magnitud respecto a otra magnitud. y bajo este concepto se enmarcan lo que son las longitudes, las áreas y los volúmenes.

2.3.1 Razón: En el libro V en la definición 3 se introduce la idea de razón de dos magnitudes, no como una definición, más bien como una idea intuitiva de la cual actualmente se tienen algunas interpretaciones *“Razón es un cierto tipo de relación en tamaño de dos magnitudes del mismo tipo (Boyer 1996)”* o *“Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad”* (Vera 1970).

Antes de Eudoro, el término razón se reservaba para el cociente de magnitudes conmensurables como el de irracional a la relación entre magnitudes inconmensurables. Sin embargo en el libro V de los elementos, la idea de razón se extiende a cualquier par de magnitudes homogéneas conmensurables e inconmensurables dejando claro que se trata solo de una idea intuitiva y no de una definición.

Aunque Euclides no utiliza una notación especial para las razones, las denotaremos A/B o $A : B$ y si leerá la magnitud A es a la Magnitud B.

2.3.2 Proporción: Esta es una de las definiciones más importantes del libro V de los elementos, la igualdad entre dos razones que posteriormente se denominaría proporción y que se puede expresar en la siguiente forma:

Definición V del libro V: *La razón A/B es igual a la razón C/D si cualesquiera que sean los naturales m y n , de $mA > nB$, se obtiene $mC > nD$, de $mA < nB$, se obtiene $mC < nD$ y de $mA = nB$, se obtiene $mC = nD$*

Definición VI del libro V: *Magnitudes con la misma razón, son llamadas proporcionales.*

De estas dos definiciones vale la pena aclarar que en Elementos, las magnitudes A y B deben ser homogéneas entre sí, e igualmente las magnitudes C y D , pero no necesariamente las cuatro deben serlo entre sí, es decir A y B pueden ser longitudes, mientras que C y D pueden ser áreas.

En lenguaje moderno podemos decir que los elementos de una proporción se llaman términos, y los términos A y D se llaman extremos y los términos B y C se llaman medios. Al valor común que tienen las razones de una proporción se le llama constante de proporcionalidad.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y se lee "a es a b como c es a d".}$$

Los antiguos griegos creían que la proporción era esencial para conseguir belleza. Por eso estudiaron las proporciones geométricas y algunas especiales, como la razón áurea.

2.3.3 Razón Áurea: El número áureo de hecho ocurre en la naturaleza de la misma manera que en la geometría. Aparece en el diseño de semillas, en las hojas de las plantas, en las formas de las conchas, esta relación fundamental también se puede encontrar en la música y en otros puntos donde coinciden de las matemáticas y la naturaleza. (Cynthia Phillips, 2010, pág. 155)

Aunque Euclides no utiliza este término, llamaremos a esta relación la **proporción áurea** (o razón áurea). La definición aparece en el Libro VI, pero se da una construcción en el Libro II, Teorema 11, en referencia a áreas, que se resuelve dividiendo una línea en la proporción áurea.

Definición III del libro VI: *Se dice que una recta está dividida en «media y extrema razón» cuando la recta total es a la parte mayor como ésta a la menor.*

Descrito en lenguaje actual, esta definición es equivalente a tener:



$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

Proposición 11 del libro II: *Dividir una recta de tal forma que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento que queda.*

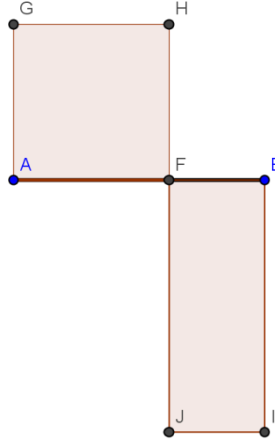


Ilustración 1: Explicativo del Teorema 11 libro II de Euclides parte 1

Una forma de dividir un segmento dado, en proporción Áurea es la siguiente:

Dado \overline{AB} , por el punto B se traza \overline{BC} perpendicular a \overline{AB} tal que $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$ y se traza \overline{AC} , Con centro en C y radio BC se traza un arco de circunferencia que corte a \overline{AC} en E , con centro en A y radio AE se construye un arco de circunferencia que corte a \overline{AB} en F .

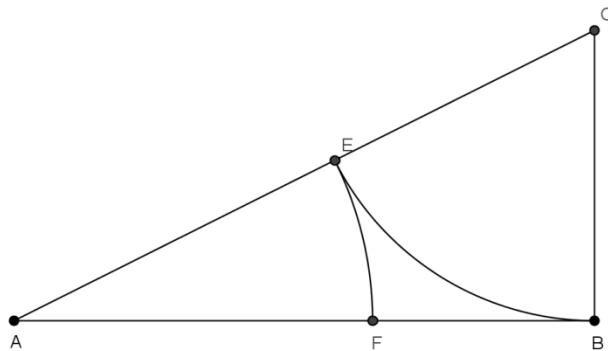


Ilustración 2: Explicativo del Teorema 11 libro II de Euclides parte 2

De esta forma el segmento AB se ha dividido en dos partes tales que: la mayor AF es a la menor FB , como está FB es a la totalidad AB .

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}$$

Supongamos $AB = 1$, por consiguiente $EC = BC = \frac{1}{2}$, por el teorema de Pitágoras se tiene que $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, De este modo se obtiene que:

$$AE = AF = AC - EC$$

$$AF = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$AF = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$FB = AB - AF$$

$$FB = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$FB = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Por tanto la razón: $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

De forma análoga procediendo con FB y AB se llega al mismo cociente. Esta razón es conocida como el número de oro y se dice que dos segmentos están en razón Áurea cuando su cociente es Φ

2.3.4 El Canon del Cuerpo Humano para Leonardo da Vinci: para Leonardo la composición del cuerpo humano debía obedecer a un orden matemático que daba la estética y la perfección del cuerpo. Como pintor y anatomista se interesó por estudiar las partes del cuerpo y la relación entre el todo y las partes, estas ideas quedan reflejadas en uno de sus diarios con un dibujo denominado “El hombre vitruvio” que se acompaña de notas anatómicas con respecto a las medidas del cuerpo humano, realizado con lápiz y tinta de 342 x 245 mm.

El dibujo trata un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos del arquitecto romano Marco Vitruvio de Polion titulados “Vitruvio De Architectura”, del cual el dibujo recibe su nombre. Leonardo se representa a sí mismo desnudo y en dos posiciones superpuestas de brazos y piernas inscritos en un círculo y un cuadrado. (Zöllner, 2000, pág. 36)

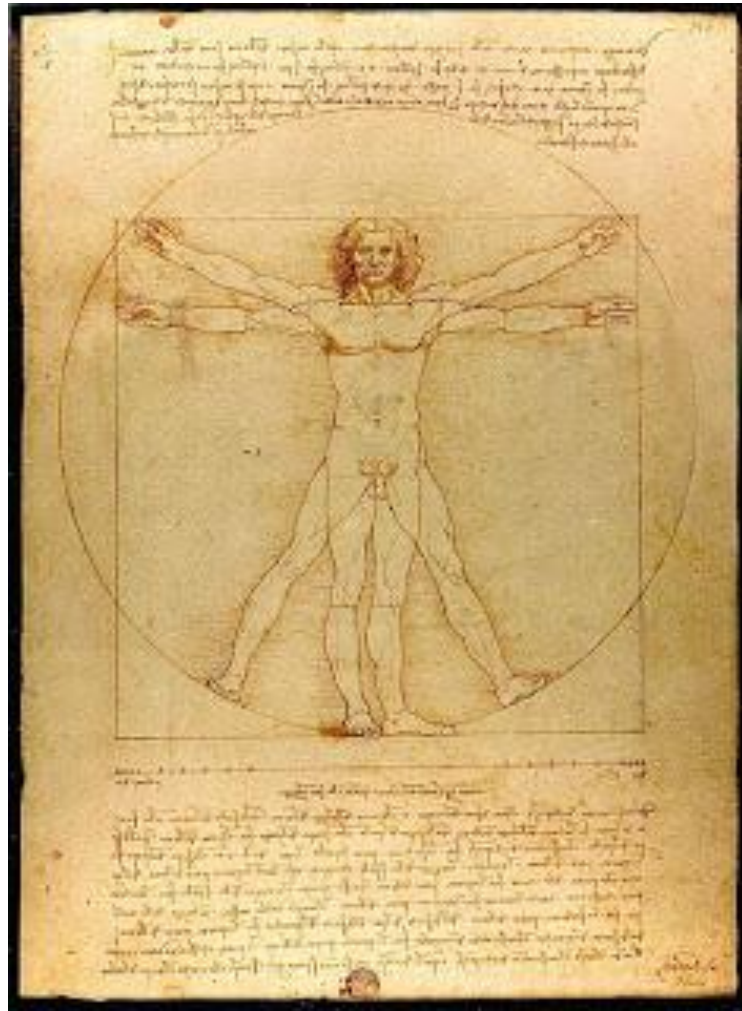


Ilustración 3: Dibujo del Vitruvio

Las notas que acompañan el dibujo del vitruvio determinan las proporciones del cuerpo humano de acuerdo con el texto antiguo de Vitruvio:

Una palma es la anchura de cuatro dedos.

Un pie es la anchura de cuatro palmas.

Un antebrazo es la anchura de seis palmas.

La altura de un hombre son cuatro antebrazos (24 palmas).

Un paso es igual a cuatro antebrazos.

La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.

La distancia entre el nacimiento del pelo y la barbilla es un décimo de la altura de un hombre.

La altura de la cabeza hasta la barbilla es un octavo de la altura de un hombre.

La distancia entre el nacimiento del pelo a la parte superior del pecho es un

séptimo de la altura de un hombre.

La altura de la cabeza hasta el final de las costillas es un cuarto de la altura de un del codo a la axila es un octavo de la altura de un hombre.

La longitud de la mano es un décimo de la altura de un hombre.

La distancia de la barbilla a la nariz es un tercio de la longitud de la cara.

La distancia entre el hombro.

La anchura máxima de los hombros es un cuarto de la altura de un hombre.

La distancia del codo al extremo de la mano es un quinto de la altura de un hombre.

La distancia nacimiento del pelo y las cejas es un tercio de la longitud de la cara.

La altura de la oreja es un tercio de la longitud de la cara. (González, 2005)

Otras notas de Leonardo que se destacan son:

Cuatro codos hacen un paso y veinticuatro palmas hacen a un hombre. Si separas la piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya $1/14$ y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero. (González, 2005)

Algunos aportes del dibujo que se destacan es que el cuadrado tiene un centro que son los genitales del hombre y el círculo su centro es el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia es la razón áurea.

El cuerpo debe poseer una simetría bilateral en donde el lado derecho es igual al izquierdo.

