

**¿QUÉ TIPOS DE RECURSOS EPISTÉMICOS USAN LOS ESTUDIANTES EN UNA
ACTIVIDAD CONJUNTA PARA LA CLASE DE MATEMÁTICAS Y LA CLASE DE
FÍSICA?**

**FABIÁN ARISTO GALINDO ALONSO
CARLOS AUGUSTO PABÓN CHIPATECUA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.**

2016

**¿QUÉ TIPOS DE RECURSOS EPISTÉMICOS USAN LOS ESTUDIANTES EN UNA
ACTIVIDAD CONJUNTA PARA LA CLASE DE MATEMÁTICAS Y LA CLASE DE
FÍSICA?**

FABIÁN ARISTO GALINDO ALONSO

Código: 2013285005

CARLOS AUGUSTO PABÓN CHIPATECUA

Código: 2014185017

**TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER EN DOCENCIA
DE LA MATEMÁTICA**

ASESORA: NUBIA SOLER

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.**

2016

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido de trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por permitirnos culminar con éxito este trabajo.


A nuestras familias por la constante motivación y comprensión durante las largas horas de estudio que se requirieron para la elaboración de este escrito.

A la profesora Nubia Soler por su orientación, paciencia y sus fundamentales aportes en el desarrollo de cada una de las etapas de este proyecto, sin los cuales este trabajo no hubiese sido posible.

A la Secretaría de Educación de Bogotá por la financiación y apoyo económico a través del Fondo de Formación Avanzada para docentes.


A nuestros estudiantes de grado once (promociones 2015 y 2014) por su participación en las actividades programadas y sus esfuerzos por dar las mejores respuestas, así como a las directivas y compañeros profesores de los colegios Julio Garavito Armero y San Isidro Sur Oriental por la cesión de algunos espacios y recursos para el desarrollo de las actividades.

A los profesores de la Maestría por la orientación brindada en cada una de sus materias y la respuesta oportuna a nuestras constantes dudas, especialmente a Leonor Camargo, Gloria García Édgar Guacaneme y Claudia Salazar.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Revolución de la educación</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	¿Qué tipos de recursos epistémicos usan los estudiantes en una actividad conjunta para la clase de matemáticas y la clase de física?
Autor(es)	Galindo Alonso, Fabián Aristo; Pabón Chipatecua Carlos Augusto
Director	Soler Álvarez, María Nubia
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 120 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Argumentación, Enmarques epistémicos, Problemas de física

2. Descripción
<p>Trabajo de grado asociado a la línea de Argumentación y Prueba de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Surge del encuentro de intereses de los autores a partir de su práctica profesional como docentes de Educación Media en las áreas de Física y de Matemáticas. En concreto, los autores encuentran dificultades en los procesos argumentativos de sus estudiantes al abordar problemas que requieren el uso de las matemáticas, la física o elementos de la vida cotidiana. Para acercarse a esta realidad, analizan los argumentos de los estudiantes a la luz de la teoría de los enmarques epistémicos (que se ubica dentro del modelo denominado Marco de Recursos), así como el modelo de argumentación de Toulmin.</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Investigación en Pedagogía</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 3	

3. Fuentes

Los referentes conceptuales consultados en relación con la argumentación son principalmente Toulmin, S. (2003), Douek (1999), Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte (2010); en relación con la teoría de los enmarques epistémicos, Bing & Redish (2008, 2009), Bing (2008), Coleoni & Buteler (2008) y Perea & Buteler (2014); acerca de la relación entre matemáticas y física, Jahnke (2005), Jahnke (2010) y Valencia, Méndez & Jiménez (2008); asimismo, en relación con los aspectos metodológicos tenidos en cuenta, Schoenfeld (2000) y Miles & Huberman (1994).


4. Contenidos

El primero de los cinco capítulos de que consta el trabajo, contiene la descripción del problema, que incluye la forma cómo los autores llegan a definir el problema de investigación, los objetivos que se plantearon, una breve justificación y los antecedentes del trabajo.

El segundo contiene el marco teórico en el que se resumen algunos de los más importantes referentes, que permitieron a juicio de los autores, adoptar una perspectiva adecuada tanto para el planteamiento como para el análisis de los resultados obtenidos en el aula.

En el tercer capítulo se describen todos los aspectos metodológicos que dan lugar al posterior análisis, el cual se lleva a cabo en el cuarto capítulo. En este se refieren las reflexiones que guían a los autores en la comprensión de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

El análisis da paso al quinto capítulo donde se describen las principales conclusiones del trabajo y las perspectivas de investigación.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Revolución de la Educación</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 3	

5. Metodología
<p>La metodología adoptada para este trabajo es de tipo cualitativo, basada en la descripción de los razonamientos los estudiantes a través de tres fases experimentales en una propuesta de enseñanza aprendizaje de la ley de Hooke que pueda ser validada tanto en la clase de matemáticas como en la clase de física. Los autores llegan al planteamiento de la actividad de aula a través de dos pruebas iniciales: la guía preliminar y la prueba piloto. En el capítulo correspondiente se explica el proceso de diseño de la actividad, la aplicación de la misma, la recolección de datos, organización de los mismos y procedimiento de análisis a la luz del marco teórico.</p>

6. Conclusiones
<p>Las conclusiones se centran en dos aspectos. Por un lado, las conclusiones en relación con los objetivos propuestos inicialmente, es decir, con los recursos y enmarques epistémicos evidenciados a partir de la argumentación de los estudiantes. Por otro lado, las conclusiones relacionadas con los aportes de la actividad desarrollada para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de problemas de física, así como las perspectivas que abre el estudio a futuro.</p>

Elaborado por:	Galindo Alonso, Fabián Aristo; Pabón Chipatecua, Carlos Augusto
Revisado por:	Soler Álvarez, María Nubia

Fecha de elaboración del Resumen:	07	05	2016
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *¿Qué tipos de recursos epistémicos usan los estudiantes en una actividad conjunta para la clase de matemáticas y la clase de física?*, presentado por los estudiantes:

Fabián Aristo Galindo Alonso, Cód. 2013285005, CC. 79737584
Carlos Fabón Chipatecua, Cód. 2014185017, CC. 80165969

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con 46 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 16 días del mes de junio de 2016.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora: *Maria Nubia Soler*
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Jurados: Profesor: *Plácido Hernández*
PLÁCIDO HERNÁNDEZ (México)

Profesor: *Orlando Aya C.*
ORLANDO AYA CORREDOR (UPN)

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	18
1.1 Aspectos fundamentales que conducen a la pregunta de investigación	18
1.1.1 ¿Por qué escribir este trabajo?.....	18
1.1.2 De las expectativas de los autores como profesionales docentes.....	20
1.1.3 De la segmentación del currículo y la necesidad de buscar alternativas de articulación en el aprendizaje de las diferentes asignaturas.....	23
1.2 Pregunta de investigación.....	25
1.3 Justificación.....	25
1.4 Objetivos	26
1.4.1 Objetivo general	26
1.4.2 Objetivos específicos.....	27
1.5 Antecedentes	27
1.5.1 De la prueba matemática en un contexto educativo a la argumentación	27
1.5.2 La argumentación desde la perspectiva de la resolución de problemas en física y los enmarques epistémicos.....	30
2 MARCO TEÓRICO.....	33
2.1 ¿Qué es la argumentación?.....	33
2.2 La argumentación y modelo de Toulmin	33
2.3 Marco de Recursos y enmarques epistémicos.....	35
2.3.1 Recursos (resources)	35
2.3.2 Enmarques epistémicos	37
2.3.3 Recursos metacognitivos.....	39
2.4 ¿Qué es resolver un problema de física? ¿Cómo proponer un problema?	41

2.5 Problemas que requieren procesos de argumentación y prueba matemática en física.....	42
2.6 El problema de la ley de Hooke y los resortes en serie y en paralelo	43
2.7 Una aproximación genética a la prueba	50
3 METODOLOGÍA	51
3.1 Tipo de investigación	51
3.2 Participantes del estudio y contexto social.....	51
3.2.1 Descripción del curso 1101 de la IED San Isidro Sur Oriental.....	52
3.2.2 Descripción de los cursos 1101 y 1102 de la IED Julio Garavito Armero	53
3.3 Etapa preliminar	53
3.4 Etapa de diseño de la actividad	56
3.5 Etapa de ejecución.....	63
3.5.1 Experimento mental	64
3.5.2 Experimento virtual.....	68
3.5.3 Experimento real	72
3.6 Etapa de análisis	75
4 ANÁLISIS DE RESULTADOS	84
4.1 Aspectos generales a tener en cuenta	84
4.2 Lectura horizontal de la matriz.....	84
4.2.1 Análisis del experimento mental	84
4.2.2 Análisis del experimento virtual	90
4.2.3 Análisis del experimento real y lectura vertical	91
5 CONCLUSIONES	97
5.1 Con respecto a la pregunta de investigación y los objetivos planteados.....	97
5.2 Aportes y perspectivas a futuro.....	101

BIBLIOGRAFÍA..... 104

ANEXOS..... 107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Guía de enseñanza aplicada en la etapa preliminar	22
Figura 2. Modelo de Toulmin (versión simplificada)	34
Figura 3. Modelo de Toulmin	34
Figura 4. Imagen presente en <i>De Potentia Restitutiva</i> que muestra los experimentos de Hooke al estudiar la elasticidad. El alambre de metal se asemeja a una banda elástica (<i>Fig 3</i>).....	45
Figura 5. Sistemas de dos resortes a) en serie y b) en paralelo	47
Figura 6 . Respuesta de un estudiante en la que incluye en su justificación un resorte de bolígrafo pegado a la hoja de papel	54
Figura 7. Relación entre fuerza y constante de elasticidad en la respuesta de un estudiante.....	55
Figura 8. Guía aplicada en la prueba piloto en la que se introducen los tres tipos de experimentos	60
Figura 9. Representación de la estudiante sobre lo que para ella significa a) bandas en serie: dos bandas muy unidas y b) bandas en paralelo: dos bandas más alejadas	61
Figura 10. Comparación entre a) el <i>applet</i> del pilotaje y b) el <i>applet</i> final	62
Figura 11. Guía aplicada en el experimento mental.....	66
Figura 12. Guía para el experimento virtual	69
Figura 13. Efecto del deslizador en el <i>applet</i> de GeoGebra.....	70
Figura 14. Guía para el experimento real	73
Figura 15. Macro matriz de análisis con la que se plantea la lectura vertical y la lectura horizontal de los tres experimentos	80
Figura 16. Argumento de Ingrid en el experimento mental (proporcionalidad entre la elongación y el número de CD)	85
Figura 17. Argumento de Sharon en el experimento mental (el gancho también elonga la banda)	86
Figura 18. Argumento de Camila en el experimento mental (la masa de los CD no es la misma)86	

Figura 19. Argumento de Gelen en el experimento mental (a igual peso, igual elongación)	87
Figura 20. Argumento de Yeimy en el experimento mental (la banda también tiene peso)	88
Figura 21. Argumento de Valentina en el experimento mental (distribución del peso para el sistema en paralelo)	88
Figura 22. Argumento de Camila en el experimento mental (distribución del peso en el tercer sistema).....	89
Figura 23. Argumento de Laura en el experimento mental (a igual peso, igual elongación)	89
Figura 24. Recurso metacognitivo en el experimento virtual (precisión al tomar una medida)	90
Figura 25. Argumento de generalización en el grupo # 3: Predicción de la elongación dado el número de CD	91
Figura 26. Búsqueda del centro geométrico del CD con el fin de ponerlo en equilibrio evidenciando un enmarque de autoridad del experimento virtual	92
Figura 27. Enmarque de autoridad (garante de que la medida está bien tomada: la banda está recta como exige el experimento virtual).....	93
Figura 28. Método que le garantiza al estudiante un buen nivel de precisión en la medida de la elongación de la banda usando una banda adicional	94
Figura 29. Método que busca garantizar la precisión usando la punta de la escuadra para incluir en la medida la porción de la banda no accesible directamente.....	94
Figura 30. Argumento de Ingrid acerca de los tres experimentos: “No existe una ecuación que relacione las dos variables”	96

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Matriz de análisis obtenida tras la aplicación de la prueba piloto.....	62
Tabla 2. Primera matriz de análisis considerada	76
Tabla 3. Matriz de análisis que involucra tipos de recursos epistémicos.....	77
Tabla 4. Matriz que involucra los recursos epistémicos de un grupo de estudiantes.....	78
Tabla 5. Última versión de la matriz de análisis	79

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Grupo # 1, experimento mental	107
Anexo 2. Grupo # 1, experimento virtual.....	110
Anexo 3. Grupo #1, experimento real	113
Anexo 4. Grupo #2, experimento mental	115
Anexo 5. Grupo # 2, experimento virtual.....	119
Anexo 6. Grupo # 2, experimento virtual.....	121
Anexo 7. Grupo #3, experimento mental	122
Anexo 8. Grupo # 3, experimento virtual.....	125
Anexo 9. Grupo # 3, experimento real	128
Anexo 10. Grupo # 4, experimento mental	130
Anexo 11. Grupo # 4, experimento virtual.....	131
Anexo 12. Grupo # 4, experimento real	133

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, producido como requisito académico dentro del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), se desarrolló dentro de la línea de investigación de Argumentación y Prueba del Departamento de Matemáticas. Surge a partir de las inquietudes profesionales de los autores en relación con la enseñanza de las Matemáticas y de la Física. Tales intereses fueron nutridos por los temas de la línea de investigación así como otros estudiados en las diferentes materias que constituyen el currículo de la Maestría.