2.4 LA ESPIRAL DE DURERO

Alberto Durero (1471-1528) pintor renacentista y apasionado por las Matemáticas, publicó en el año de 1525 una obra titulada "*Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*". Esta obra se constituye como un manual de métodos y técnicas para los artistas, pintores y matemáticos de la época para trazar figuras geométricas, muestra cómo trazar con regla y compás algunas espirales entre las que se destaca la espiral que lleva su nombre "Espirale de Durero" que se forma a partir de arcos de circunferencia inscritos en rectángulos áureos (Briceño, 2006).

Durero al ser pintor y no matemático, en su obra "*Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*", no realiza un estudio teórico de las espirales, únicamente se limita a dar pasos para su construcción.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

El método usado por Durero se denomina crecimiento gnómico, el cual consiste en encajar de forma recurrente, figuras geométricas semejantes y unir sus vértices, entre las cuales se encuentran las espirales relacionadas con la sucesión de Fibonacci y con el número áureo. (Pellico, 2006)

En Durero, la influencia que tiene del mundo helénico, le impone una restricción: la utilización exclusiva de la regla y el compás. Por ello, se limita a investigar la representación de espirales no uniformes mediante arcos de circunferencia (Ayala, 2008).

Para construir la espiral, Durero parte de un rectángulo áureo, que es aquel en el que la razón de sus dimensiones es Φ . Una propiedad que posee este tipo de rectángulo es la siguiente: si cortamos un cuadrado cuyo lado sea el lado corto del rectángulo obtenemos un rectángulo semejante al original, es decir tiene las mismas proporciones, o expresado al revés, si a un rectángulo áureo le añadimos sobre su lado mayor, un cuadrado obtenemos otro rectángulo áureo.

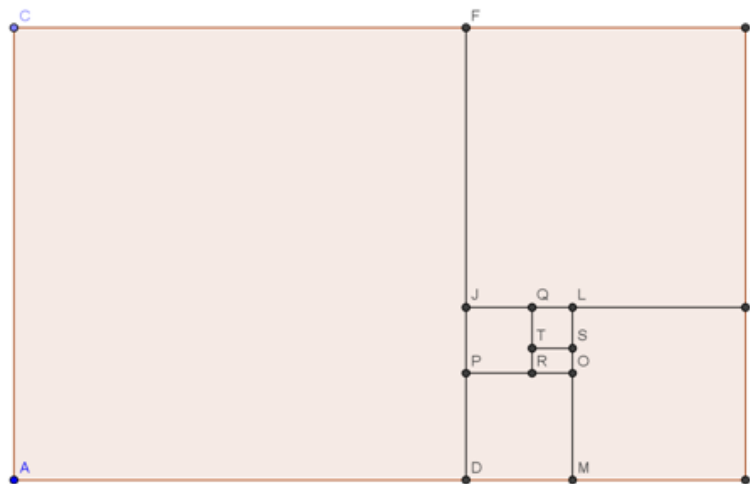


Ilustración 4: Rectángulo Áureo

La ilustración cuatro muestra una construcción sucesiva de rectángulos áureos tomando como rectángulo inicial a $ACIH$, si unimos mediante un arco de circunferencia dos vértices opuestos de cada uno de los cuadrados obtenidos, utilizando como centro de la misma otro de los vértices del mismo cuadrado, obtenemos una curva denominada como la espiral de Durero:

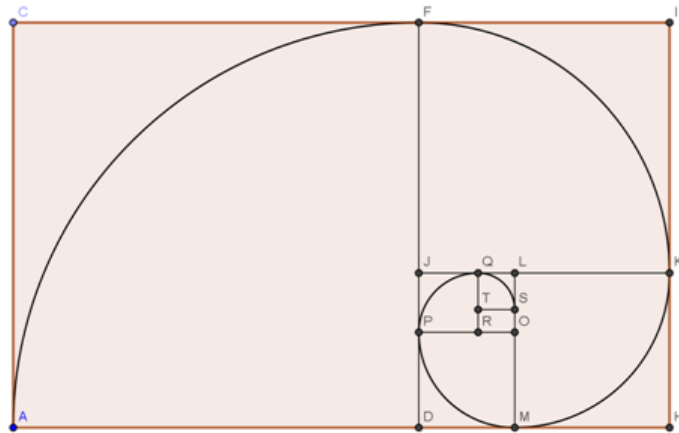


Ilustración 5: Espiral Áurea

Se debe aclarar que no es una espiral de Arquímedes ni una espiral logarítmica debido a que ninguna de las dos puede construirse con regla y compás, sin embargo se aproxima bastante a una espiral logarítmica de salto angular 90° y razón geométrica Φ . La única diferencia, es que los centros de esos arcos van saltando de un vértice a otro de los rectángulos.

Otra espiral gnómica basada en el número áureo es la que se construye tomando como base un triángulo isósceles cuyo ángulo menor mide 36° . A partir de cada triángulo se construye otro triángulo isósceles cuyo lado menor coincide con el mayor del triángulo anterior.

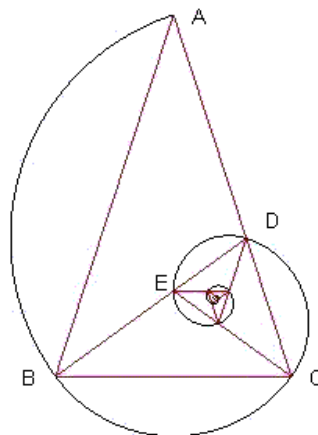


Ilustración 6: Espiral Áurea a partir de un Triángulo

Los cocientes entre el lado mayor y el lado menor de cada triángulo tienden hacia el número de oro.

La espiral se construye uniendo mediante arcos de circunferencia los vértices consecutivos de estos triángulos.

3. UN INSTRUMENTO CREADO PARA MEDIR LA RAZÓN ÁUREA

El instrumento que vamos a describir a continuación, se usó para medir de forma dinámica la razón phi (Φ) entre dos cantidades dadas, lo cual suponemos permitía al pintor destacar y distribuir los elementos claves en su pintura de acuerdo a la composición geométrica que establecía. Dicho instrumento recibe el nombre de compás áureo, ya que su estructura, diseño y uso están relacionados con esta razón.

Existen dos tipos de compás áureos, uno de dos puntas y otro de tres puntas, el primero sirve para averiguar si dos longitudes están en la razón Áurea, mientras el segundo sirve para comprobar si un segmento está dividido por un punto en razón áurea.

3.1 COMPÁS DE DOS PUNTAS DESCRIPCION FISICA

Consta de dos brazos unidos por un eje que articula el movimiento del instrumento

Dados $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, con C como punto de intersección entre los segmentos dados, el punto C es el eje de articulación de \overline{AB} y \overline{DE} , y también divide a estos dos segmentos en extrema y media razón.

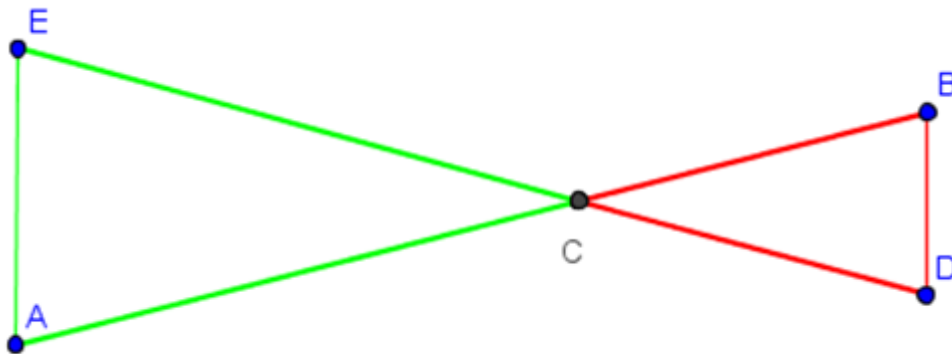


Ilustración 7: Construcción Compás de dos Puntas

Partiendo de que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y están divididos por C en razón Áurea, tenemos que $\overline{EC} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ por tanto ΔACE y ΔDBC son isósceles y $\angle ECA \cong \angle DCB$ luego $\Delta ACE \sim \Delta DBC$

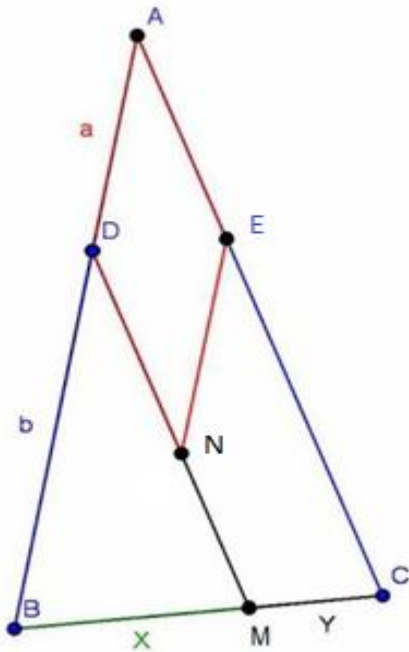
$$\text{De donde, } \frac{EC}{CD} = \frac{EA}{DB} = \Phi$$

Los segmentos EA y DB , son los que comparan dos longitudes y determinan si están en razón Áurea.

3.2 COMPAS DE TRES PUNTAS DESCRIPCION FISICA

Consta de dos brazos de igual longitud, dos brazos interiores de menor longitud y cuatro ejes que articulan su movimiento

Los brazos exteriores $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, están divididos en razón áurea por los puntos D y E , el brazo \overline{DM} es paralelo a \overline{AC} , tal que \overline{BC} es dividido en razón áurea por M y el brazo \overline{EN} es paralelo a \overline{AB} , en este compás el brazo \overline{EN} es el soporte que garantiza el paralelismo entre \overline{DM} y \overline{AC} para que la razón siempre sea la misma entre \overline{BM} y \overline{MC}



Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ΔABC es isósceles, y $\overline{DB} \cong \overline{DM}$, ΔDBM es isósceles, también se tiene que $\angle BAC \cong \angle BDM$ luego $\Delta ABC \sim \Delta DBM$

De donde, $\frac{BD}{DA} = \frac{BM}{MC} = \Phi$

Los segmentos BM y MC , determinan si un segmento está dividido en razón Áurea.

Ilustración 8 Construcción Compás de tres Puntas

3.3 CONSTRUCCIÓN COMPAS ÁUREO EN GEOGEBRA

A continuación mostramos los pasos a seguir para construir el compás áureo haciendo uso del programa Geogebra, el cual permitirá medir de forma dinámica algunos elementos en las pinturas de Leonardo da Vinci.