El trabajo se apoyó en la teoría de los enmarques epistémicos para proponer una actividad de aula desarrollada de manera conjunta en las clases de Matemáticas y de Física en dos colegios públicos de Bogotá a partir de tres variantes de un mismo problema tomado de la Física. Asimismo, a partir de los argumentos producidos por cuatro grupos de estudiantes se identificaron los enmarques epistémicos presentes a lo largo del desarrollo de la actividad y se hicieron observaciones que permitieron generar algunos criterios para la construcción de este tipo de actividades.

En el primero de los cinco capítulos de que consta el presente trabajo se presenta el planteamiento del problema en el orden en que evolucionó a lo largo de la Maestría y del proceso mismo de elaboración del trabajo. Igualmente, se enuncian los objetivos del mismo, en concordancia con el problema planteado, y los antecedentes, que parten de la prueba matemática, tema que inicialmente los autores pretendían desarrollar pero que, a partir de los resultados obtenidos en la etapa preliminar de la ejecución, fue preciso reorientar desde la argumentación, vista como una forma inicial de acercamiento a la prueba.

El segundo capítulo presenta el marco teórico en que se basó el trabajo que, en esencia, trata la argumentación (con base en el modelo de Toulmin), el Marco de Recursos, los enmarques epistémicos y el problema físico en el que se basó la actividad dirigida a los estudiantes, a saber, la ley de Hooke.

El capítulo tercero presenta la metodología que se aplicó en el desarrollo de la investigación. Básicamente, se parte de una etapa preliminar en la que se exploran los aspectos relevantes para el trabajo, observados luego de desarrollar una tarea con los estudiantes. A continuación, se presenta la etapa de diseño de la actividad, que parte de lo observado en la etapa preliminar. Luego se

muestra la etapa de ejecución en la que se aplicó la actividad diseñada a los estudiantes, mediante tres fases llamadas experimentos mental, virtual y real. Finalmente, la etapa de análisis, en la que se aplican las ideas presentadas en el marco teórico para obtener observaciones y análisis relevantes a las respuestas de los estudiantes.

En el capítulo cuarto se detalla el proceso de análisis desarrollado en el trabajo en cada uno de los grupos de estudiantes y para cada una de las fases de la actividad. Se presentan así, en el capítulo quinto, las conclusiones en relación con los objetivos propuestos, así como las perspectivas que se trazan con el desarrollo del mismo.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A continuación se hace la descripción del problema, en el orden en que fue desarrollado por los autores, con especial cuidado de construir la trayectoria de la pregunta de investigación desde el surgimiento de inquietudes profesionales comunes hasta llegar al planteamiento final que da origen al título de este trabajo.

1.1 Aspectos fundamentales que conducen a la pregunta de investigación

Esta descripción se divide en tres aspectos fundamentales orientados por la intencionalidad de quienes escriben, partiendo de un principio de honestidad de acuerdo con el cual se mantenga lo más objetivamente posible la fidelidad de los hechos descritos con la realidad de modo que se garantice la confiabilidad en el estudio.

1.1.1 ¿Por qué escribir este trabajo?

Los profesores que escriben este trabajo, en consideración a su experiencia profesional en la enseñanza de la física y las matemáticas, evidencian las dificultades que presentan los estudiantes de los colegios públicos en los que laboran, a la hora de abordar problemas que requieren el uso de las matemáticas para su solución. Asimismo, consideran que en la mayoría de los casos, los estudiantes no se muestran interesados o no le dan valor al tipo de clase tradicional que emerge de organizaciones curriculares que no han cambiado sustancialmente a lo largo del tiempo. El desinterés de los estudiantes puede convertirse en uno de los principales obstáculos del proceso de enseñanza aprendizaje y este factor puede derivar incluso en problemas de corte social al interior de la clase. Cuando los profesores han intentado presentar su clase dentro del llamado “paradigma del ejercicio” (García & Montejó, 2011), encuentran que los estudiantes se sienten cómodos con la repetición de ciertos procedimientos previamente mostrados y explicados y el profesor asume que aprendieron o entendieron. En tales casos, cuando los estudiantes son cuestionados por asuntos conceptuales que se pueden inducir, deducir o construir a partir de los ejercicios explicados, no elaboran, por ejemplo, procesos de generalización, conjeturación ni argumentación. En este orden de ideas, los autores encuentran la necesidad de buscar experiencias que permitan a los estudiantes dotar de significado los conceptos matemáticos y físicos que quieren poner en la base de la comprensión de sus respectivas materias. Para lograr esto se requiere modificar la forma de presentación de un problema, de manera que involucre situaciones que impliquen el uso de la

experiencia de los estudiantes y sus conocimientos previos, así como elementos de su contexto sociocultural a fin de propiciar la construcción de significados.

Lo anterior no quiere decir que quienes escriben este trabajo echen por la borda la idea tradicional de la enseñanza mediante ejercicios, pero son conscientes de que el instruccionalismo tradicional es una de las causas de los problemas antes mencionados.

Con respecto a este asunto, las políticas públicas hacen referencia al significado de las teorías en la vida de quien las aprende. En el documento de los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se puede leer:

... hay acuerdos en que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella. (p. 18)

Además, este mismo asunto es tratado en el documento de Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales, (MEN, 2006)

... es evidente que la aproximación de los estudiantes al quehacer científico les ofrece herramientas para comprender el mundo que los rodea, con una mirada más allá de la cotidianidad o de las teorías alternativas, y actuar con ellas de manera fraterna y constructiva en su vida personal y comunitaria” (p. 105).

Dentro de las políticas del Ministerio de Educación Nacional se plantea también la necesidad de superar la separación entre las ideas propias de las teorías científicas y las experiencias que los estudiantes traen de su vida y llevan a su vida, concebidas desde la idea de Mundo de la Vida de Husserl. En el documento de Lineamientos curriculares en Ciencias Naturales (MEN, 1998) se señala:

Estos dos mundos se suelen contraponer: el Mundo de la Vida y el mundo de las teorías, de las ideas científicas, de las nuevas hipótesis; en este último sólo pueden habitar los "iniciados": los científicos, los especialistas de alguna área. El Mundo de la Vida es un

mundo de perspectivas: cada quien lo ve desde su propia perspectiva, desde su propio punto de vista. Y, como es de esperarse, desde cada una de estas perspectivas la visión que tiene es diferente. En el mundo de la ciencia, los científicos intentan llegar a acuerdos intersubjetivos y para ello deben llegar a consensos. En otras palabras, deben abandonar sus propias perspectivas situándose en diversos puntos de vista que permitan llegar a una síntesis objetiva o mejor, intersubjetiva. (p. 6)

De aquí que los autores pretendan desarrollar acciones conjuntas que involucren la teoría matemática de la física con la experiencia cotidiana del estudiante.

1.1.2 De las expectativas de los autores como profesionales docentes

En este trabajo se conjuran dos tipos de expectativas: la de un educador matemático preocupado por la necesidad de involucrar situaciones más significativas y extraídas de la realidad así como la escasa conexión entre las matemáticas escolares y otras áreas del conocimiento y la de un educador en ciencias físicas preocupado por las dificultades de aprendizaje en su materia, debido en buena medida, a la escasez de recursos matemáticos (más adelante se aclara el significado preciso de este término) y a la poca conexión que observan los estudiantes entre el mundo físico y las matemáticas.

De este encuentro de inquietudes surge para el educador matemático la conciencia de que la física es una fuente de situaciones propicias para la actividad matemática, a la vez que el educador en ciencias físicas comprende la riqueza epistemológica de abordar los problemas desde el punto de vista del educador matemático, así por ejemplo, comprende la importancia de entender los procesos argumentativos que se dan en los estudiantes en la resolución de problemas, entendida de una manera diferente a la que usualmente aparece en los textos de física.

Lo anterior los conduce a pensar en la búsqueda de problemas o situaciones para el estudiante que le lleven gradualmente a la superación de las dificultades ya mencionadas, en esta búsqueda se hace revisión de varios artículos en los que se presentan inquietudes similares. Las primeras revisiones llevan a los autores al trabajo de Hanna & Jahnke (1996), quienes se interesan por las relaciones epistémicas entre la física y la matemática, concretamente en las situaciones de prueba. Esto a su vez, los lleva a buscar problemas de la física que involucren pruebas matemáticas pero que sean lo suficientemente sencillos para presentarlos a los estudiantes. Al mismo tiempo, la participación de los autores en el grupo de Argumentación y Prueba de la Universidad, los lleva a

pensar en la estrecha relación entre la argumentación y la prueba matemática (sin argumentación no hay prueba).

Con el ánimo de dar respuesta a los intereses antes planteados y dada la estrecha relación epistemológica entre la física y las matemáticas que es descrita por Kuhn (1982), se propone la búsqueda de una actividad que involucre a los estudiantes en una acción interdisciplinar entre estas dos ramas del conocimiento y que al mismo tiempo incluya los procesos de argumentación como elementos fundamentales para posibilitar procesos futuros de prueba.

En un comienzo, en el año 2014 con un primer grupo de estudiantes, plantean una primera aproximación hacia este tipo de actividades, una tarea que debe ser realizada tanto en la clase de Matemáticas como en la clase de Física (Guía de enseñanza, Figura 1). El grupo está conformado por dos subgrupos de estudiantes de grado once (último grado de la educación media en el sistema educativo colombiano). Cada subgrupo pertenecía a una institución educativa oficial de Bogotá: el primero al Colegio San Isidro Sur Oriental (IED SISO) ubicado en la localidad 4, donde se presenta la actividad en la clase de matemáticas, y el segundo al Colegio Julio Garavito Armero (IED JGA) en la localidad 16, donde se presenta la actividad en la clase de física. Estas dos instituciones educativas tienen contextos socioculturales y condiciones internas similares, hecho que es evidenciado mediante la experiencia de los docentes, quienes han laborado en instituciones educativas distritales durante 8 años en el caso del profesor de matemáticas y 10 años en el caso del profesor de física. Realizar tal tarea permite en principio encontrar similitudes en la forma de realizar la actividad por parte de los estudiantes, lo cual redundará en la definición de derroteros en la planeación de actividades que den respuesta a las necesidades de aprendizaje de este tipo de comunidades del Distrito Capital.

La idea inicial consiste en que los estudiantes argumenten matemática o físicamente a partir de un problema tomado de la física. En el colegio San Isidro Sur Oriental, la tarea se desarrolla en la clase de Matemáticas y en el colegio Julio Garavito Armero esta misma tarea se lleva a cabo en la clase de Física. La guía de la tarea (Figura 1) presenta un texto acerca de la ley de Hooke aplicada a un resorte (presentada como una forma de estudiar el comportamiento de la elongación del resorte con respecto a la fuerza aplicada al mismo). También presenta una gráfica de la misma, en la que se muestran los intervalos en los que se cumple y los intervalos en los que no. A partir de esta

información se formulan una serie de preguntas que indagan acerca de las relaciones entre el comportamiento de un resorte y las representaciones gráfica y algebraica de dicha ley.

GUIA DE ENSEÑANZA: ARGUMENTOS MATEMÁTICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS FÍSICOS I: FUNCIÓN DE ELONGACIÓN PARA UN RESORTE

Elaborado por Carlos Pabón (Col. San Isidro S. O.) y Fabián Galindo (Col. Julio Garavito Armero)

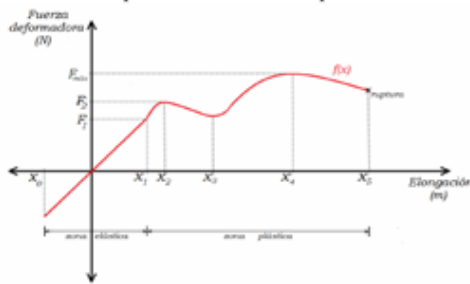
Existen muchas situaciones de la vida cotidiana y de las ciencias que se pueden estudiar mediante las matemáticas. En física, esto ocurre con gran frecuencia. Por ejemplo, se ha mostrado, mediante los experimentos que un resorte o un amortiguador posee características elásticas dadas por la llamada ley de Hooke que matemáticamente puede expresarse mediante la función:

$$F(x) = -kx$$

Donde F es la fuerza restauradora del resorte, x es la elongación del resorte (que se considera negativa cuando este es comprimido, y positiva cuando se somete a estiramiento), y k es la **constante de elasticidad** del resorte. Se puede ver que la anterior expresión corresponde a una función lineal.

La gráfica que se presenta a continuación representa la fuerza aplicada sobre el resorte, que es igual en magnitud pero de sentido contrario a la fuerza restauradora que aparece en la ley de Hooke (esto se debe a la ley de acción y reacción). La función simplemente cambia de signo y la llamaremos $f(x)$. Se puede ver que la linealidad sólo se cumple en un cierto intervalo.

Luego de ser estirado hasta cierto punto, el resorte deja de tener sus características elásticas ya que pierde la capacidad para recuperar su forma original, de manera que a partir de dicho punto la gráfica de la fuerza ya no es lineal sino que tiene un comportamiento diferente hasta el límite en el que el resorte se rompe.



1. **Estimar** el intervalo de elongación para x dentro del cual el resorte de un esfero funciona bajo la ley de Hooke.
2. Si el resorte es muy grueso y se deja estirar poco,

¿puede afirmarse que la constante de proporcionalidad es grande o pequeña? Argumente.

3. De acuerdo con la gráfica presentada, ¿en qué intervalos la función crece más rápidamente?
4. Determinar los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos en los que la función es decreciente.
5. ¿Para qué valores en el eje horizontal la función tiene un máximo o un mínimo local? ¿Qué representan estos valores para la situación dada?
6. A partir de la gráfica dada, justificar o refutar las siguientes afirmaciones: a) "Un resorte con mayor constante de elasticidad debe elongarse más fácil" b) "Un resorte con menor constante de elasticidad debe elongarse más fácil". c) "Si un resorte se elonga 0.01 m por cada N y tiene una longitud original de 0.05 m puede afirmarse que para elongarse 0.15 m son necesarios 15N".
7. La longitud de una espira está dada por la fórmula: $L = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$, donde R es el radio del resorte y a es el paso de rosca, o sea la distancia entre dos espiras consecutivas del resorte (ver figura). Si un resorte de 10 espiras tiene paso de rosca $a = 0.003m$, radio $R = 0.002m$, la longitud del resorte cuando está completamente comprimido es 0.015m y su longitud en equilibrio (en ausencia de fuerzas) es $L_0 = 0.02m$. ¿En qué intervalo tiene sentido físico la función de elongación del resorte?

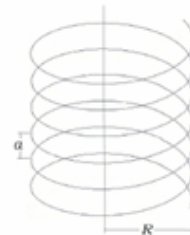


Figura 1. Guía de enseñanza aplicada en la etapa preliminar

Los docentes encuentran que los estudiantes hicieron poco uso de sus conocimientos matemáticos, recurriendo en gran medida a representaciones propias tomadas del lenguaje cotidiano redactando unas cuantas frases para explicar y que recurrieron a otros tipos de representaciones como el dibujo y gráficas fuera del contexto de las representaciones usuales en matemáticas (ecuaciones y gráficas en el plano cartesiano). Además, sus razonamientos mostraron una fuerte tendencia a usar la intuición y las nociones más básicas y sus procesos argumentativos tendían a ser débiles y escasamente estructurados. En términos generales, para estos estudiantes resolver un problema se limitaba a la aplicación de un algoritmo y esta idea se hacía más fuerte cuanto mayor fuera su confianza hacia una autoridad, dejando de lado las herramientas conceptuales que diferencian a un buen argumento de uno que no lo es, confiando ciegamente en las fórmulas dadas por el profesor o las que aparecen en la guía sin cuestionarse el rango de validez de las mismas, muy similar a lo que ocurre con un libro de texto o a una página web.

Lo anterior lleva a los autores a cambiar su idea inicial de incluir una prueba formal en el problema y los orienta, en cambio, hacia una propuesta que involucre una aproximación inicial a la prueba desde la perspectiva de Jahnke (2010).

En la metodología, los autores presentan en forma más explícita las observaciones hechas a las respuestas de los estudiantes así como las modificaciones que dichas observaciones produjeron en los objetivos y en los aspectos metodológicos del presente trabajo.

El nivel argumentativo evidenciado en la aplicación de la guía también ha sido notado en la solución de situaciones propuestas dentro del marco de otras actividades académicas, como por ejemplo las pruebas Saber (ICFES), pruebas internas o evaluaciones escritas que se programan dentro de cada colegio. Así, en las Pruebas Saber 11 se evidencia que en ambos colegios los estudiantes presentan un nivel medio en la competencia de resolución de problemas. En el caso de las pruebas internas, se observa que a muchos estudiantes se les dificulta aplicar las matemáticas cuando se les presentan situaciones-problema en contexto.

1.1.3 De la segmentación del currículo y la necesidad de buscar alternativas de articulación en el aprendizaje de las diferentes asignaturas

Para entender la situación de la poca relación que encuentran los estudiantes entre los contenidos de las distintas asignaturas que a diario ven en su colegio, es necesario remitirse al problema de la

segmentación del currículo (Valencia, Méndez, & Jiménez, 2008) y el surgimiento de la mirada interdisciplinar del mismo. Se necesita hacer una revisión de las políticas públicas de la educación colombiana al respecto. En este sentido, aunque existen algunos acercamientos previos, es la ley 115 de 1994 la que está en la base del cambio del currículo hacia una mirada menos segmentada que la anterior, que pretendía una enseñanza parcelada de las materias en la que la escuela era un ente informador encargado de la transmisión del conocimiento, papel que para entonces ya había empezado a ser cuestionado por el advenimiento de las nuevas tecnologías, concretamente la internet, que viene a dar cuenta de un nuevo universo de conocimientos a nivel global y exige de la escuela un nuevo tipo de formación.

La ley 115, por ejemplo, hace mención a la obligatoriedad de un área específica para tecnología e informática. Por otro lado, en las primeras etapas de desarrollo (en preescolar y primaria) el ser humano se concibe como multidimensional y en este orden de ideas se pretende una formación integral en la que el niño comienza su formación mediante un currículo que no es parcelado por materias como ha ocurrido tradicionalmente en el resto de los grados.

Esto conlleva a buscar acciones y actividades que permitan el establecimiento de puentes que vayan cerrando paulatinamente la brecha en el desarrollo epistémico de los estudiantes generado por la tradición parceladora del currículo. En particular, en las políticas públicas distritales en relación con la implementación de los Campos de Pensamiento se plantea como una de sus implicaciones la necesidad de involucrar situaciones que vinculen diferentes campos. Concretamente, en SED (2007) para el Campo de Pensamiento Matemático se señala lo siguiente:

Enfrentar situaciones problemáticas que involucren conceptos de otros campos del conocimiento ayuda a ampliar el significado de los conceptos matemáticos y el sentido de la matemática. Claro está, que para esto no basta la aplicación ciega de una fórmula o algoritmo, sino la comprensión profunda. La construcción de modelos o de artefactos en los que se piden planos y cálculos precisos sobre los materiales y los efectos producidos por fuerzas, por movimientos de ruedas, piñones o poleas, es un campo privilegiado en el que el estudiante tiene la oportunidad de establecer muchas conexiones, que no sólo enriquecen los significados sino los sentidos de las ideas matemáticas. (p. 36).

1.2 Pregunta de investigación

En relación con lo anterior, se hace necesario aportar ideas para el diseño de actividades que integren las dos asignaturas y que puedan llevarse a cabo en las dos clases, que permitan a los estudiantes reconocer y solucionar un problema de corte investigativo (Gil, Martínez, & Senent, 1988) en el que pueda aprender, es decir, construir una red más amplia y sólida de recursos epistémicos (Bing & Redish, 2009). Surge también la necesidad de analizar las diversas formas de uso de las matemáticas en situaciones específicas del aprendizaje de los conceptos físicos, al abordar tal tipo de situaciones, en las que se pueda indagar por las epistemologías personales de los estudiantes, es decir, las diversas formas en las que construyen sus conocimientos o usan sus recursos epistémicos (Bing T. , 2008). Este tipo de análisis de las actividades puede dar lugar a un rediseño sistemático de las mismas que contribuya posteriormente al desarrollo de más y mejores recursos epistémicos en los estudiantes. Este trabajo en particular, se centra en la comprensión de los conocimientos teóricos o empíricos a que acuden los estudiantes mientras resuelven una situación problémica al pasar de la física teórica a la física experimental dentro del contexto escolar. Concretamente nos preguntamos: ¿Qué tipos de recursos epistémicos usan los estudiantes en una actividad conjunta para la clase de matemáticas y la clase de física?

1.3 Justificación

Descubrir la actividad epistémica de los estudiantes permite dar cuenta del origen tanto de sus aciertos como de sus errores, lo que es de vital importancia tanto para el diseño de las actividades de clase como para la preparación del profesor a la hora de responder a las inquietudes de sus estudiantes. Basado en lo que el profesor observa, pueden generarse más y mejores mecanismos de construcción del conocimiento por parte del propio estudiante, pues el maestro, conociendo las vías de solución de problemas usadas por sus estudiantes, puede moldear las preguntas y tareas de manera que se sientan interesados por usar otras vías diferentes a las tradicionales y llevarlos a epistemologías científicas cada vez más sofisticadas. Por otro lado, puede identificar recursos que normalmente no se identifican a primera vista en las clases. Esto lleva a los profesores a buscar métodos diferentes para identificarlos, caracterizarlos y comprenderlos.

Realizar un estudio de este corte permite realimentar de manera más profunda las distintas relaciones en el triángulo didáctico entre el conocimiento, el profesor y el estudiante. Asimismo, contribuye a encontrar las ideas que están en la base de sus argumentos, bien para reforzarlas o

para cuestionarlas mediante los problemas que se le plantean. Este estrecho vínculo entre los recursos y el proceso argumentativo de los estudiantes es analizado a profundidad por Bing & Redish (2009).

Lo anterior lleva a los autores (y profesores) a buscar mecanismos de análisis más profundos acerca de los tipos de argumentos, a través de los recursos usados en la solución de problemas y las formas de pensar de los estudiantes. Esto ayuda a los profesores a entender qué tan significativos son los conceptos matemáticos y físicos para los estudiantes, así como buscar nuevos criterios para reformular las tareas y actividades de clase, de manera que se generen nuevos recursos que beneficien a los estudiantes simultáneamente en los dos campos de conocimiento y en las relaciones que ellos entablan entre su conocimiento teórico y su propia vida.

Los autores no pretenden que con una mera actividad se puedan superar las dificultades antes descritas, sino buscar alternativas de análisis del pensamiento de los estudiantes que sirvan como base para comprender sus diferentes formas de entender el mundo que los rodea, sus formas de trabajo, intereses y conocimientos particulares que están presentes a la hora de resolver una tarea. Esto permitiría generar actividades más acordes con estos, que les permitan generar a futuro los mecanismos para solucionar o afrontar posibles problemas que se les presenten no solo en el plano científico y tecnológico sino en su propia vida cotidiana. Asimismo les permitiría abordar diferentes temas con una actitud científica lejos de la reproducción algorítmica que exigen algunos textos y elevar su capacidad de argumentación, su competencia propositiva y su creatividad.

Comprender las epistemologías personales de los estudiantes ayudaría a los profesores a introducir la ley de Hooke (u otras leyes físicas) de maneras diferentes a la tradicional, en las que se opte por un manejo interdisciplinar de la misma, involucrando diversos temas de las matemáticas que enriquezcan los recursos epistémicos de los estudiantes en estos dos saberes.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

- Caracterizar los recursos epistémicos de los estudiantes, al abordar un problema que requiere el uso de conocimientos físicos y matemáticos.

1.4.2 Objetivos específicos

- Diseñar una actividad aplicable tanto a la clase de Matemáticas como a la de Física que permita al estudiante evidenciar las relaciones existentes entre los dos campos a través de un problema de física y que le permita al docente realizar un análisis de los distintos argumentos y enmarques epistémicos que emergen en el estudiante.
- Construir criterios para el rediseño de actividades conjuntas entre los campos de la física y de la matemática que guíen en alguna medida la formación de sentido en el aprendizaje de los estudiantes.

1.5 Antecedentes

A partir de las expectativas previas se encuentran varios trabajos importantes dentro del campo investigativo de la educación matemática y de la educación en física, que tienen que ver directa o indirectamente con la argumentación en la resolución de problemas en física y que se constituyen en antecedentes de la presente investigación.

Los trabajos de Bing y Redish utilizaron la teoría de los *enmarques epistémicos* (*epistemic framing*), para determinar la forma en que los estudiantes de nivel universitario (pregrado) enfrentan los problemas de la física usando las matemáticas. Teniendo en cuenta las posibilidades de aplicación de esta teoría, se considera en este estudio que puede ser utilizada para el caso de los niveles superiores de la educación media en el contexto de las instituciones educativas oficiales de la ciudad de Bogotá.

Además se han tenido en cuenta algunos trabajos acerca de la relación entre física y matemáticas, así como la importancia de la prueba en el contexto didáctico de estos dos campos. Estos trabajos en particular están en la base del diseño de la tarea aunque más adelante se indica en forma detallada.

1.5.1 De la prueba matemática en un contexto educativo a la argumentación

Aunque la prueba matemática no es el objetivo central de este trabajo, esta sí juega un papel importante en el surgimiento y diseño de la actividad que se programó para los estudiantes.

El diseño de esta actividad tuvo su origen en una tarea que pretendía llevar al aula de clase una prueba matemática muy común en los textos de enseñanza de física a nivel de primer año

universitario, la cual consiste en probar que la constante de elasticidad de dos resortes en serie no es la suma de las constantes de los dos resortes por separado sino que responde a otro tipo de relación matemática. La complejidad algebraica de este tipo de prueba a nivel escolar conduce a los autores a consultar los trabajos de Hanna & Jahnke (2002) sobre la enseñanza de la prueba en la escuela, lo que a su vez conduce a la reformulación de tal tipo de actividades o problemas. No se trata ahora de reproducir una prueba matemática como lo sugieren los textos, es decir, como lo haría un experto, sino de generar procesos argumentativos y de generalización que fundamenten futuros procesos de prueba.

Hanna & Jahnke (1996) se refieren a “la muerte de la prueba” como al proceso histórico por el cual el advenimiento de métodos computacionales ha reemplazado en gran medida a la prueba formal en el campo investigativo de las matemáticas. Así, el proceso demostrativo ha evolucionado acorde con el progreso de los computadores que, para validar un resultado, permiten realizar cálculos simbólicos y numéricos avanzados en más corto tiempo. Esta realidad pone de manifiesto la necesidad de reorientar la enseñanza de la prueba en otras direcciones, puesto que esta ha cambiado incluso en el mismo ejercicio profesional del matemático. Sin embargo, el elemento que subyace a la prueba es la actividad argumentativa, la cual debe ser fortalecida en el aula, desde su relación con los procesos empíricos o de experimentación (Jahnke, 2005).