En primer lugar construiremos la razón Áurea de la siguiente forma:

1. Sean A y B dos puntos cualesquiera
2. Trazar \overline{AB}
3. Sobre B trazar la perpendicular l a \overline{AB}
4. Hallar C, punto medio de \overline{AB}
5. Con centro en B y radio CB trazar la circunferencia c

6. Llamar D el punto de intersección entre la circunferencia c y la recta l
7. Trazar \overline{AD}
8. Con centro en D y radio CB, trazar la circunferencia c'
9. Llamar E el punto de intersección entre \overline{AD} y c'
10. Con centro en A y radio AE trazar la circunferencia m
11. Llamar F el punto de intersección entre \overline{AB} y m
12. Ocultar, los puntos C y E, las circunferencias c , c' y m , la recta r y el segmento AD
13. Construir \overline{AF} y \overline{FB}
14. El punto F divide a \overline{AB} en extrema y media razón

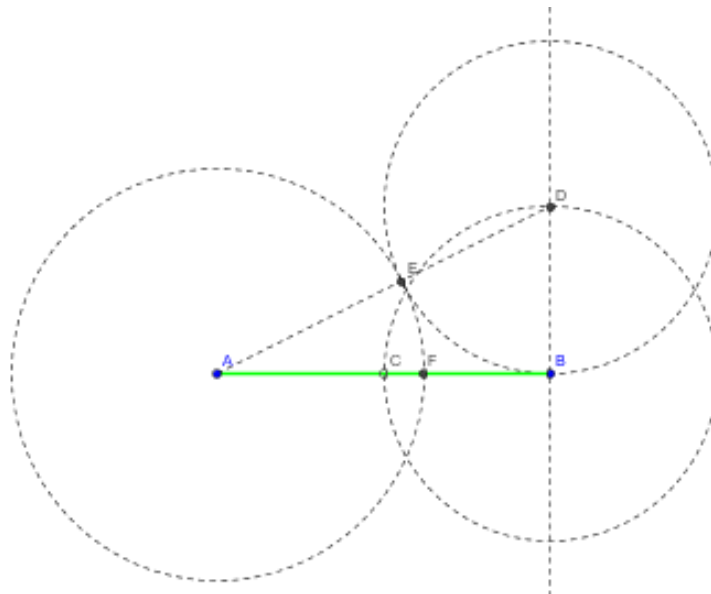


Ilustración 9: Construcción Sección Áurea

A partir de la razón áurea vamos a construir un objeto auxiliar, con la función “Herramienta nueva” de Geogebra, que permite programar la construcción de un segmento áureo.

1. En la barra superior hacer clic en **herramientas** y de la ventana que se desplaza hacer clic en “**creación de herramienta nueva**”
2. En la nueva ventana aparece en el campo **objeto de salida** y seleccionamos los segmentos \overline{AF} y \overline{FB}
3. En el campo **objetos de entrada** seleccionamos los puntos **A y B**
4. En el campo **nombre del icono** escribimos “Razón Áurea”
5. Hacer clic en **concluido** y se creara la herramienta nueva que aparecerá en la barra superior.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

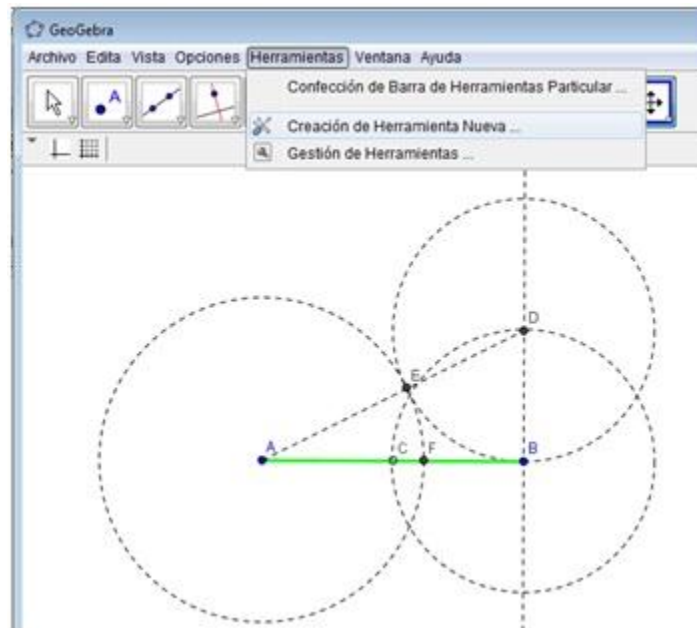


Ilustración 10: Creación de una Macro en Geogebra pasó 1

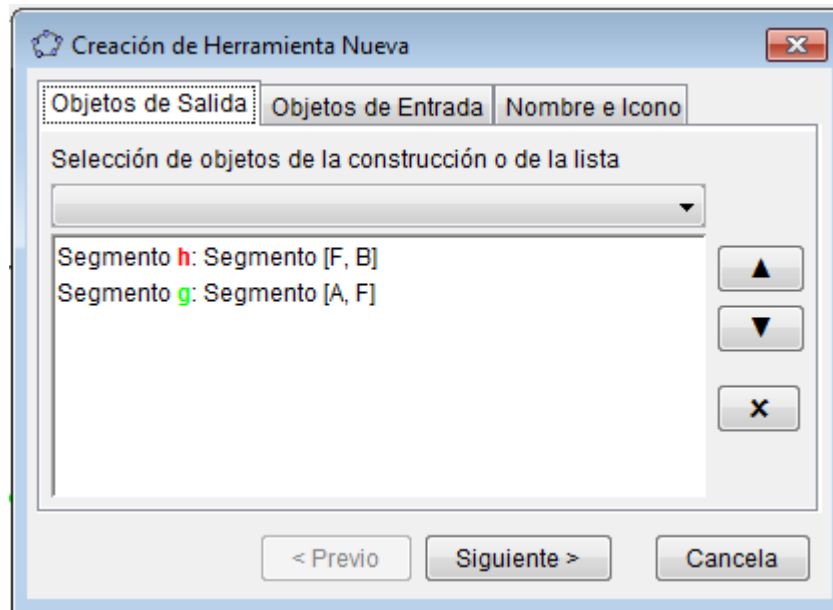


Ilustración 11: Creación de una Macro en Geogebra pasó2

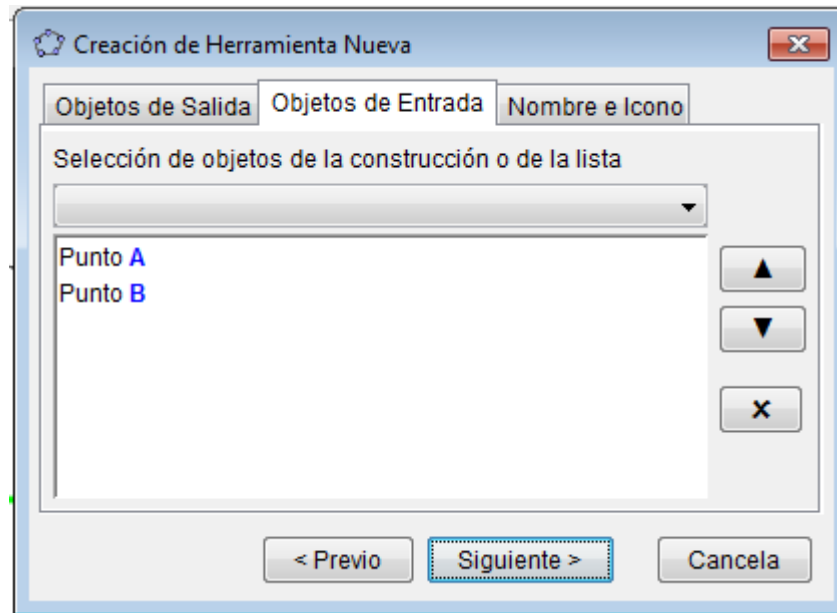


Ilustración 12: Creación de una Macro en Geogebra pasó3

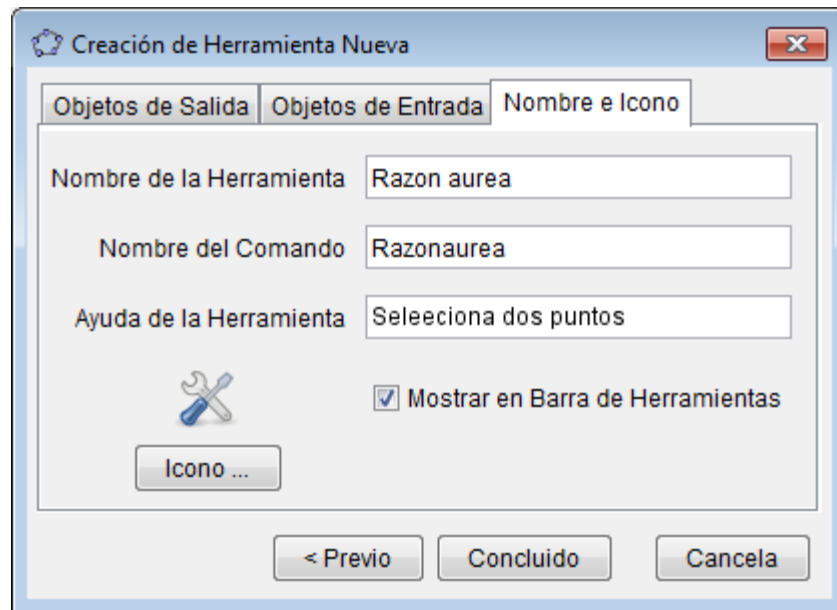


Ilustración 13: Creación de una Macro en Geogebra pasó 4

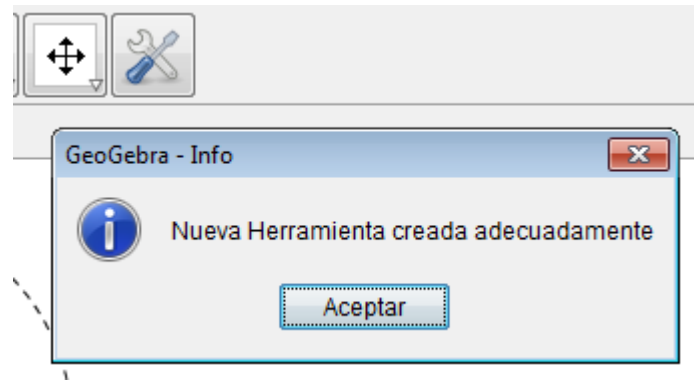


Ilustración 14: Creación de una Macro en Geogebra pasó 5

Con la herramienta construida describiremos los pasos que permiten construir el compás áureo de la siguiente forma:

1. Construir un deslizador a , tal que, $1 \leq a \leq 10$
2. Construir \overline{AB} , tal que $AB > 2a$
3. Con centro en A y radio a construir una circunferencia c
4. Con centro en B y radio a construir una circunferencia c'
5. Llamar C el punto de intersección de las dos circunferencias.
6. Con la herramienta Razón áurea, seleccionar A y C y se construyen AD y CD
7. Con la herramienta Razón áurea, seleccionar B y C y se construyen BE y CE
8. Con la herramienta Razón áurea, seleccionar A y B y se construyen AF y FB
9. Con la herramienta Razón áurea, seleccionar D y F y se construyen DG y GF
10. Trazar el segmento con extremos E y G
11. El mecanismo construido es el compás áureo

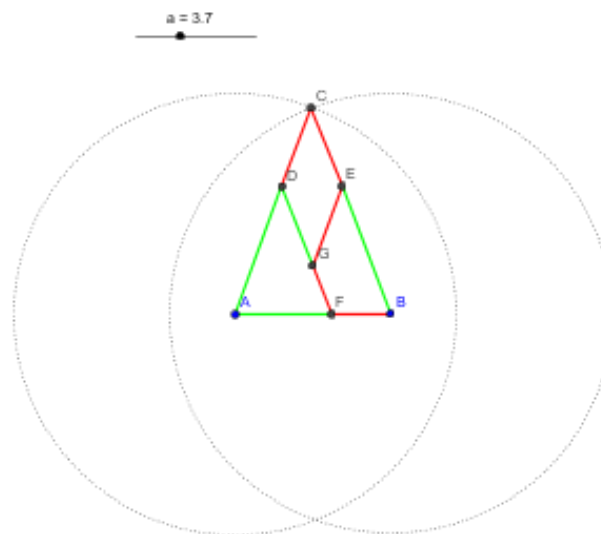


Ilustración 15: Compás de tres puntas, teniendo en cuenta los protocolos de construcción en Geogebra.