Hanna & Jahnke (1996) no consideran conveniente, por otro lado, relegar la prueba al formalismo popularizado, que se refiere a la estructura definición-teorema-prueba, discrepan de esa visión del trabajo matemático y se remiten a una obligación más social que consiste en hacer entender a las personas cómo funcionan en realidad las matemáticas que avanzan en grado de complejidad y se alejan aún más del público general. En el mismo trabajo, describen el papel de la prueba matemática en el marco de las ciencias empíricas, específicamente en el papel histórico que ha jugado en la construcción y fortalecimiento de la geometría y de las teorías físicas. Un ejemplo de esto es la necesidad de probar las leyes de Kepler a partir de la ley de gravitación universal propuesta por Newton, idea que se retoma de forma más específica en trabajos posteriores, como Jahnke (2005) y Jahnke (2010). Es de anotar que este problema aparece en diversos estilos y formas desde un punto de vista didáctico en buena parte de los cursos de física elemental y pone de manifiesto la relevancia dada por Hanna & Jahnke (1996) a la prueba en el contexto de la resolución de problemas desde las ciencias empíricas. En este sentido señalan la necesidad de involucrar

argumentos empíricos en la validación de hechos o afirmaciones con contenido matemático o geométrico. Así, Hanna & Jahnke (1996) afirman:

La Geometría nos ofrece diferentes modelos de las relaciones espaciales que nos rodean, y decidir cuál es el modelo a utilizar es una cuestión de experimento y medición. Esto significa que en realidad es la medición en lugar de la prueba, la que determina la suma de los ángulos en triángulos reales, y que la prueba sólo tiene un papel circunscrito, aunque importante, en esta decisión. (p. 894)

De aquí que se considere pertinente en este trabajo, extrapolar estas ideas al campo de la enseñanza de la física, en analogía con la geometría, pues en las dos es fundamental la idea de la medida.

De acuerdo con Jahnke (2005), una aproximación pertinente para abordar la prueba es considerar el trabajo del físico teórico en analogía con la actitud del estudiante frente a situaciones de prueba, lo que Jahnke denomina la “metáfora del físico teórico”, ésta consiste en el hecho de que un físico teórico parte de algunos postulados elementales y resultados experimentales y actúa matemáticamente para deducir nuevos resultados. En este sentido, se tiene una visión de la prueba matemática en el contexto escolar en la que los argumentos empíricos son posibles dentro del proceso demostrativo.

Con base en estas ideas, Jahnke (2005) plantea una concepción pragmática de la prueba:

Los físicos no aceptarán una conclusión de una teoría derivada de un argumento matemático sin una verificación experimental. Si una teoría es nueva e importante, un físico desarrollará una prueba experimental de ésta. En este sentido, la metáfora del físico teórico puede ayudar a analizar el pensamiento de un estudiante que prefiere argumentos empíricos. (p. 2)

Por otro lado, el punto de partida para introducir a los alumnos a la argumentación matemática es la pregunta ¿por qué? Se observa una regularidad o patrón y surge la pregunta ¿qué hace las cosas como son? Responder a estas preguntas puede ser considerado como la realización de un experimento mental (Jahnke, 2005). En la deducción de ciertos resultados a partir de una teoría ya aceptada pueden obtenerse nuevos hechos a partir de la argumentación matemática. De acuerdo con esto, un estudiante podría “comprobar” una teoría a través de mediciones o ejemplos

particulares de la misma, considerando como argumentos de prueba esos ejemplos particulares. Esto quiere decir que considera algunos argumentos plausibles como demostraciones.

Lo anterior ha podido apreciarse en el desarrollo de la guía preliminar (previa al diseño de la actividad) por parte de algunos estudiantes de las IED Julio Garavito Armero y San Isidro Sur Oriental, en las que se observa esta tendencia cuando a los estudiantes se le piden argumentos en favor de un modelo matemático para la elongación de un resorte, concretamente se les pregunta bajo qué circunstancias se cumple la ley de Hooke. Inicialmente se esperaba que el estudiante respondiera por medio del concepto de función e intervalos pero se observó justamente una tendencia hacia razonamientos empíricos.

La lectura de Jahnke sobre la prueba así como las observaciones de la guía previa condujeron a la idea de tres tipos de experimentos para la actividad, pues para este, lo empírico está directamente ligado con la construcción de argumentos a favor de una afirmación que se quiere probar. Este trabajo se centra justamente en la aparición de estos argumentos en la fase de experimentación, más que en la fase de la prueba formal. En algunos trabajos Jahnke se refiere a estas como las fases formativa y establecida de la teoría. En otros, hace referencia a una fase de experimento mental, una de pensamiento hipotético-deductivo previo a la formación de teorías matemáticas probadas.

A continuación se describen los antecedentes que dan origen al estudio epistemológico de tales argumentos así como la caracterización de los mismos a través del Marco de Recursos (RF), concretamente las ideas que se refieren a los enmarques epistémicos de los estudiantes y a la relación que tienen estos enmarques con el surgimiento de argumentos, objeto central de este trabajo.

1.5.2 La argumentación desde la perspectiva de la resolución de problemas en física y los enmarques epistémicos

Otros de los estudios básicos en los que se relaciona la actividad matemática con el razonamiento físico en la solución de problemas son los trabajos de Bing y Redish, enfocados principalmente hacia el análisis de los recursos usados por los estudiantes y la aparición de argumentos al abordar algún problema que se les presenta. Estos estudios son especialmente relevantes a la hora de analizar las respuestas de los estudiantes en determinada actividad por lo que constituyen el elemento principal de análisis en el presente trabajo.

Existe una estrecha relación entre la argumentación de los estudiantes y la forma en la que estos abordan una situación problemática. Esta ha sido abordada por Bing & Redish (2009) quienes usan el modelo de Toulmin y se remiten a la teoría de los recursos epistémicos para abordar el problema de encontrar los diferentes tipos de enmarques que los estudiantes utilizan para la resolución de problemas en física. A partir de una serie de ejemplos, proponen una metodología para identificar los garantes que presentan los estudiantes (de acuerdo con el modelo de Toulmin) cuando argumentan en torno a un problema, lo que permite a su vez reconocer el tipo de *enmarque* epistémico usado por los estudiantes en tal proceso.

Uno de estos problemas (Bing & Redish, 2008), está en el contexto del teorema de independencia de la trayectoria para el trabajo realizado por fuerzas conservativas, en el que se les pide a los estudiantes determinar si el trabajo realizado por la fuerza de atracción gravitacional de un planeta sobre una masa depende de la trayectoria o no. Se pone en discusión a dos estudiantes, uno defiende la hipótesis de que el trabajo no depende de la trayectoria mientras que el otro dice que sí, porque debe hacerse mediante la suma de dos integrales distintas. Cada uno sustenta su opinión repitiendo vehementemente su posición pero sin generar mayores argumentos a favor, lo que hace creer que el estudiante que está en favor de la independencia de la trayectoria sólo lo hace en virtud de que la autoridad (el libro) lo dice, acudiendo a lo que los autores llaman “enmarque de autoridad”, mientras que el otro estudiante se limita a un “enmarque de cálculo” que presupone que como el trabajo es un producto entre fuerza y distancia, al aumentar la distancia debe aumentar el trabajo, de manera que ha omitido algunos datos relevantes de la definición de producto interno entre dos vectores, es decir, no los ha incluido entre el conjunto de conocimientos indispensable para solucionar el problema.

Esta situación que observan Bing y Redish (sobre esto se profundiza en el marco teórico) se observa también en las respuestas dadas por los estudiantes de los colegios en cuestión, en tanto que al solucionar un problema cada estudiante definió un enmarque que consideró adecuado para solucionarlo. Así por ejemplo, al preguntar por el comportamiento de la constante de elasticidad del resorte si el resorte es más grueso (ver Figura 7), algunos estudiantes se remitieron a un enmarque de cálculo, mientras que otros usaron un enmarque de mapeo físico, también mencionado por Bing & Redish (2009). Los primeros tomaron como fundamento para su explicación la fórmula

dada, es decir, analizaron cómo aumenta una variable en relación con la otra, mientras que los otros hicieron su enmarque desde la observación de características físicas propias del resorte.

Este tipo de clasificación o categorización de los enmarques (de recursos) va en favor de la identificación de argumentos y viceversa, lo que redundaría necesariamente en la realimentación para el diseño de actividades, constituyéndose en un elemento de gran valor para el profesor quien puede dar a su vez mejores preguntas y respuestas a sus estudiantes, pues a través de tales análisis le es posible identificar los puntos débiles de sus construcciones epistémicas personales.

Así se evidencia en Coleoni & Buteler (2008) y Perea & Buteler (2014), quienes muestran la aplicación del Marco de Recursos y la teoría de enmarques epistémicos en diferentes situaciones relacionadas con la resolución de problemas en física. El primero aborda el estudio de una actividad de resolución de situaciones problemáticas a nivel universitario en el contexto de óptica y la forma en que los estudiantes construyen mecanismos de control para la generación de sus propios recursos cognitivos, a estos mecanismos de control los autores los llaman recursos metacognitivos sobre los que se profundizará en el apartado 2.3.3. El segundo se refiere a los recursos epistémicos que surgen a nivel universitario en la resolución de problemas de electrostática (ley de Coulomb y campo eléctrico), se muestra cómo evolucionan los recursos epistémicos a través de un curso completo durante un semestre. Al comienzo del curso se les presentó un problema sobre cargas y luego transcurridos tres meses los mismos estudiantes solucionan de nuevo la misma tarea, esta vez contando con lo aprendido dentro del curso de electrostática. De aquí es importante el surgimiento de recursos metacognitivos y la noción de sofisticación epistémica.

En la metodología se explica cómo, mediante el uso de videos y análisis del discurso se identifican los recursos usados y los garantes que dan origen a la formulación posterior de argumentos.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 ¿Qué es la argumentación?

Según el Diccionario de la lengua española, un argumento se define como un “razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega” (Real Academia Española, 2014). De acuerdo con Douek (1999), el término “argumento” se entiende como “una razón o conjunto de razones a favor o en contra de una proposición, opinión o medida”, lo que en términos generales, coincide con la definición de la RAE. Con el término “argumentación” se puede referir tanto al proceso que genera el discurso conectado lógicamente (no necesariamente de carácter deductivo) como al texto producido por ese proceso (Douek, 1999). El contexto lingüístico permitirá seleccionar el significado apropiado de acuerdo con el caso concreto de uso.

2.2 La argumentación y modelo de Toulmin

La Teoría de la argumentación es un campo de investigación acerca de cómo se construyen justificaciones y cómo estas se comunican de manera eficaz. De acuerdo con Bing & Redish (2008) existen varios subcampos que de manera coloquial se nombran como "teoría de la argumentación". Uno de ellos es la lógica formal, que se ocupa de métodos relativamente sencillos y directos de construcción de pruebas mediante las cadenas de la forma “Si A entonces B”. Una segunda rama incluye lo que se conoce como retórica, que se enfoca preeminentemente en la presentación de un argumento, e intenta analizar el contenido de un argumento dado, de acuerdo con algún tipo de estructura y a menudo involucra una especie de tono evaluativo en relación con esa estructura. Este es el enfoque que se da en este trabajo a la argumentación.

Trabajos como los de Boero, Douek, Morselli & Pedemonte (2010) señalan la relevancia del modelo de argumentación de Toulmin, que surgió en el ámbito de la filosofía y que se incorporó al campo de la investigación en educación matemática. Ha sido frecuentemente usado por los investigadores en el campo para abordar el problema de la argumentación desde la perspectiva epistemológica. De acuerdo con estos autores, el modelo de Toulmin ha sido usado en la literatura educativa para analizar y documentar tanto el proceso de aprendizaje en una clase como el contexto para argumentar en ella. Los elementos del modelo de Toulmin en su versión corriente en los trabajos en educación matemática son: la afirmación (*claim*) o enunciado hecho por la persona que

pretende argumentar, los datos (*data*) o información que justifica la afirmación, y el garante (*warrant*) o regla de inferencia que permite a los datos conectarse con la afirmación (Figura 2)

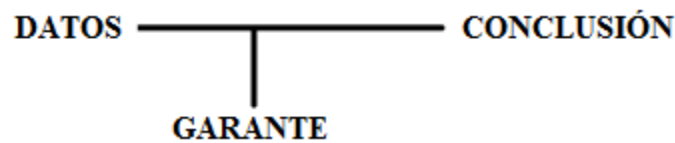


Figura 2. Modelo de Toulmin (versión simplificada)

Se pueden tener en cuenta otros tres elementos para describir un argumento: el respaldo (*backing*) que soporta la regla, el cualificador (*qualifier*) que expresa la fuerza del argumento y la reserva (*rebuttal*) o excepción a la regla, según se muestra en la Figura 3. Sin embargo, para este trabajo se acude a la versión simplificada del modelo (afirmación, datos y garante),

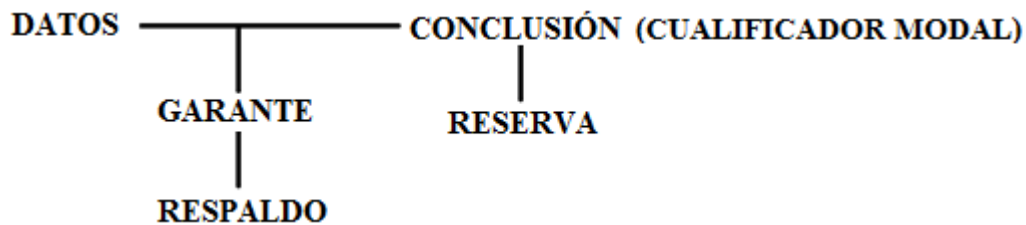


Figura 3. Modelo de Toulmin

En el estudio de la resolución de problemas en el contexto de la física, Bing & Redish (2008, 2009) acuden al modelo de Toulmin para analizar los procesos argumentativos que se dan en los estudiantes al afrontar tales situaciones. Este escrito está basado en tal propuesta, en la medida en que estos autores realizan un análisis cualitativo que permite evidenciar las diferentes formas de pensamiento de los estudiantes al solucionar problemas de física que requieren el uso de matemáticas, a partir de ciertas categorías que ellos denominan enmarques epistémicos (*epistemic framing*) y que pueden ser evidenciados a partir de los garantes del modelo de argumentación de Toulmin.