4. ANALISIS DE ALGUNAS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Teniendo en cuenta que Leonardo planteaba que las pinturas debían ser réplicas de la realidad, y que en su tratado sobre las pinturas, impreso hasta el siglo XVIII, se encuentra la frase “Nadie que no sea matemático lea mis obras”. En los siguientes análisis pretendemos comprobar cómo se encuentra inmersa la razón áurea y la espiral áurea en las pinturas de Leonardo, además si las medidas de los cuerpos en las obras, mantienen relación con las proporciones que se encontraron en el “hombre del vitruvio” que es la pintura que representa las proporciones perfectas del ser humano según Leonardo.

Aclaremos que no intentamos hacer una reconstrucción exacta del diseño de la obra, solo mostramos algunos elementos que a partir de las mediciones hechas con el compás y la espiral, nos permiten evidenciar algunos elementos, que contiene la obra, para tales efectos se plantean las siguientes hipótesis de estudio:

- En los dibujos planos de Leonardo está presente la razón áurea.
- En las pinturas de Leonardo con perspectiva está presente la razón áurea.
- En las pinturas de Leonardo con perspectiva esta presenta la espiral áurea en las curvaturas de los cuerpos.
- En las pinturas y en los dibujos de Leonardo se encuentra el rectángulo áureo.

4.1 ANÁLISIS DEL DIBUJO RETRATO DE UN HOMBRE

En este dibujo (ilustración 16) se observa el interés de Leonardo por las medidas y las proporciones que deben guardar las partes del cuerpo humano en este caso particular la cabeza.

La hipótesis que plantemos en este caso son: en primer lugar que las medidas que aparecen y el cuadrado que encierra la cabeza se corresponde con un rectángulo áureo, y en segundo lugar la silueta del hombre de la parte izquierda de la pintura está en razón áurea respecto a su altura y en tercer lugar, la curvatura de la espalda describe parte de una espiral áurea.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

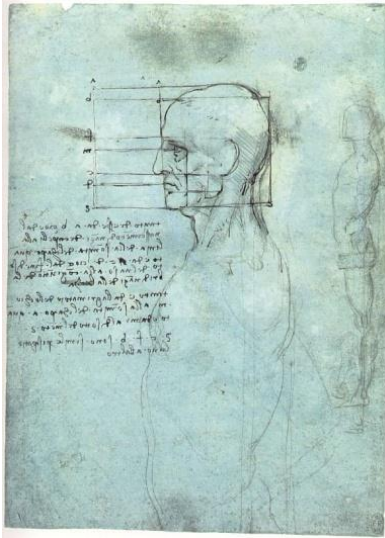


Ilustración 16 retrato de un hombre

Dibujo en pluma y tinta de 213x153 mm. De los cuadernos de notas. Es un estudio de proporciones de una cabeza masculina de perfil realizado alrededor de 1490(Zöller, 2000, pág. 39)

El dibujo muestra una cabeza encerrada en lo que posiblemente es un cuadrado, acompañado de unas notas que versan sobre las medidas del hombre en particular la cabeza.

En la parte izquierda como si estuviera atrás se observa la silueta de un hombre que parece corresponder al de la cabeza que se encuentra al frente del dibujo.

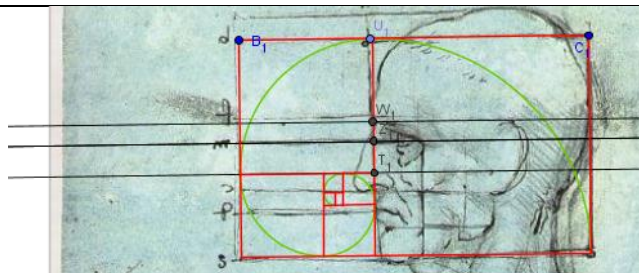
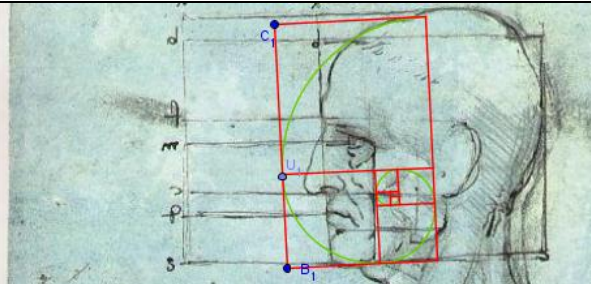
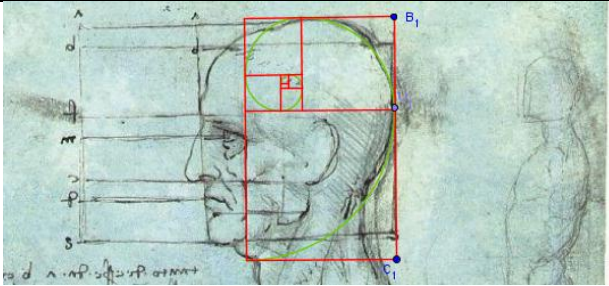
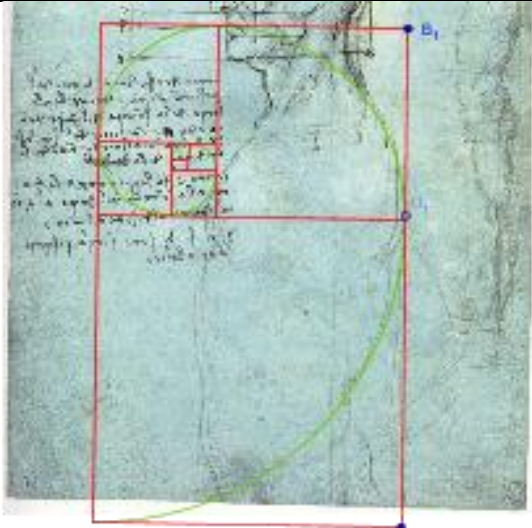


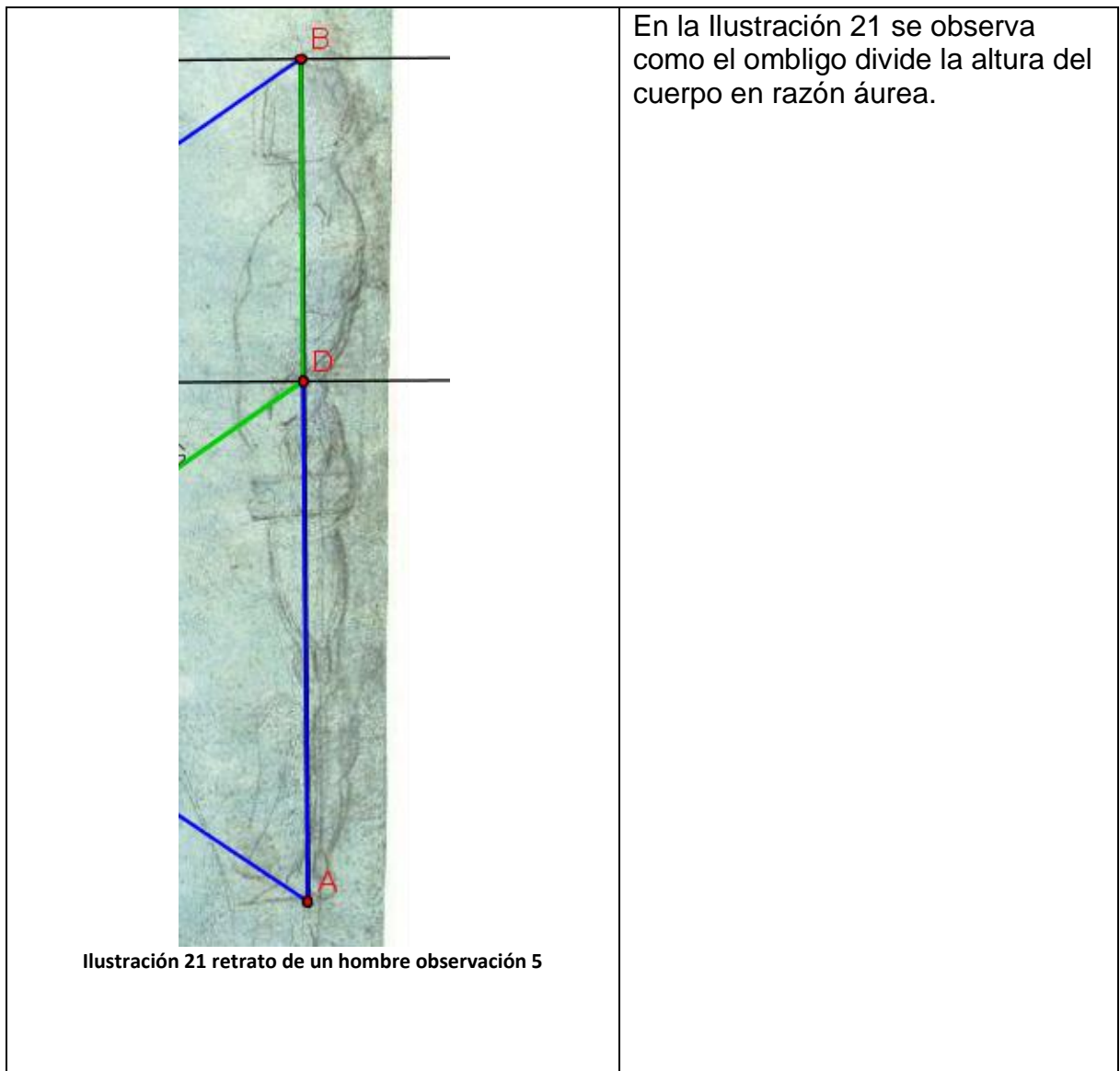
Ilustración 17 retrato de un hombre observación 1

En la Ilustración 17 se observa que el rectángulo que tiene como vértices los puntos d y s en el dibujo, coincide con el rectángulo áureo de lado mayor B_1C_1 , construido con el programa Geogebra.