Bing & Redish (2008) usan la teoría de los enmarques epistémicos, como parte del modelo llamado Resource Framework (RF) o Marco de Recursos, que según los autores es una forma particular de pensar acerca de cómo piensan los estudiantes. De acuerdo con estos autores, el modelo involucra elementos de teorías como la del *conocimiento en piezas* (*knowledge in pieces*), planteada por diSessa (1988), por ejemplo los primitivos fenomenológicos (*p-prims*) que son conceptos previos traídos de su entorno cotidiano y de la propia escuela, que los estudiantes usan para abordar una situación. El Marco de Recursos también es usado por ellos para abordar el estudio de la enseñanza

de la física en el nivel universitario, aunque se trata de un modelo que bien puede aplicarse en contextos escolares (algo que se quiere mostrar con este trabajo).

Los trabajos anteriores abordan el problema de encontrar los diferentes tipos de enmarques usados por los estudiantes para la resolución de problemas en física. Explorar los marcos que los estudiantes presentan en sus argumentaciones permite al docente tener una visión de los enmarques epistémicos de los cuales se valen para abordar un problema, y este hecho permite comprender cómo los estudiantes entienden y se enfrentan desde su conocimiento previo a la resolución del mismo.

2.3 Marco de Recursos y enmarques epistémicos

El Marco de Recursos es una estructura de investigación que permite construir modelos fenomenológicos sobre las diferentes formas de construcción de conocimiento o epistemologías personales (Bing T. , 2008) que surgen en los estudiantes cuando se les presenta una determinada situación o problema. Se trata de un modelo que describe cualitativamente la forma en que se activan recursos en la mente de los sujetos y las redes que estos configuran, así como las interconexiones que se producen entre estas, las cuales dependen fuertemente del contexto.

2.3.1 Recursos (resources)

Un ejemplo clásico de recursos (Bing T. , 2008) son los primitivos fenomenológicos (*phenomenological primitives* o *p-prims*) que son ideas intuitivas que los estudiantes tienen acerca de las cuestiones que se le presentan o bien conocimientos adquiridos en la escuela que dan origen a ciertas creencias.

El modelo RF permite analizar el resultado de la interacción del estudiante con su entorno mediante una especie de red de recursos epistémicos en analogía con lo que ocurre dentro de una red neuronal. Es un modelo cualitativo para describir el desarrollo epistemológico que se da en los estudiantes a través de los recursos que ellos van reduciendo a los estrictamente necesarios para describir determinada situación o fenómeno o para resolver un problema. Esta red tiene un carácter dinámico, con estructura de control y ligazón (*binding*). Si los recursos están fuertemente ligados, estos siempre tienden a activarse juntos, pero si están débilmente ligados pueden ser reemplazados por otros fácilmente y formarse nuevos conglomerados de recursos. En una red asociativa, la ontología básica es la de una red con sus nodos y conexiones direccionales.

La activación de conocimientos se interpreta como la activación de conglomerados de elementos (recursos epistémicos) vinculados que pueden imaginarse como neuronas (Bing & Redish, 2008). La asociatividad se refiere al estrecho vínculo entre los recursos, que trae consigo el hecho de que la activación de uno de estos elementos o de un conglomerado de ellos implique inevitablemente la activación de otros elementos o conglomerados de elementos. Por ejemplo, en ocasiones los estudiantes recurren al recurso de la proporcionalidad ligado al de la suma, pero esta ligazón es débil en comparación con una cadena en la que la proporcionalidad se activa conjuntamente con la multiplicación, pues en esta última cadena se activan más recursos en tanto que explica más situaciones relativas a la proporcionalidad. Estas situaciones también pueden ser consideradas como recursos (por ejemplo, las situaciones conocidas previamente por el estudiante, en las que ha usado la proporcionalidad en otros contextos).

La red en cuestión no es simplemente asociativa. Existen además, como en la red de neuronas del cerebro, estructuras que parecen tener propósitos específicos (como en el cuerpo tienen funciones específicas el hígado o los pulmones). Las estructuras de control dependen en buena medida tanto de la asociación como de la inhibición. Algunos ejemplos de estructuras de control, de acuerdo con este modelo, son: atención selectiva, dependencia del contexto, enmarques, epistemología y metacognición. La asociación o inhibición de uno o más recursos en la red, depende fuertemente del contexto.

El principio de ligazón consiste en el hecho de que los conglomerados de recursos que con frecuencia se activan juntos en diferentes contextos, se ligan fuertemente de modo que siempre se activan conjuntamente. Este principio hace posible la creación de redes de estructuras de alto nivel que el sujeto percibe como un todo. Ejemplos de estas son los conceptos, los esquemas y los primitivos fenomenológicos (*p-prims*) (diSessa, 1988).

El carácter dinámico del Marco de Recursos es entendido en este modelo, justamente como el hecho ya mencionado que las asociaciones e inhibiciones dependen fuertemente del contexto, de manera que éstas redes pueden mutar y formar nuevos conglomerados con el cambio de contexto.

A continuación se describen cada uno de los enmarques epistémicos considerados por Bing y Redish en su trabajo.

2.3.2 Enmarques epistémicos

Del entramado propuesto en el modelo RF, Bing & Redish (2009) centran su atención en los enmarques epistémicos (*epistemic framing*). Un enfoque epistémico es un subconjunto de los conocimientos matemáticos, físicos, empíricos o de otra naturaleza, que los estudiantes, regularmente de forma inconsciente, tienen a su disposición (recursos dentro del modelo RF) cuando se enfrentan a determinado problema. Este enfoque o encuadre (en el sentido de acción de realizar un marco o encuadrar) es sólo una parte de los conocimientos previos que tiene el estudiante, pues hay un primer enfoque del problema que lo limita a ciertos elementos del conjunto de recursos. A partir de una serie de ejemplos, proponen una metodología para identificar los garantés que presentan los estudiantes cuando argumentan en torno a un problema, lo que permite a su vez reconocer el tipo de enfoque epistémico usado por el estudiante en tal proceso. Con base en lo anterior, estudian argumentos presentados por estudiantes universitarios de Física, identificando los cuatro enfoques epistémicos que se describen a continuación.

2.3.2.1 Enfoque de cálculo (*calculation*)

Se fundamenta en la confianza que tiene un estudiante en el resultado obtenido a partir de la ejecución algorítmica de una secuencia de pasos de cálculo. Así por ejemplo, si en el estudiante está presente el recurso de proporcionalidad lineal y reconoce por ejemplo una “regla de tres” puede usarlo en el contexto de la solución de un problema en el que se requiera o no tal recurso. Cuando se pregunta por cuánta fuerza se necesita para estirar un resorte 2 cm si se sabe que el resorte se estira 5 cm con una fuerza de 2 N, el estudiante puede realizar primero una multiplicación $2 \times 2 = 4$ y luego una división $4 : 5 = 0.8$, con lo cual llega a la respuesta de 0.8 N. Es importante anotar que seguramente lo hace en algún tipo de formato ya aprendido desde la infancia en la escuela primaria o en los primeros grados de secundaria, constituyéndose este conglomerado de recursos (“regla de tres”) en un conglomerado fuertemente ligado, debido a la repetición del mismo en diversos problemas en los que el estudiante ha obtenido una respuesta satisfactoria mediante su uso. El esquema tradicional en nuestras escuelas y colegios es el siguiente

$$2 \text{ -----} > x$$

$$5 \text{ -----} > 2$$

Esta representación que es de tipo tabular es un ejemplo claro de recurso de cálculo fuertemente ligado a otros recursos del mismo tipo vistos en otro tipo de situaciones.

2.3.2.2 Enmarque de mapeo físico (physical mapping)

Está basado en el grado de correspondencia que el estudiante posee entre sus matemáticas y su intuición acerca de la situación física a la que se enfrenta, es decir, en su idea de que una representación matemática caracteriza fielmente algún aspecto del fenómeno físico en cuestión. Para ilustrar esto, supóngase que se quiere explicar por qué la ley de Hooke incluye un signo menos en su expresión algebraica $F = -kx$, donde F es la fuerza, k es una constante positiva y x es la elongación (medida de la compresión o expansión del resorte), es común recurrir al argumento de que si se intenta expandir el resorte, este tiende a contraerse, mientras que si se intenta comprimir, este tiende a expandirse. Así, como x es una medida (vectorial) positiva si se trata de un estiramiento y es negativa si se trata de una compresión (el signo de esta medida es solo una convención que podría invertirse), la fuerza necesariamente será de signo contrario a la elongación (Bing T. , 2008).

2.3.2.3 Enmarque de autoridad (invoking authority)

Se basa en la confianza que inspira en el estudiante la información emanada de una autoridad que puede ser un libro de texto o el mismo docente. No es un enmarque que favorezca el encadenamiento de razonamientos ya que se basa exclusivamente en asumir como verdad los hechos o afirmaciones que el estudiante asume como indiscutibles por proceder de una autoridad que conoce más sobre el tema que el propio estudiante. En este sentido, el garante tiene como respaldo el hecho de que procede de alguien o algo más confiable que el propio conocimiento del estudiante.

Como un ejemplo, supóngase el caso en que un estudiante cuestiona a otro sobre el porqué de la fórmula de la ley de Hooke y este responde “porque así aparece en el libro”. No existe ningún cuestionamiento acerca de la validez de la misma o alguna discusión acerca de su origen teórico o empírico.

2.3.2.4 Enmarque de consistencia matemática (mathematical consistency)

Está basado en la confianza en las relaciones e inferencias obtenidas a partir de manipulaciones matemáticas ya conocidas por el estudiante y de cuya consistencia no se duda y que aparecen en la situación a resolver. Bing & Redish (2008) afirman que en este tipo de enmarque las matemáticas y las manipulaciones matemáticas tienen una regularidad y confiabilidad consistente a través de diferentes situaciones (es decir, son un conglomerado de recursos fuertemente ligados) y presentan como ejemplo el hecho de que un estudiante usa ideas acerca de la expresión para la fuerza gravitacional cuando aborda una situación que involucra la expresión para la fuerza eléctrica en la ley de Coulomb. Estas dos expresiones son análogas algebraicamente hablando, solo difieren en los valores que pueden tomar las variables físicas en consideración, pues en la primera la masa es una medida estrictamente positiva, mientras que en la segunda, la carga es una medida que puede ser tanto positiva como negativa. A la hora de resolver un problema de atracción entre dos cargas, suelen usarse argumentos de comparación respecto de la atracción de dos masas y viceversa.

2.3.3 Recursos metacognitivos

Según Coleoni & Buteler (2008) existen recursos cognitivos de tipo conceptual y de tipo epistémico. Los recursos metacognitivos son también recursos cognitivos que se refieren a los mecanismos de control que aparecen en la construcción del conocimiento. Más exactamente:

La actividad metacognitiva es una componente de clara importancia en la resolución de problemas de Física. Una de las primeras cuestiones que surge naturalmente al abordar el tema de la metacognición es su definición. De manera más general, ésta ha sido definida desde el comienzo de los 70 como “el pensamiento sobre el pensamiento”. El término metacognición se refiere, básicamente, a dos aspectos: a) el conocimiento referido a la propia actividad cognitiva, y b) al control de la misma. Sobre esta base, diferentes autores ponen énfasis en distintos aspectos. (p. 371)

Pese a lo difuso del término, pues hace referencia a una amplia gama de habilidades, actitudes y aptitudes de los estudiantes al abordar un problema, su aplicabilidad ha demostrado ser relevante para el desarrollo a posteriori de recursos cognitivos (Georghiades, 2004 citado por Coleoni & Buteler, 2008). En este trabajo se tienen en cuenta algunos recursos de este tipo tales como:

Comprensión: activando este recurso el sujeto estará satisfecho con la comprensión que crea tener de la situación que aborda.

Confusión: al activar este recurso, un sujeto puede manifestar insatisfacción ante alguna incoherencia de sus ideas respecto a una situación dada. (p. 373)

Estos dos recursos se refieren al sentir del estudiante. Así, un estudiante puede sentir que ha comprendido y esto le permite estar satisfecho con sus respuestas o complementariamente, puede sentirse confundido con la incoherencia de sus ideas, es decir, insatisfecho con sus respuestas, esto lo hará buscar ideas más coherentes que lo lleven a la comprensión. Estas ideas pueden incluso ser planteadas en forma de preguntas hacia el profesor o a otros compañeros de clase.