Las rectas paralelas que pasan por f, m, p en el dibujo tocan al rostro en la parte superior de la nariz, el centro del ojo, el centro de la boca manteniendo la razón aurea entre las partes del rostro de acuerdo a la descripción del hombre vitruvio.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

 <p>Ilustración 18 retrato de un hombre observación 2</p>	<p>En la Ilustración 18 se observa el rectángulo áureo que encierra el rostro del hombre y va desde la punta del mentón hasta la parte superior de la cabeza.</p>
 <p>Ilustración 19 retrato de un hombre observación 3</p>	<p>En la Ilustración 19 se observa como la espiral determina la curvatura de la cabeza del hombre en la parte de atrás y como esta parte de la cabeza que encerrada dentro de un rectángulo áureo.</p>
 <p>Ilustración 20 retrato de un hombre observación 4</p>	<p>En la Ilustración 20 se observa un rectángulo áureo cuya altura va desde los genitales hasta la boca del hombre, y una parte la espiral formada con este rectángulo, determina la curvatura de la espalda del hombre.</p>



A partir del análisis de este dibujo podemos concluir que a Leonardo le preocupaba que sus obras mantuvieran una proporción en su composición y que el objeto matemático que le servía para tal fin era la razón áurea, ya en las mediciones hechas, se observa cómo éstas coinciden con los trazos hechos por Leonardo en su dibujo.


4.2 Análisis del dibujo de Leonardo da Vinci Isabella d'Este

Realizada alrededor de 1499, carboncillo, tiza negra y pastel sobre papel, los contornos más importantes están perforados con una fina aguja para garantizar el trazado exacto del retrato a la tabla(Zöllner, 2000, pág. 63)

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

Para este dibujo muestra que su composición geométrica consta de tres circunferencias tangentes entre sí, de radios colineales de longitud 1, 2 y 3 unidades respectivamente como se verá en las ilustraciones siguientes.

En este dibujo planteamos las siguientes hipótesis: Los centros de las circunferencias que distribuyen la composición de la pintura serán puntos áureos con respecto a alguna parte de la pintura, las distancias entre las partes del rostro de Isabella al estar de perfil, están en la misma razón que el rostro del retrato del vitruvio.

Figura	Observaciones realizadas
 <p data-bbox="298 1209 594 1234">Ilustración 22 Isabella d'Este</p>	<p data-bbox="932 615 1252 646">Isabella d'Este, Paris</p> <p data-bbox="932 648 1443 680">Museo: Museo Nacional del Louvre</p> <p data-bbox="932 682 1346 714">Características: 63 x 46 cm.</p> <p data-bbox="932 716 1354 793">Material: Yeso y pastel sobre papel(Zöller, 2000, pág. 63)</p> <p data-bbox="932 833 1417 936">Se observa a Isabella posando de perfil con su mirada fija en el horizonte</p>

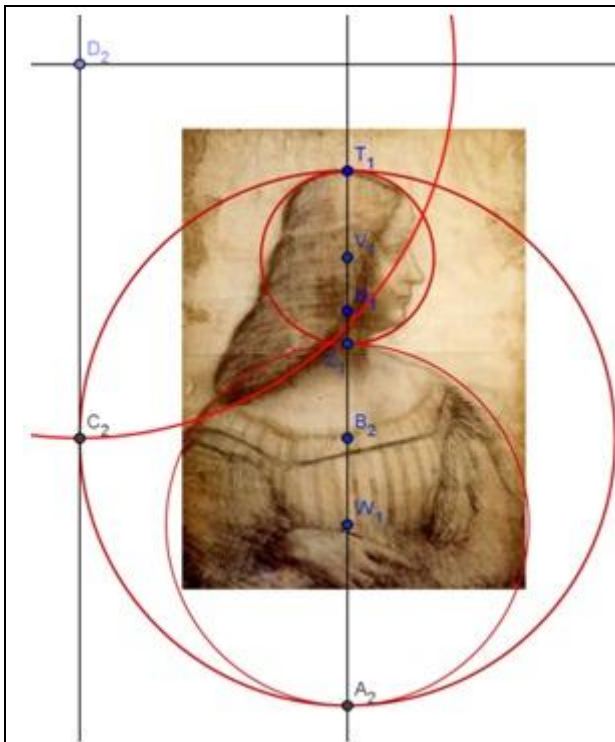


Ilustración 23 Isabella d'Este observación 1

En la Ilustración 23 se observa la estructura geométrica de este dibujo, que está enmarcada dentro de tres círculos tangentes entre sí, con sus centros colineales, la parte del cabello también describe la curvatura de una circunferencia (seshat.ch).

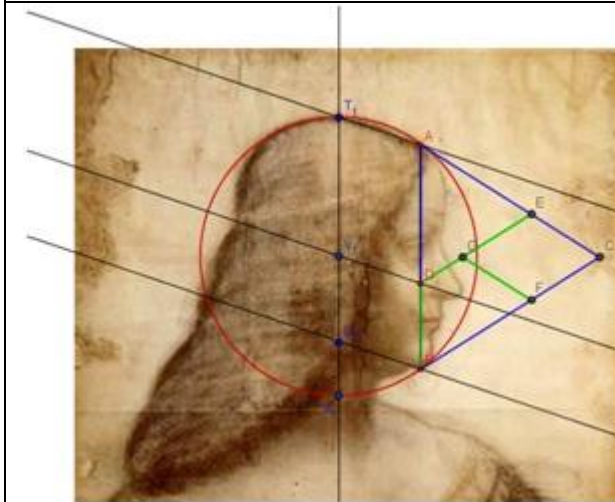


Ilustración 24 Isabella d'Este observación 2

En la Ilustración 24 observamos que V1 es el centro de la circunferencia y además divide a U1T1 en extrema y media razón, o en otras palabras lo divide en razón Áurea ya que

t1, v1, u1, son rectas paralelas que pasan por A, D y B respectivamente, por tanto

$$\frac{T1U1}{T1V1} = \frac{T1V1}{V1U1} = \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \Phi$$

Aunque el cabello de Isabella no lo permite, ver suponemos que V1 coincide con el centro de la oreja del retrato.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

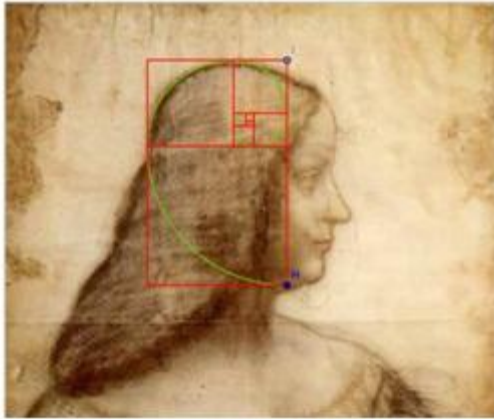


Ilustración 25 Isabella d'Este observación 3

La Ilustración 25 muestra como la espiral Áurea describe la curvatura de la cabeza de Isabella.

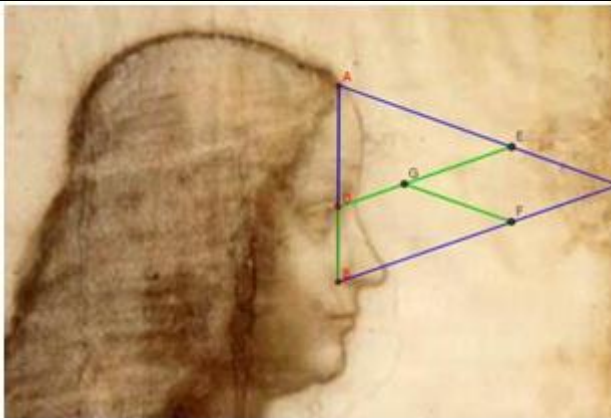


Ilustración 26 Isabella d'Este observación 4

Las Ilustración 26 permite ver mediante el compás la razón áurea en la parte superior del rostro de Isabella.

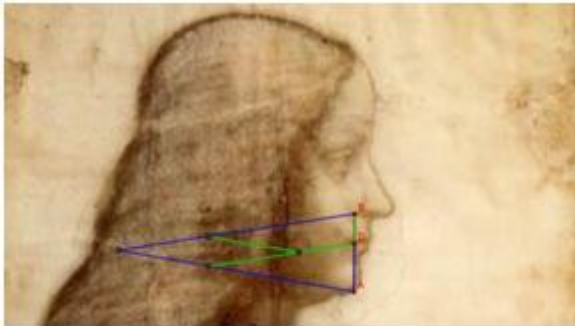


Ilustración 27 Isabella d'Este observación 5

La Ilustración 27 permite ver la razón áurea en la parte inferior del rostro de Isabella

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI



Ilustración 28 Isabella d'Este observación 6

La Ilustración 28 podemos comprobar que el rostro de Isabella se encuentra encerrado en un rectángulo áureo y como la espiral describe parte de la curvatura de la cabeza, que inicia en la parte de atrás del rostro de Isabella y termina en la punta del dedo de Isabella.

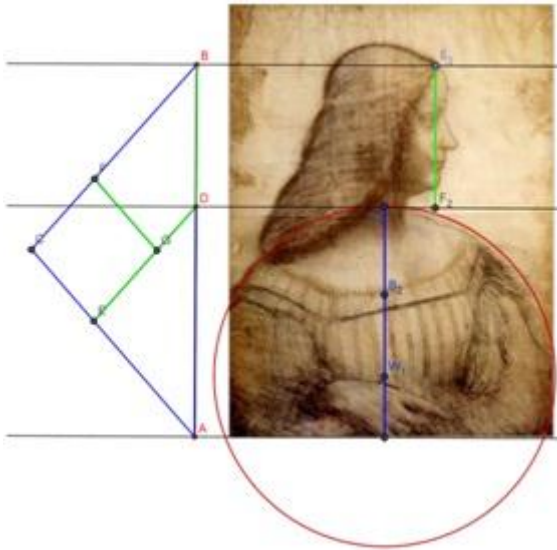


Ilustración 29 Isabella de d'Este observación 7

La Ilustración 29 muestra la razón Áurea que existe entre el rostro extendiéndose hasta el cuello y la parte del tronco del retrato.