Más adelante, Coleoni & Buteler (2008) mencionan otros dos recursos utilizados por los estudiantes en la resolución de un problema referente a electromagnetismo:

Conciliación: Si bien es también es [sic] un recurso de control, tiene características particulares como para ser considerado por separado. Mediante la conciliación, los sujetos comparan y establecen si hay coherencia entre líneas de razonamiento que se generan a partir de conocimientos provenientes de diferentes fuentes, como por ejemplo, la experiencia cotidiana y la fuente formal. Esto permite a los sujetos reafirmar las conclusiones a las que llegan mediante algún razonamiento.

Qué pasa si: la activación de este recurso permite hacer inferencias sobre la base de un razonamiento que se está siguiendo y contrastar estas inferencias con la situación para establecer si hay coherencia. Es también un recurso de control, y es similar a la conciliación en cuanto a que se basa en la coherencia (o falta de ella) entre dos líneas de razonamiento. La particularidad de este recurso es que esta comparación para establecer coherencia se realiza entre una observación de la situación y una inferencia que el sujeto decide hacer y que no está indicada necesariamente en la situación a resolver. (p. 376)

En los experimentos de física en el aula es frecuente ver este tipo de recursos, especialmente el último.

2.4 ¿Qué es resolver un problema de física? ¿Cómo proponer un problema?

La tradición enseña que un problema de física tiene una estructura definida por un enunciado que exige el uso de una serie de ecuaciones que definen un modelo matemático. Este representa la generalidad de una serie de problemas que pertenecen al dominio del modelo, por ejemplo, es usual ver en los textos algún problema de física relacionado con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Por ejemplo, en Tipler (1995) se presenta el siguiente problema:

Un coche viaja en línea recta con velocidad media de 80 km/h durante 2.5 h y luego con velocidad media de 40 km/h durante 1.5 h. (a) ¿Cuál es el desplazamiento total en el viaje de 4 h? (b) ¿Cuál es la velocidad media del viaje completo? (p. 41)

Este tipo de problema se remite al tipo de los problemas operativos planteado por Gil et al. (1988), que no exige del estudiante el conocimiento profundo del modelo (cómo fue construido) pero sí la forma en que se debe aplicar el mismo, entendido como una serie de ecuaciones en las que se reemplazan ciertos valores y se obtiene un resultado que el estudiante constata con el que presenta el libro. Este tipo de problema se aleja del que tiene que solucionar el propio científico quien debe solucionar problemas un tanto más abiertos. ¿Acaso el científico conoce la solución del problema de primera mano o puede recurrir a una respuesta que le autorice su proceso? ¿Puede el científico o el matemático recurrir a algún enmarque de autoridad como lo hace frecuentemente el estudiante? Coincide con Bing y Redish en ese sentido puesto que uno de los enmarques a los que accede frecuentemente el estudiante es el de la autoridad. Pero existen diversas maneras de plantear los problemas que implican un cambio de perspectiva en las propias soluciones que llevan al estudiante a una labor mucho más parecida al trabajo que hace el científico o el matemático y que lo dirige hacia la profundización en muchos conceptos relacionados con el tema central que propone el problema. Asimismo, puede ser planteado de una forma más abierta para el estudiante con el ánimo de obtener no sólo una respuesta sino múltiples resultados que no se dirijan tanto a validar el modelo, pero permitan profundizar en los alcances del mismo.

Para Gil et al. (1988) es indispensable plantear a los estudiantes problemas de tipo investigativo, es decir, problemas que los lleven a realizar un trabajo similar al que realizan los científicos, que promuevan ese espíritu en los estudiantes y los lleven a alcanzar no una respuesta fría sino una serie de respuestas que se complementan entre sí. En este sentido coincide con Jahnke (2005) en cuanto a la metáfora del físico teórico.

2.5 Problemas que requieren procesos de argumentación y prueba matemática en física

Es frecuente encontrar en los textos de física otro tipo de problemas, diferentes a los que se presentaron en el enunciado anterior, en los que se exige un cálculo simbólico para obtener alguna respuesta previamente establecida y que llevan a menudo la etiqueta en su enunciado de “pruebe” o “demuestre”. Estos conllevan a menudo la resolución de una serie de pasos algebraicos que tienen como objetivo que el estudiante tome ciertas leyes o modelos matemáticos de la física para encontrar una expresión algebraica que relacione dos cantidades fundamentales involucradas en el contexto de una situación física. Young & Freedman (2009) presentan el siguiente ejemplo:

Resortes en paralelo. Dos resortes están en paralelo si son paralelos entre sí y están conectados en sus extremos. Es posible pensar en esta combinación como equivalente a un solo resorte. La constante de fuerza del resorte individual equivalente se denomina constante de fuerza efectiva, k_{efe} , de la combinación. a) Demuestre que la constante de fuerza efectiva de esta combinación es $k_{efe} = k_1 + k_2$. b) Generalice este resultado para N resortes en paralelo. (p. 208)

A diferencia de los problemas operativos, este tipo de pruebas que se presentan al estudiante tienden a generar discusiones más abiertas y preguntas más profundas acerca de las ecuaciones de la física involucradas en el mismo, pero así mismo se corre el riesgo de generar en el estudiante un mayor grado de desconcierto y frustración que aquellos problemas operativos en los que el estudiante reproduce un algoritmo relativamente establecido para dar con una respuesta numérica cerrada. En este sentido es frecuente que el estudiante aunque entienda el problema y sea consciente de su magnitud, exprese su desagrado por no conocer la forma de solución y abandone fácilmente, por lo que el maestro se ve obligado en muchas ocasiones a resolver el problema a modo de curiosidad, perdiéndose la riqueza que éste posee para el proceso de aprendizaje.

La búsqueda de diversas estrategias didácticas que generen interés en el estudiante por formular hipótesis, conjeturar y argumentar acerca de este tipo de pruebas motiva este trabajo interdisciplinar, el cual pretende ahondar no sólo en las dificultades que presentan los estudiantes sino en la forma en la que ellos realizan sus constructos epistemológicos al respecto, sin dejar de lado algunas situaciones psicológicas que pueden ser determinantes en este tipo de circunstancias (Bing & Redish, 2009).

A continuación se plantea un problema de corte investigativo que pretende ser un ejemplo del tipo de problemas susceptibles para el análisis de las epistemologías personales en la secundaria.

2.6 El problema de la ley de Hooke y los resortes en serie y en paralelo

La ley de Hooke (Robert Hooke, 1635- 1703) corresponde a un modelo matemático basado en la proporcionalidad lineal y que puede enunciarse mediante la ecuación

$$F = -kx$$

donde F es la fuerza aplicada a un resorte, x es la elongación que dicha fuerza genera en el resorte y k es la constante de proporcionalidad asociada a la resistencia que ofrece el resorte al momento de intentar expandirlo o comprimirlo. Originalmente Robert Hooke trabajó el problema de la elasticidad del aire en la obra publicada en 1665 con el título *Micrographia*, en la que presenta experimentos que ilustran que la elasticidad del aire es recíproca a su extensión, refiriéndose implícitamente al volumen del mismo (Gal, 2002). En esta obra se nota la importancia que Hooke dio al uso de tablas de medidas y son una muestra de los intereses que lo llevaron al posterior estudio de la elasticidad en otros cuerpos. Así, en una obra posterior, *De Potentia Restitutiva* de 1678, puede verse el creciente interés del científico en los diferentes cuerpos elásticos. El contexto social de la época gira en torno a la monarquía británica que brindó apoyo a la institución privada llamada Royal Society of London, creada en un comienzo por un grupo de filósofos naturales, como se hacían llamar y que tenía como principio el avance de las ciencias empíricas en contraposición con los criterios de autoridad escolástica de la época (Kuhn, 1982). En este marco, Robert Hooke fue nombrado como el primer comisario de experimentos de la Sociedad, lo que determina en gran parte su orientación experimental, a partir de la cual se pretende la explicación de los fenómenos. Así, por ejemplo, en el caso concerniente a los resortes llegó a un modelo matemático construido a partir de tablas, aunque la manera en que está descrito en el ensayo sugiere una posible conjetura previa al experimento formal del que no se hace referencia explícita en cuanto a los resultados del mismo (Moyer, 1977). El uso de la palabra potencia en vez de fuerza podría ser un reflejo de la rivalidad existente con Newton quien prefería la palabra fuerza, que como es sabido fue el que se impuso a la postre, pero es claro que cuando Robert Hooke habla de potencia se refiere al término fuerza empleado por Newton.

Dado que Robert Hooke fue ayudante de Robert Boyle, precursor de la teoría del gas ideal, la influencia de este en el estudio de la compresión de un gas es clara puesto que se observa la realización de un experimento con aire, previo al estudio más profundo de Boyle (Gal, 2002). Este antecedente es clave en la posterior conjeturación que llevó a Hooke al establecimiento de su ley en los cuerpos elásticos sólidos. Aunque es importante anotar que en el caso del aire no se cumple la proporcionalidad lineal, Hooke relacionó los resultados de sus primeros experimentos con gases con los resultados que obtuvo en sus experimentos con resortes (Moyer, 1977). Sin embargo, aparece el problema de por qué Hooke relacionó una ley de proporcionalidad inversa con una ley de proporcionalidad directa, problema al que Moyer se refiere como la presentación ambigua de la ley de Hooke. Gal (2002) presenta una posible solución que tiene que ver con las ideas de Hooke sobre la composición interna de los fluidos (en especial el aire) como una serie de partículas con movimiento heterogéneo (caótico o aleatorio) debido a la separación de estas, es decir, Hooke no es ajeno a los aspectos microscópicos de un gas o de un sólido, en el cual este movimiento de partículas internas es más armónico pues estas se encuentran en un contacto más próximo. Esta idea y otras relacionadas con muchos experimentos sitúan a la ley de Hooke como una instancia dentro un proyecto científico más ambicioso en busca de principios generales que pudieran explicar una amplia gama de fenómenos. En este sentido Gal (2002) destaca la genialidad de Hooke para intuir explicaciones científicas a partir de un inagotable trabajo experimental, genialidad solo superada por la complejidad teórica de su rival Newton.

La Figura 4 muestra el diagrama principal presentado por Hooke en *De Potentia Restitutiva or Of Spring* en el que aparecen ilustraciones de sus experimentos sobre la elasticidad de cuerpos sólidos. Este diagrama presenta cinco figuras, de las cuales las tres primeras representan resortes y las otras dos son gráficas que relacionan variables asociadas al fenómeno en cuestión. Los resortes representados son, en su orden, un resorte helicoidal, uno en espiral y un alambre recto de latón. Estos tres resortes están asociados a ocho “pesos” representados con pequeños círculos, a cada uno de los cuales está asociada una elongación respectiva en cada resorte, cumpliendo la relación de proporcionalidad expresada por la ley de Hooke. Las figuras 4 y 5, son etiquetadas por Hooke respectivamente como “Diagrama de velocidades de resortes” y “Diagrama de la ley de ascenso y descenso de los cuerpos pesados”.

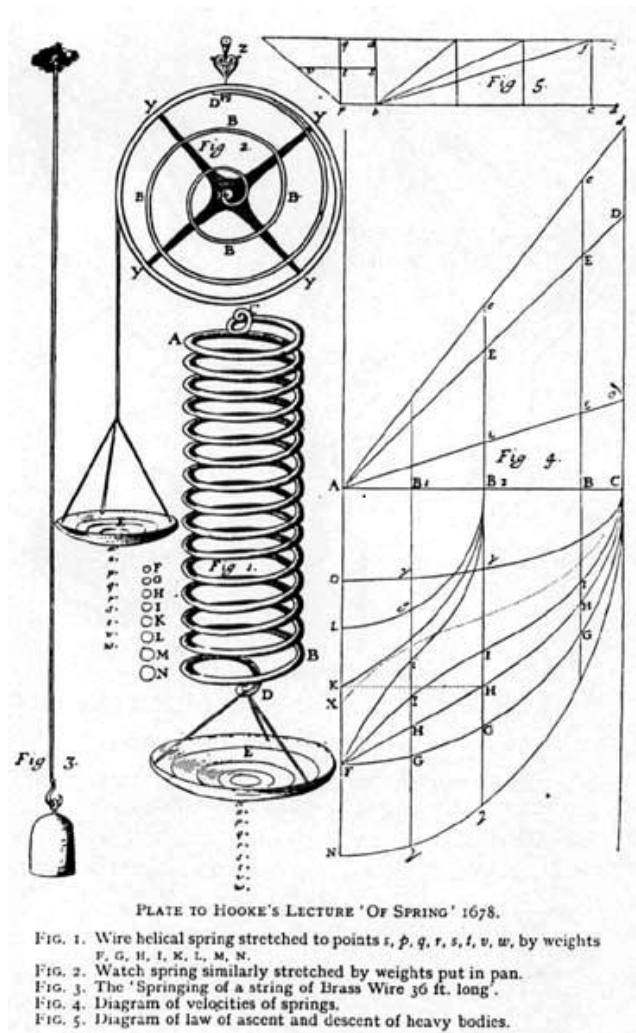


Figura 4. Imagen presente en *De Potentia Restitutiva* que muestra los experimentos de Hooke al estudiar la elasticidad. El alambre de metal se asemeja a una banda elástica (Fig 3)

Los aspectos anteriores son importantes para una comprensión de la construcción epistemológica de la ley de Hooke a nivel histórico, así como permite entender en alguna medida la epistemología personal de su autor o descubridor, pero en este trabajo nos interesa solo en la medida en que la ley de Hooke fue anterior a las leyes de Newton, propuestas en los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de 1687. De ahí que Hooke no llegó al mismo concepto de fuerza que tuvo Newton pero ya poseía una idea intuitiva del mismo, es posible que Newton haya usado los estudios de Hooke o al menos los haya tenido en cuenta puesto que los dos pertenecían a la Royal Society. Una reivindicación de Hooke a este respecto se hace evidente en el trabajo de Gal (2002). Este hecho histórico es usado para la elaboración de la guía de aprendizaje, puesto que a diferencia del

currículo tradicional se considera que puede desarrollarse primero la ley de Hooke sin que estén propiamente desarrolladas las tres leyes de Newton.

Es importante en este punto aclarar que la perspectiva de análisis para este trabajo se refiere más a las epistemologías personales de los estudiantes (Bing & Redish, 2008) que a la epistemología en un sentido amplio, construida desde un punto de vista social. En este sentido, la epistemología de cada ser humano (la forma de construir el conocimiento) es diferente a la de los demás, de aquí que un estudiante enmarque un mismo problema de forma distinta a como lo hace otro y por lo tanto no se espera que los estudiantes hagan un enmarque semejante al que históricamente hizo Hooke, quien evidentemente poseía una epistemología personal sofisticada pues ya había dedicado gran parte de su vida al estudio experimental. Dentro de enfoques distintos del cognitivo existen propuestas muy interesantes en relación con la posibilidad de integrar usos como los que Hooke a su ley aplicados a distintos ambientes de aprendizaje. Un ejemplo notable de esto es el trabajo de Hernández (2014), en el que a partir de una perspectiva socioepistemológica profunda, se aborda este asunto para el caso de un ambiente de aprendizaje divulgativo. En este trabajo se hace relevante, entre otros, el uso hookiano de la periodicidad en una situación social referida a los guías de un museo de ciencia y tecnología que aprenden en este escenario no formal acerca de la periodicidad de los movimientos de las lunas de Júpiter.

En un sentido estricto y actual, la ley de Hooke tiene un carácter vectorial y se enuncia como

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

en donde \mathbf{F} es el vector fuerza restitutiva del resorte, k es la constante de elasticidad del resorte y tiene un carácter escalar mientras que \mathbf{x} es el vector desplazamiento de uno de los extremos del resorte. Se consideran de sentido opuesto el vector \mathbf{F} y el vector \mathbf{x} de manera que su se elonga el resorte en una dirección la fuerza que hace el resorte debe ir en la dirección contraria. Dado que la elongación y la fuerza son dos vectores que están sobre una misma recta puede simplificarse esta ecuación a la de tipo escalar ya mencionada y que expresa la idea original de Hooke "if one Power stretch or bend [a spring] one space, two will bend it two... and so forwards" (Gal, 2002) que puede traducirse libremente como "si una Potencia estira o comprime [un resorte] un espacio, dos lo estirarán dos [espacios]... y así sucesivamente". Téngase en cuenta que el término "potencia" hace referencia a lo que en la actualidad se conoce como "fuerza", debido a la influencia marcada de Newton.

El problema que se presenta en este trabajo está relacionado con el de encontrar la constante de proporcionalidad resultante para un sistema de N resortes en serie, es decir colocados uno a continuación de otro, cada uno con una constante de proporcionalidad, k_1, k_2, \dots, k_N , en los que se asume que la ley de Hooke se cumple plenamente en un intervalo en el que el resorte no se deforma ni pierde sus propiedades elásticas y el de encontrar la constante de proporcionalidad de N resortes en paralelo, es decir colocados uno junto al otro en la misma dirección y sosteniendo el cuerpo con las mismas condiciones descritas para los resortes en serie. A nivel de primeros semestres de universidad, este problema aparece frecuentemente en los cursos de física y está referenciado ampliamente en los libros de texto.

En la Figura 5 se muestran dos resortes halados por el peso de un bloque de masa m en serie y en paralelo.

¿Pueden ser reemplazados estos dos resortes por un único resorte cuya constante sea equivalente a la de estos dos resortes colocados en serie o en paralelo?

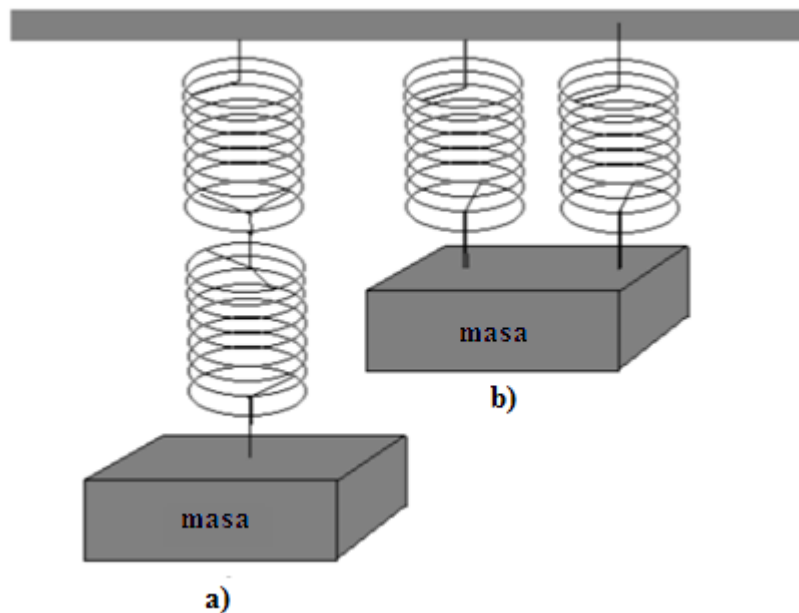


Figura 5. Sistemas de dos resortes a) en serie y b) en paralelo

Este problema suele trabajarse mediante una prueba matemática, asumiendo que la respuesta es afirmativa y que puede calcularse esta nueva constante a partir de un procedimiento matemático, partiendo de una hipótesis física, como se explica a continuación:

Hipótesis física: En el caso de dos resortes en serie, la fuerza que actúa sobre cada uno de los resortes es la misma, puesto que por ley de acción y reacción cada parte de cada resorte efectúa una fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el peso suspendido de los mismos (más exactamente del resorte inferior). De aquí se plantea la ley de Hooke para cada uno de los dos resortes como sigue.

Para el resorte inferior se tiene que

$$F = -k_1x_1$$

y para el resorte superior

$$F = -k_2x_2$$

al igualar las ecuaciones se obtiene

$$-k_2x_2 = -k_1x_1$$

por otro lado, para un resorte equivalente con constante k :

$$F = -kx$$

además

$$x = x_1 + x_2$$

por lo anterior,

$$F = -k(x_1 + x_2)$$

pero $x_2 = \frac{k_1x_1}{k_2}$, porque ambos resortes están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k\left(x_1 + \frac{k_1x_1}{k_2}\right)$$

y el proceso continúa algebraicamente como sigue:

$$F = -kx_1\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \text{ porque se puede sacar factor común}$$

$$F = -kx_1\left(\frac{k_1+k_2}{k_2}\right) \text{ puesto que se suman las fracciones dentro del paréntesis}$$

$$-k_1x_1 = -kx_1\left(\frac{k_1+k_2}{k_2}\right) \text{ por la ley de Hooke aplicada al resorte 1, lado izquierdo}$$

$$k_1 = k\left(\frac{k_1+k_2}{k_2}\right) \text{ al cancelar } x_1 \text{ porque no es cero (se puede dividir entre este valor)}$$

$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = k$ porque se despeja la constante

k es la constante del resorte equivalente a los dos resortes colocados en serie. Este resultado permite pensar en una nueva operación suma para este tipo de sistemas.

Para la suma de las constantes de dos resortes en paralelo se parte de la hipótesis física de que la elongación que sufre cada resorte es la misma, en ese sentido, los resortes deben estar lo suficientemente cerca uno del otro (en un sentido estricto, deben estar solapados para que se cumpla plenamente esta condición y evitar así los efectos de torsión). Así, puede seguirse el siguiente procedimiento para probar que la constante elástica del sistema es la suma de las dos constantes:

$F_1 = -k_1 x$ para el primer resorte y $F_2 = -k_2 x$ para el segundo resorte.

$F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x$, después de sumar ambas ecuaciones.

$F = -(k_1 + k_2)x$, siendo F la fuerza total ejercida por los dos resortes sobre el cuerpo.

Siendo la nueva constante k del sistema, equivalente a $k_1 + k_2$.

En este trabajo se ha simplificado este problema para presentarlo a estudiantes de secundaria de manera que se parte de la suposición de que los resortes son iguales y se limita el número de resortes a $N = 2$, por lo tanto para dos resortes en serie con estas características se obtiene:

$$k = \frac{k_1 k_1}{k_1 + k_1} = \frac{k_1^2}{2k_1} = \frac{k_1}{2}$$

Lo cual quiere decir que la constante se reduce a la mitad mientras que la elongación se duplica. En el caso de dos resortes en paralelo, la nueva constante es $k = k_1 + k_1 = 2k_1$ lo que quiere decir que la constante se duplica mientras que la elongación se reduce a la mitad. Estos resultados son usados más adelante para plantear una actividad, no con resortes como es la tradición en clases de física, sino con bandas elásticas de escritorio, que son elementos de uso muy cotidiano. Esto con el interés de ver si también cumplen la ley de Hooke, al ser estiradas (ya que no puede hablarse de compresión). Asimismo, estos resultados son usados en la construcción o programación del *applet* implementado para la actividad del aula que se describe más adelante en su fase denominada experimento virtual.

2.7 Una aproximación genética a la prueba

El propósito de este apartado es describir lo que Jahnke llama una aproximación genética a la prueba y cómo se tuvo en cuenta esta propuesta en el diseño de la actividad.

De acuerdo con Jahnke (2005) y Jahnke (2010), el problema didáctico de llevar la prueba al aula está emparentado con el proceso histórico de construcción de las teorías en las ciencias empíricas. Así por ejemplo, la metáfora del físico teórico plantea que se puede reproducir en el aula el trabajo de un físico teórico, que le da fuerza a sus teorías matemáticas no solo mediante el sistema axiomático con el que se construyen sino a través de argumentos empíricos. Asimismo, en el caso de la Geometría, que puede ser tomada como una ciencia empírica tal como se trató en sus orígenes, la prueba de un teorema puede llevarse a cabo mediante una aproximación empírica ligada necesariamente con la medida, proceso al que Jahnke llama la fase formativa de la teoría. Esta fase está relacionada con una variedad de mecanismos argumentativos los cuales pueden llevarse al aula mediante la pregunta “¿por qué?”. Las respuestas iniciales a las cuestiones tales como procesos de generalización pueden ser consideradas como la realización de un experimento mental. Por otro lado, Jahnke sugiere que después de esta fase mental, debe haber una etapa experimental relacionada directamente con la medida que aproxime a los estudiantes a las ideas básicas que contiene la prueba en vez de hacer una prueba formal a la manera de Euclides. Esta fase formativa de la teoría es la que se pretende fortalecer mediante la actividad que se propone a los estudiantes en el aula.

En este experimento debe permitirse al estudiante jugar con las diferentes variables (en forma semejante a lo que hoy se llama Geometría Dinámica), para sentar las bases de una futura fase establecida de la teoría, la cual está fuera del alcance de este trabajo (no se pretende llegar a una teoría probada formalmente). Particularmente, se aplican estas ideas para formular tres fases de la actividad: experimento mental, experimento virtual y experimento real. Estos se explican en detalle en el siguiente capítulo.

3 METODOLOGÍA

Este capítulo presenta la metodología que se utilizó al desarrollar el presente trabajo para cumplir con los objetivos planteados. Sustenta las acciones que se llevaron a cabo y describe la mayor parte de las decisiones que los autores tomaron para realizar la investigación desde el enfoque mostrado en el marco teórico conforme las diversas contingencias que tuvieron que sortear para conducir a un desarrollo plausible de las diferentes etapas de la misma que se plantean más adelante. Primero se presenta una breve perspectiva que centra el curso de las acciones de los investigadores participantes y luego se pasa a describir las diversas acciones o etapas.

3.1 Tipo de investigación

La investigación aquí planteada es de tipo cualitativa. Es acorde con algunos elementos de lo que se denomina un experimento de enseñanza en el sentido de que se plantean varias fases entre las cuales existen algunos microanálisis que dan lugar a ciertos cambios en el diseño original de la actividad con el ánimo de hacerla más fructífera. De igual manera, es consistente con dicho tipo de diseño metodológico en que la diferencia entre docente e investigador es difusa de modo tal que los docentes que realizan este estudio se comportan también como investigadores de su propio quehacer. Posee también elementos de análisis del discurso por la misma naturaleza de sus objetivos, descritos anteriormente.

El enfoque que se sigue en el análisis es de tipo cognitivo y se centra en el pensamiento desarrollado por cada estudiante sin observar demasiado las relaciones sociales que se dan en el grupo del que hace parte aunque es inevitable en algunos momentos tener en cuenta ciertas interacciones de este tipo para comprender tales formas de pensamiento individual.

3.2 Participantes del estudio y contexto social

Los estudiantes que participaron en el desarrollo de las actividades de aula propuestas en la presente investigación pertenecían al grado 1101 del Colegio San Isidro Sur Oriental I.E.D. Jornada Tarde (localidad 4) y los grados 1101 y 1102 de la jornada de la mañana del Colegio Julio Garavito Armero I.E.D. Jornada Mañana (localidad 16). Sus edades eran, en su mayoría, de 16 y 17 años y sus familias pertenecían a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3.