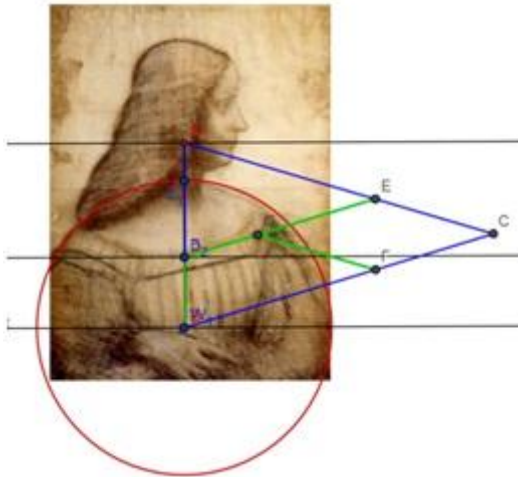


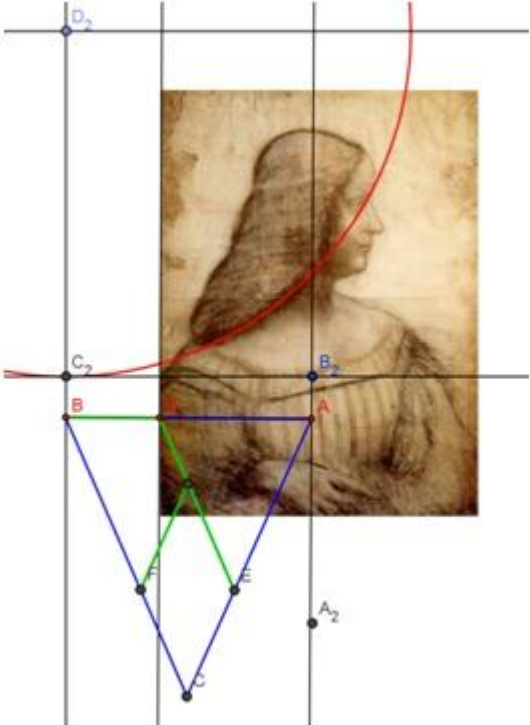
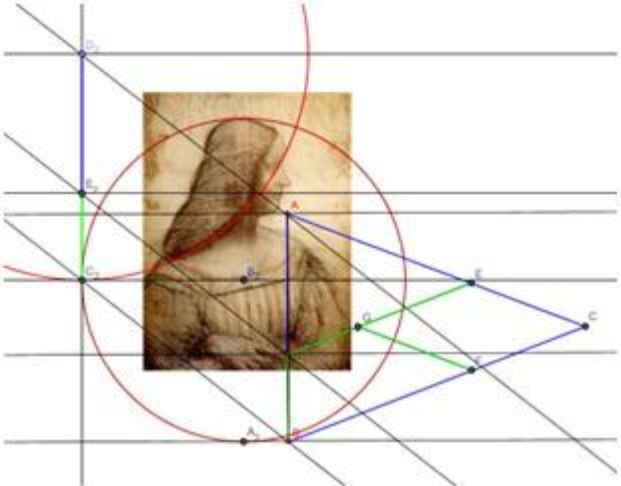
Ilustración 30 Isabella d'Este observación 8

En la Ilustración 30 se observa el centro $W1$ de la circunferencia, es el extremo de $\overline{AW1}$, el cual va desde A ubicado en una recta perpendicular a $\overline{AW1}$, que pasa por la boca de Isabella; hasta $W1$ que esta arriba de la mano de Isabella.

El punto $B2$ divide a $\overline{AW1}$ en razón áurea

Las rectas perpendiculares a $\overline{AW1}$, que pasan por $A, B2, W$ muestran aspectos relacionados con las

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

	<p>medidas expuestas en el hombre Vitruvio</p> <p>En las Ilustraciones 31 y 32 se observa la obtención del centro del arco de circunferencia que describe una parte del cabello del retrato, nuevamente la razón Áurea es la que está presente esta vez en el extremo de $C2D2$</p>
<p>Ilustración 31 Isabella d'Este observación 9</p>  <p>Ilustración 32 Isabella d'Este observación 10</p>	

De acuerdo a las observaciones realizadas mediante el compás y la espiral podemos concluir que: en primer lugar que $V1$ es el centro de la circunferencia que encierra la cabeza y es la traslación del punto D (Ilustración 24) que divide en razón aurea el rostro de perfil de Isabella. $W2$ Es el centro de la circunferencia que

encierra el tronco de Isabella además es el extremo del segmento AW_2 que es perpendicular a una recta paralela que pasa por la boca de Isabella (Ilustración 30 9), y B_2 es el punto que divide en razón áurea a $\overline{AW_2}$ y es el centro de la circunferencia que encierra a todo el cuadro (Ilustración 31 y 32).

En segundo lugar las Ilustración 26 y 27 permitieron ver que la razón áurea se encuentra en el rostro de Isabella vista de perfil y se corresponde con las medidas dadas en el hombre vitruvio y la Ilustración 29 muestra la razón áurea entre la cabeza y la parte del tronco visible en el dibujo que también mantiene la misma relación con el hombre vitruvio.

Y en tercer lugar, las Ilustraciones 25 y 28 muestran la espiral y el rectángulo áureo en la curvatura de la cabeza de Isabella y la división entre el cuerpo y la cabeza mediante el rectángulo áureo y el cuadrado que se forma dentro del rectángulo.

El análisis de esta pintura sirve de ejemplo del uso de las razones del hombre vitruvio en los dibujos sin perspectiva de Leonardo da Vinci.

4.3 ANÁLISIS DE LA PINTURA LEDA Y EL CISNE

En esta pintura se observa (Ilustración 33) el manejo de la perspectiva aérea que Leonardo usaba en sus obras lo cual le da volumen y profundidad a la obra ,y el cuerpo de una mujer desnuda ligeramente curvada, razón por la cual nos centraremos en el estudio del cuerpo de Leda planteando las siguientes hipótesis:

La razón áurea se mantiene en el cuerpo de la mujer pese a estar curvada y la espiral describe la curvatura de la cabeza de la mujer y parte del brazo.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI



Ilustración 33 Leda y el cisne

Óleo sobre madera

69,5 x 73,5 cm

1505-1510

Colección del Earl of Pembroke

El original de Leonardo se considera perdido. Se sabe de su existencia por fuentes escritas y varias copias (Zöller, 2000, pág. 81).

En la escena se observa a Leda reina de Esparta abrazando a Zeus Dios del Olimpo metamorfoseado en cisne, al lado derecho de Leda se observan dos huevos de los cuales nacieron cuatro hijos: Helena, Clitemestra, Cástor y Pólux.

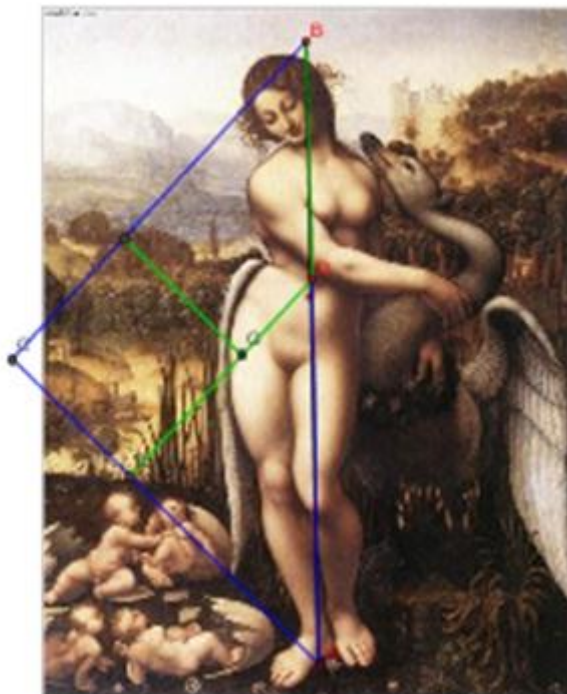


Ilustración 34 Leda y el Cisne observación 1

En la Ilustración 34 se observa que el compás mide la altura de Leda con \overline{AB} y D es el punto que divide a \overline{AB} en razón áurea, el cual se aproxima al ombligo de Leda manteniendo la razón áurea que se plantea en el hombre vitruvio.

Para esta pintura no coincide el punto B con la parte superior de la cabeza de Leda, debido a la ligera inclinación del cuerpo, por tal motivo D no coincide con el ombligo de Leda, la suposición que hacemos es que si Leda se ubica totalmente vertical sin ninguna inclinación, su altura alcanzará la longitud de AB , y el ombligo coincidirá con el punto D .

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI



Ilustración 35 Leda y el Cisne observación 2

En la Ilustración 35 se observa que la curvatura del brazo de Leda que abraza al Cisne esta aproximada a la curvatura de la espiral aurea.

Por otra parte se observa que el rectángulo áureo que tiene su base sobre el ombligo de leda, divide el tronco de la cabeza en dos cuadrados que se forman dentro del rectángulo áureo, que desde nuestro punto de vista le otorgan a la pintura una organización y orden en su composición.

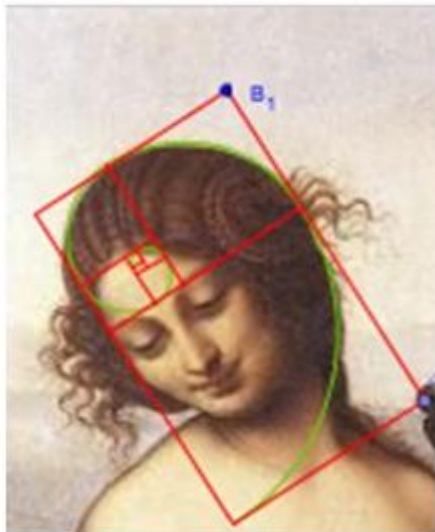
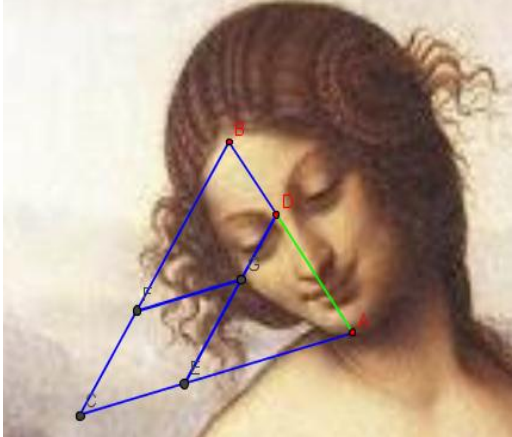
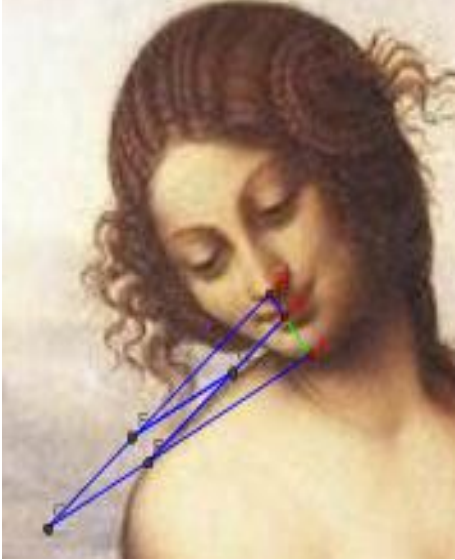


Ilustración 36 Leda y el Cisne Observación 3

En la Ilustración 36 se puede observar como la curvatura de la cabeza inclinada de Leda se corresponde a la curva descrita por la espiral.

 <p>Ilustración 37 Leda y el Cisne Observación 4</p>	<p>En la Ilustración 37 se observa la razón áurea medida con el compás en el rostro de Leda desde la punta del mentón hasta el inicio del cabello en la frente.</p>
 <p>Ilustración 38 Leda y el Cisne observación 5</p>	<p>En la Ilustración 38 se observa la razón áurea entre el mentón de Leda, la punta de la nariz y el centro de la boca, en donde D divide a AB en razón áurea.</p>

De acuerdo a las observaciones realizadas en esta pintura podemos concluir que el uso de la espiral y la razón aurea se encuentran presentes en la composición del cuerpo de Leda, tanto en su altura como en el rostro y la cabeza, lo cual permite suponer que el uso de esta razón ayudó a Leonardo a mantener la proporción del cuerpo en la pintura.

4.4 ANALISIS DE LA PINTURA DE LEONARDO LA VIRGEN DE LAS ROCAS

La escena de esta pintura (Ilustración 39) retratada en una cueva o gruta muestra a la virgen en el centro del cuadro, a san Juan el Bautista a la derecha de la virgen, a Jesús a la parte izquierda delante del ángel, siendo estos dos infantes y a un ángel protegiendo a Jesús.

Para esta obra planteamos como hipótesis que Leonardo uso la razón y la espiral áurea en la composición y distribución de los cuerpos en la pintura.



La Virgen de las Rocas (María con el niño), San Juan Bautista y un ángel. Hacia 1493 – 1495. Y 1506 – 1508. Óleo sobre madera 189,5 x 120 cm Londres, Nacional Gallery (Zöller, 2000, pág. 31)

Ilustración 39 la Virgen de las Rocas

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

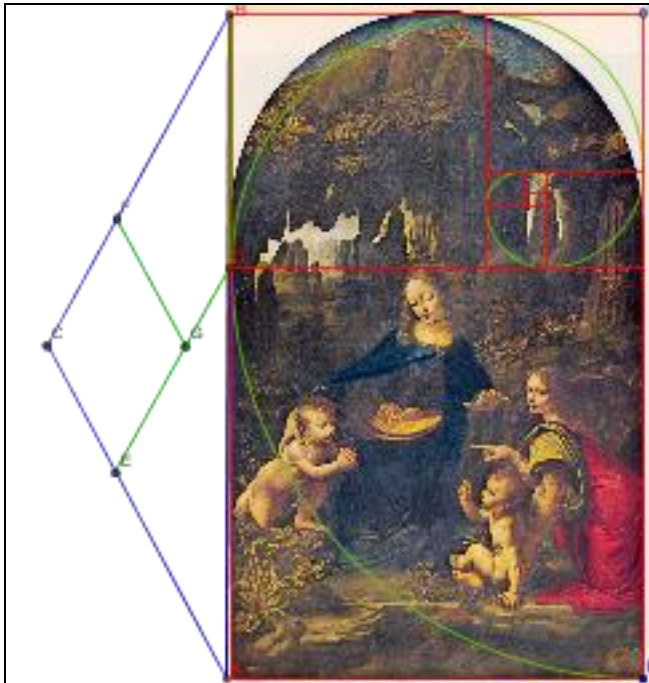


Ilustración 40 la Virgen de las Rocas observación 1

En la Ilustración 40 se observa que las dimensiones de la pintura y ella misma se aproximan a las dimensiones de un rectángulo áureo.

Por otra parte se observa que el rectángulo construido sobre la pintura, divide la escena en dos partes, en la parte superior del cuadrado de longitud AD se encuentra el arco de la pintura y la escena de los árboles al fondo de la pintura, y en la parte del cuadrado se encuentra la escena principal en donde están la Virgen, el ángel y los dos niños.

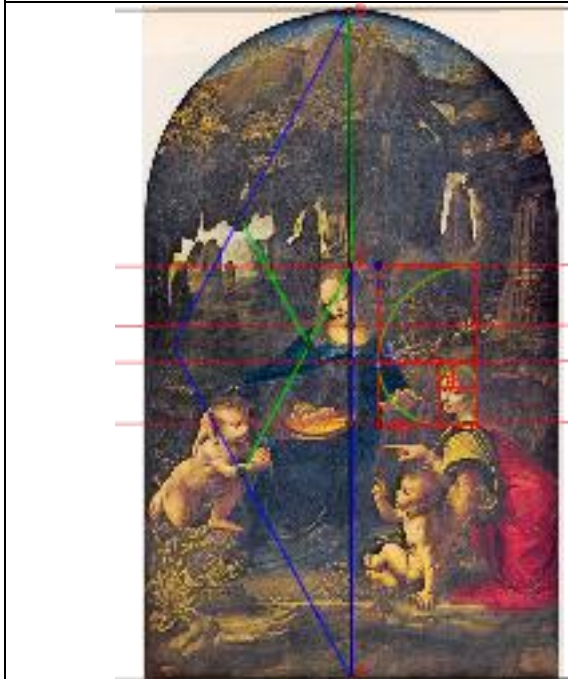


Ilustración 41 la Virgen de las Rocas observación 2

En la Ilustración 41 se observa que el punto D que divide \overline{AB} en razón aurea se encuentra en la parte superior de la cabeza de la virgen, sobre el cual se traza una recta perpendicular a AB para ubicar un rectángulo áureo, en este rectángulo con las rectas perpendiculares que se trazan a AB , se observa que la cabeza del ángel queda inscrita en un rectángulo áureo.

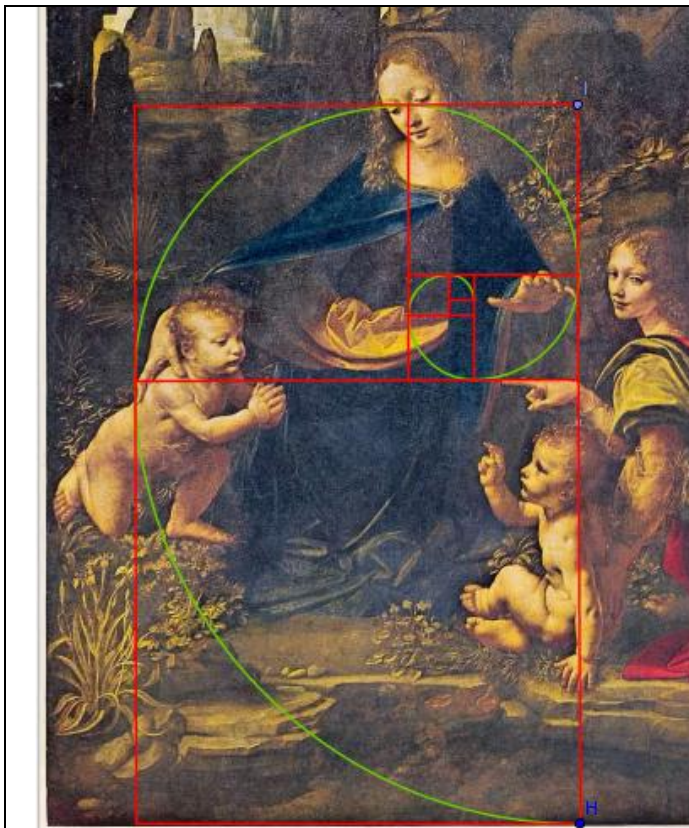


Ilustración 42 La Virgen de las Rocas observación 3

En la Ilustración 42 la espiral que se forma y parece iniciar al costado izquierdo del troco de la virgen, toca el dedo de la mano levantada que parece proteger al niño Jesús y también toca el dedo de la mano que abraza a San Juan el Bautista, además el dedo del ángel que señala al san Juan el Bautista también toca la espiral.

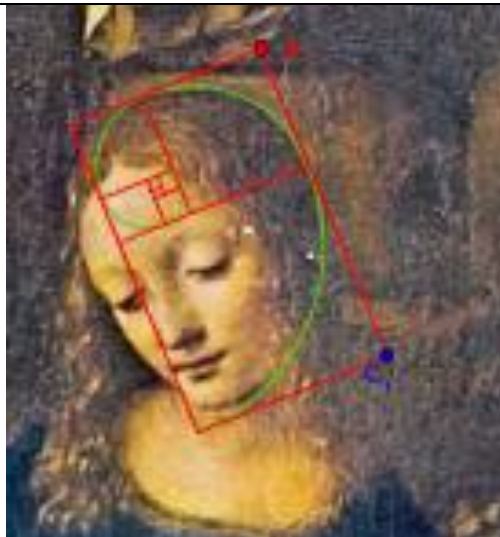


Ilustración 43 La Virgen de las Rocas observación 4

En la Ilustración 43 las dimensiones de la cabeza de la virgen forman un rectángulo áureo y la espiral áurea delimita la curvatura de la cabeza.



Ilustración 44 La Virgen de las Rocas observación 5

En la Ilustración 44, la parte superior de la espiral delimita la curvatura de la frente de la virgen, y el rostro queda inscrito en un rectángulo áureo.

La curvatura del rostro no se ajusta totalmente a la curvatura de la espiral como en las obras anteriores.

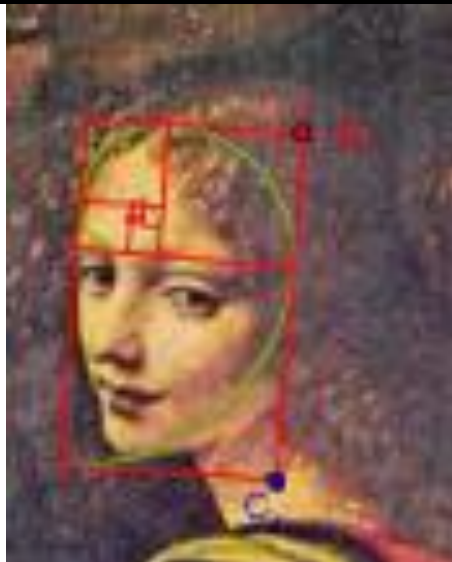


Ilustración 45 La virgen de las Rocas observación 6

En la Ilustración 45 el rostro del ángel queda inscrito en un rectángulo áureo, y la espiral que se forma con este rectángulo se aproxima a la curvatura del rostro del ángel pero no se ajusta del mismo modo que en las obras anteriores.

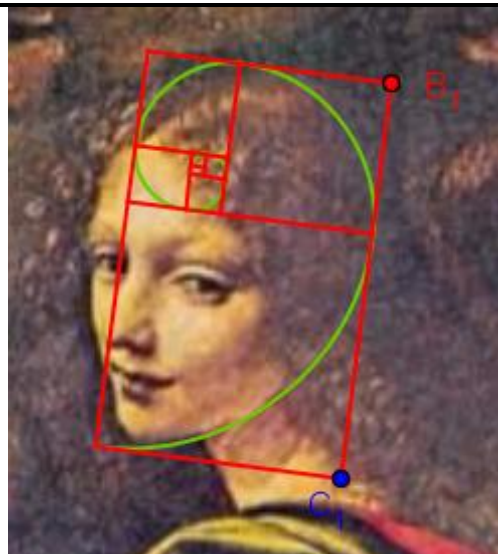


Ilustración 46 La Virgen de las Rocas observación 7

En la Ilustración 46 se observa que las dimensiones de la cabeza forman un rectángulo áureo y que la curvatura de la cabeza es delimitada por la espiral.

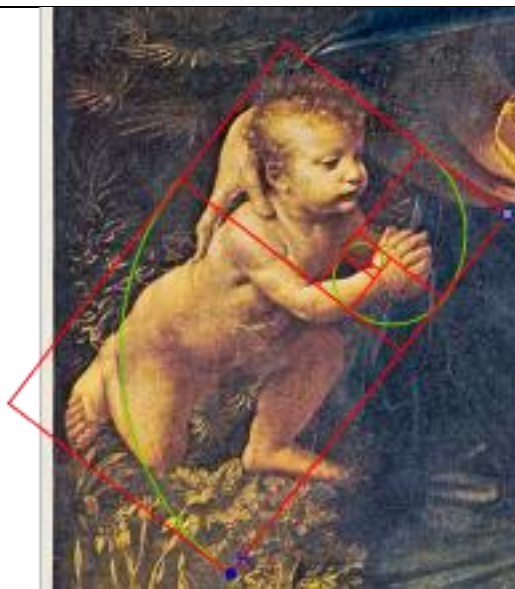


Ilustración 47 La Virgen de las Rocas observación 8

En la Ilustración 47 se observa que el rectángulo que se aproxima a encerrar el cuerpo de san Juan el Bautista no mantiene la distribución en la composición del cuerpo y la espiral tampoco se ajusta a la curvatura del cuerpo.

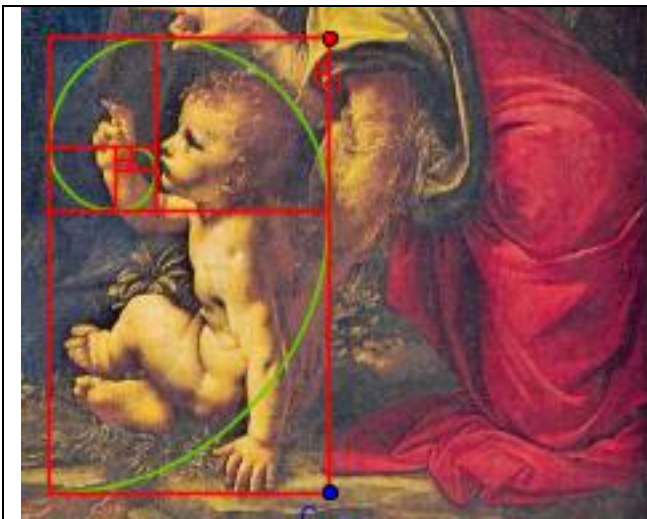


Ilustración 48 La Virgen de las Rocas observación 9

En la Ilustración 48 se observa que el rectángulo que se aproxima a encerrar el cuerpo el niño Jesús no mantiene la distribución en la composición del cuerpo y la espiral tampoco se ajusta a la curvatura del cuerpo.

A partir del análisis de esta pintura mediante el compás y la espiral áurea concluimos que la hipótesis no se sostiene, pensamos que el asunto de la perspectiva y el escorzo modifican estas relaciones, asunto que sobrepasa las pretensiones de este documento.

CONCLUSIONES

Al iniciar este trabajo nos preguntábamos como está inmersa la razón áurea y la espiral áurea en algunas pinturas de Leonardo da Vinci, y como estos objetos matemáticos le daban forma a la composición de la obra, para lo cual comenzamos con una revisión bibliográfica que nos dieran información acerca de la relación arte- geometría y Leonardo da Vinci durante la época del renacimiento.

Por otra parte empleamos un programa de geometría dinámica (Geogebra) que permitiera manipular en las pinturas, el compás áureo y la espiral áurea, para realizar algunas observaciones de las cuales concluimos:

En la revisión bibliográfica se evidenció, que en el renacimiento las obras de arte debían contener una composición geométrica que dotara a la pintura de orden y ubicación de los elementos principales y secundarios dentro de la misma.

El renacer del saber grecorromano influyó considerablemente la forma de pensar del pintor renacentista.

El interés y la preocupación por representar lo más fielmente posible la naturaleza en la pintura, condujo al pintor a profundizar sus estudios en matemáticas particularmente la geometría, tanto euclidiana como proyectiva.

Algunos de los apuntes que se conservan de las pinturas de Leonardo muestran algunos elementos del uso de la proporción Áurea en la composición del cuerpo humano que posteriormente usa para recrear la pintura, aunque no dejan ver la composición geométrica de la pintura, ya que realizaba sus bocetos en diferentes hojas para los diferentes elementos de la pintura

Sobre las pinturas se observó que los rostros de las pinturas siempre están contenidos en un rectángulo áureo y la curva de la espiral delimita la curva del rostro y la cabeza en concordancia con la obra del hombre Vitruvio

Los detalles del rostro en las obras están de acuerdo a las proporciones establecidas en el cuadro del vitruvio

Debido al uso de la perspectiva y la curvatura de los cuerpos en las pinturas, el instrumento usado mediante el programa no permite evidenciar de forma clara las demás proporciones del cuerpo, de acuerdo al retrato del vitruvio.

En este trabajo no se tuvo en cuenta ni se estudió el uso de la perspectiva en las pinturas, entonces queda como una cuestión abierta para un posible trabajo el estudio de la perspectiva en las obras empleando algún programa de geometría dinámica.

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

Hacer un estudio del uso de las matemáticas en otras áreas del conocimiento en un momento clave de la historia permite al profesor tener una visión más amplia de lo que son las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8. (30 de 11 de 2011). Recuperado el 09 de 08 de 2013, de youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8: <http://www.youtube.com/watch?v=TdofNmzN6c8>
- Alberti, L. B. (1837). *Tratado de las pinturas* *On openlibrary.org*. Recuperado el 09 de 06 de 2013, de <http://books.google.com.co/books?id=qaNJnyApYG0C&printsec=frontcover&dq=tratado+de+la+pintura&hl=es-419&sa=X&ei=tQJxUqziN4itsATa9ICgCg&ved=0CDkQ6AEwAg#v=onepage&q=tratado%20de%20la%20pintura&f=false>
- Alicia Carvajal, V. V. (2012). *Actas - Instituto GeoGebra Uruguay*. Recuperado el 28 de 06 de 2013, de *Actas - Instituto GeoGebra Uruguay*: www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf
- Briceño, C. (17 de 09 de 2006). *Analitica.com*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de <http://www.analitica.com/media/6442397.pdf>
- Carrasco, J. J. (2010). *Renacimiento Siglo XV Y XVI*. Recuperado el 09 de 08 de 2013, de http://josejrodriguez carrasco.wikispaces.com/file/view/hist_arte_esquema.pdf
- (s.f.). COMPOSITION ET NOMBREN D`OR DANS LES OEUVRES PEINTES DE LA RENAISSANCE. EDITION.
- Concha, E. d. (s.f.). *Tripticoda Vinci Geometria del Renacimiento*. Recuperado el 15 de 08 de 2013, de <http://www.triptico-davinci.com/el-metodo-leonardo-el-esqueleto-aureo>
- Cruz, J. A. (2001). *agcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf*. Recuperado el 07 de 06 de 2013, de jagcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf: <http://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/pacioli.pdf>
- Cynthia Phillips, P. S. (2010). El gran libro de Da Vinci. En P. S. Cynthia Phillips, *El gran libro de Da Vinci* (pág. 33). Bogota: Panamericana editorial Limitada.
- González, R. H. (2005). *El Legado del Vitruvio*. Recuperado el 07 de 07 de 2013, de <http://romher.webs.ull.es/cv/vitruvio.pdf>
- Ignacio A, L. F. (s.f.). *El Numero de Oro*. Recuperado el 16 de 08 de 2013, de <http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm>
- Inconmesurables*. (s.f.). Recuperado el 30 de 07 de 2013, de <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/incommensurables.pdf>

COMPÁS ÁUREO Y ESPIRAL ÁUREA EN PINTURAS DE LEONARDO DA VINCI

Letts, R. M. (1981). *El Renacimiento*. Barcelona: Cambridge University Press.

Ono. (s.f.). *pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista*. Recuperado el 15 de 07 de 2013, de [pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista:
http://webs.ono.com/pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista/pintura%20renacentista.html#a1](http://webs.ono.com/pedabagon/pedro/Historiadelarte/temario/arte%20renacentista/pintura%20renacentista.html#a1)

Paula Chain, C. C. (2009). *iesramoncabanillas*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [iesramoncabanillas: http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm](http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm)

Pellico, A. M. (12 de 2006). *Historia de las Matemáticas*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Alberto%20Durero.pdf

Potts, R. (2002). *Euclid's Elements of Geometry*. Norwalk Connecticut: The Easton Press.

Rafael Argullol, D. C. (1988). *El Quattrocento*. Recuperado el 08 de 08 de 2013, de <http://www.geocities.ws/dchacobo/Quattrocento-RafaelArgullol.PDF>

Regatas, C. (06 de 2005). *clubregatas.org.pe*. Recuperado el 19 de 08 de 2013, de [clubregatas.org.pe: http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm](http://www.clubregatas.org.pe/revista/200506/brillante.htm)

Torres, M. L. (1994). *Cursos 1993 y 1994 HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES*. Recuperado el 19 de 07 de 2013, de <http://exordio.qfb.umich.mx/archivos%20pdf%20de%20trabajo%20umsh/afilosofia/tesis%20ejemplos/cs182%20Geometr%C3%ADa%20y%20dise%C3%B1o%20de%20la%20realidad%20sensible.pdf>

Torroella, R. S. (1995). *Historia del Arte*. Madrid: Editorial Debate S.A.

Venegas, L. (2012). Leonardo da Vinci Claro y oscuro. En L. Venegas, *Leonardo da Vinci Claro y oscuro* (pág. 142). Bogota: Panamericana Editorial Limitada.

Zöllner, F. (2000). *Leonardo da Vinci "Artista y Científico"*. Madrid: TASCHEN.