Al momento de la ejecución del instrumento, el Proyecto Educativo Institucional del primer colegio estaba enfocado en valores y comunicación y el del segundo, en gestión empresarial y comunicación, debido a que los estudiantes históricamente han presentado dificultades de interpretación de textos, gráficos y otros lenguajes técnicos y literarios. Esto último ha sido observado por los profesores a lo largo de sus clases en tales instituciones y se tuvo en cuenta para establecer los instrumentos aplicados, así como para comprender los resultados de tales instrumentos.

El grupo inicial al que se aplicó la actividad contaba con 26 estudiantes de la I.E.D. San Isidro Sur Oriental y 56 estudiantes del I.E.D Julio Garavito Armero, pero el grupo al que se aplicó el instrumento final de análisis consta de dos grupos de 3 estudiantes del primero y dos grupos de 3 estudiantes en el segundo, en virtud de las consideraciones que más adelante se presentan. Para esta elección se tuvo en cuenta el criterio de que los grupos hubieran completado la mayor parte de cada una de las tres fases experimentales.

3.2.1 Descripción del curso 1101 de la IED San Isidro Sur Oriental

En la institución los estudiantes rotan de salón en el cambio de clase. Los salones están organizados por mesas de cuatro estudiantes, esto determinó en gran medida la comunicación entre los estudiantes de cada grupo durante el desarrollo de cada fase experimental. El curso 1101 presentó en general buen nivel académico y convivencial, en la mayoría de las asignaturas del currículo institucional. Algunos de los estudiantes presentaron inasistencias frecuentes debido a actividades diversas de índole social que la institución realiza con grados inferiores (servicio social, participación en eventos deportivos, etc.). Esto incidió en el hecho de que algunos de los grupos no participaron en todas las fases de la actividad. En el momento en que esta se aplicó, el grupo había terminado de estudiar inecuaciones y se iniciaba el tema de las características de funciones lineales y cuadráticas. En la clase de física, los estudiantes ya tenían conocimiento acerca de las leyes de Newton pero no conocían la ley de Hooke. Tampoco poseían mayor experiencia en el desarrollo de experimentos, ya que la institución no contaba en ese momento con un laboratorio de Física adecuado.

Por otro lado, pese a que los estudiantes regularmente asistían al aula especializada de sistemas en clase de tecnología, el uso de computadores portátiles y *tablets* en el aula regular había sido

limitado. En la clase de matemáticas nunca se habían usado estos elementos puesto que su adquisición era reciente al momento de la actividad.

3.2.2 Descripción de los cursos 1101 y 1102 de la IED Julio Garavito Armero

Los estudiantes del grado Once de la promoción 2015 del colegio Julio Garavito Armero se caracterizaban por tener un buen rendimiento académico en la mayoría de las materias y un buen desarrollo convivencial, en general. Debido a que algunos eran buenos deportistas, se encontraban inmersos en programas que les obligaban a fallar en algunas ocasiones a las clases, otros pertenecían al grupo de robótica y les ocurrió algo similar. Lo anterior es importante para el desarrollo de la actividad que se propuso, pues para ese tiempo se presentó bastante inasistencia y muchos de los estudiantes no completaron las tres fases del experimento, situación determinante en la elección de los grupos a analizar. En matemáticas, se seguía un currículo tradicional en el que se desarrollaba el cálculo a través de ejercicios y al momento de presentar la actividad, estaban desarrollando las nociones de función, intervalos y límites. En física, se tenía alguna noción de las leyes de Newton, y al igual que en el colegio San Isidro, no se contaba con un aula de laboratorio especial para física y los elementos se usaban poco.

Respecto a las condiciones técnicas, al momento de realizar la actividad no se contaba con *tablets* o computadores portátiles, así que los videos se realizaron con ayuda de los celulares de los estudiantes y el del profesor, mientras que para el experimento virtual se usó el aula de sistemas.

3.3 Etapa preliminar

Esta etapa consistió en la aplicación y análisis de la tarea, ya mencionada en el apartado 1.1.2, relevante en el planteamiento del problema pues da origen a la pregunta de investigación, y cuyos resultados consideramos fundamentales para entender las diferentes dificultades que se presentan al plantear una guía tradicional de enseñanza. Esta etapa se desarrolló con un grupo distinto al que nos interesa para el análisis, objeto del presente trabajo y debe aclararse que no hace parte de la propuesta final sino de un primer ensayo que arrojó luces sobre las falencias de presentar la ley de Hooke de una manera tan textual y poco profunda.

En esta etapa, que se desarrolló entre marzo y abril de 2014 con estudiantes de grado once de ese año, distintos a los estudiantes a los que hace referencia el estudio final (grado once, 2015), se planteó la guía de enseñanza al estilo de los libros de texto, presentada en la Figura 1 en la que se

ofrecía una información descriptiva de la ley de Hooke con la expectativa de introducir al estudiante en el modelo matemático respectivo y así en una guía posterior acercarlos a la prueba matemática planteada en el marco teórico. Pero los resultados obtenidos a partir de este tipo de guía obligaron a replantear la tarea puesto que su formulación hacía difícil que los estudiantes exploraran sus propias ideas acerca del fenómeno físico. Las preguntas eran todavía muy cerradas, lo cual no permitía la discusión de las mismas ni una construcción adecuada del conocimiento por parte de los estudiantes.

La guía exigía de los estudiantes prerequisites elevados, tales como análisis de intervalos para una función en su representación cartesiana, pero los estudiantes de los dos colegios mostraron que el recurso cognitivo de función en la mayoría de los casos no estaba presente. Asimismo, hacía cuestionamientos de corte más físico que matemático, por ejemplo, se les preguntó por la validez de la afirmación “si un resorte es más grueso entonces su constante de elasticidad es mayor”. Para abordar estas preguntas contaban con un texto en el que se enunciaba y explicaba la ley de Hooke, así como una gráfica en la que se representaban los intervalos en los que esta se cumplía y en los intervalos en que no.

La ley de Hooke fue, en general, dejada de lado por la mayoría de los estudiantes (especialmente en la clase de física de la IED Julio Garavito Armero) quienes prefirieron optar por argumentos empíricos como probar con los resortes de bolígrafo que encontraron a su disposición (Figura 6).

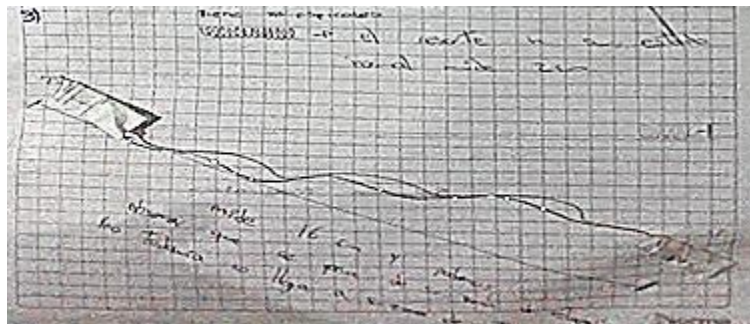


Figura 6 . Respuesta de un estudiante en la que incluye en su justificación un resorte de bolígrafo pegado a la hoja de papel

Aunque algunos estudiantes se remitieron a la relación entre las variables de fuerza y elongación (Figura 7), no pudieron dar razón acerca de la relación entre la función matemática y lo que ocurre en el resorte.

* Yo digo que la profesionalidad es grande. Que entre mas grueso mas grande tiene que ser la fuerza que uno tiene que aplicar en el mismo como lo da en la formula que entre mas grande sea la constante se tiene que multiplicar por un numero de fuerza mas grande.

Figura 7. Relación entre fuerza y constante de elasticidad en la respuesta de un estudiante

Otros no se sintieron cómodos al resolver un problema que no tiene un algoritmo de solución, hecho que les causó cierta frustración. El problema de validar una proposición en el plano de la física requiere más que la acostumbrada ejecución de algoritmos, sin que esto signifique que no sea necesaria. Se requiere entonces estudiar y concebir procesos adecuados que generen en los estudiantes la superación de esta concepción de la resolución de problemas, reducida a la aplicación de un algoritmo.

El análisis de la actividad y sus resultados se hizo en conjunto con los integrantes del grupo de Argumentación y Prueba de la UPN del semestre correspondiente, obteniéndose los siguientes resultados al respecto:

La guía fue planteada como una guía de enseñanza y no de aprendizaje, en la que se esperaba que los estudiantes comprendieran los conceptos, basados en un lenguaje complejo con uso de un vocabulario técnico y sofisticado. Esto desvió los objetivos iniciales, aunque se observaron algunos vestigios de argumentación, sobre todo en la pregunta 2 en la que se invitaba explícitamente al estudiante a justificar (Figura 7). En general se presentó confusión en la mayoría de los estudiantes debido al texto con alto contenido de lenguaje técnico, así por ejemplo, preguntas como la número 7 tenían una redacción que no era clara para el estudiante y aún para el experto. Esta complejidad de la guía hizo que el tiempo no fuera suficiente para su completa solución, la mayoría de los estudiantes se concentró en las tres o cuatro primeras preguntas de la guía, siendo las preguntas abiertas (2 y 3) las que más discusión e interés generaron.

El educador matemático se centró en las preguntas de la guía relacionadas con los temas que le competían a su clase (pregunta número 3 de la guía) y orientó en esa dirección a sus estudiantes. También el profesor de física buscó sus propias expectativas y determinó el curso de las respuestas de sus estudiantes. La guía tenía elementos de matemática y elementos de física, pero esos

elementos no se integraban adecuadamente. Los profesores buscaron que la guía se ciñera a los temas que se estaban tratando en sus respectivas clases y planes de aula, lo cual limitó la creatividad y la libertad en las respuestas de los estudiantes. Esta guía de enseñanza hacía difícil la exploración autónoma por parte de los estudiantes, es decir, fue planteada para dirigirlos hacia unos temas muy específicos de naturaleza abstracta que debían estar en el currículo, sin tener en cuenta que a los estudiantes a este nivel se les debe permitir todo tipo de exploración y la generación de sus propias preguntas y respuestas. La guía estaba enmarcada dentro de la enseñanza tradicional abordada por los libros de texto de nivel introductorio universitario.

Esta presentación de la ley de Hooke resultó ser muy escueta (Hernández, 2014) y mostró la necesidad de plantear una actividad diferente que permitiera a los estudiantes lograr una construcción de la ley de Hooke introduciendo la experimentación, actividad escasa en el ambiente escolar de los dos colegios involucrados en este estudio. Esta idea de introducir la experimentación está fundada en el interés mostrado por los estudiantes en la pregunta número 2 de tal guía.

Las respuestas de los estudiantes permitieron evidenciar que la única pregunta abierta formulada en la guía les permitía un mayor nivel de exploración y también de interés, en contraste con las preguntas cerradas en las que se pedía un resultado puramente matemático.

La suposición de que los estudiantes poseían nociones previas de las leyes de Newton y de la propia ley de Hooke, así como del conocimiento de otros recursos dio como resultado el planteamiento de una guía demasiado compleja para los estudiantes que no generó el aprendizaje esperado, es decir, mayor conexión entre los recursos ya existentes o la generación de otros nuevos, aunque sí permitió evidenciar cierto grado de interés de los estudiantes hacia algún tipo de experimentación con objetos cotidianos tales como los resortes de sus propios bolígrafos.

3.4 Etapa de diseño de la actividad

El análisis descrito anteriormente hizo pensar a los autores que tales tipos de guías no eran adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes, pues las preguntas estaban formuladas de tal manera que no propiciaban el descubrimiento, por parte del profesor, de la forma de razonar de sus estudiantes. La mera lectura de un texto no les permitió construir significado de los conceptos involucrados. La gráfica presentada les decía poco sobre la ley de Hooke. Se hacía necesario una experiencia más vivencial y concreta que los acercara a los conceptos. Sin embargo, este tipo de

guía analizada desde el punto de vista de la argumentación, les permitió a los autores mejorar el planteamiento de las preguntas o actividades para los estudiantes así como detectar cuáles preguntas podrían ser relevantes para generar actividad argumentativa y cuáles no, así como determinar cuáles les generan interés y cuáles les generan frustración.

El contenido matemático asociado a la secuencia que se diseñó es básicamente la proporcionalidad directa, asociada a la ley de Hooke, que rige el comportamiento elástico tanto de un resorte como de otros cuerpos. Sin embargo, para hacerla más accesible a los estudiantes, se determinó que debía plantearse como modelo posible del comportamiento elástico de una banda corriente de caucho (de escritorio), basado en el hecho de que el mismo Hooke (Moyer, 1977) planteó que su ley de proporcionalidad se cumplía también para algunos tipos de sólidos elásticos como alambres lineales (tercera figura del Diagrama principal de *De Potentia Restitutiva* presentado en la Figura 4), además del hecho de ser objetos de uso muy cotidiano para los estudiantes (más que los resortes). Más que presentar el contenido de proporcionalidad, se pretendía proponer una situación experimental para los estudiantes, en la que se manifestaran de manera explícita las relaciones matemáticas entre las variables presentes sin asumir que la ley de Hooke o las leyes de Newton hayan sido tratadas en la clase de física y sin tomar como verdad absoluta el resultado que aparece en los libros o en internet. Esta idea está en concordancia con Gil et al. (1988), quienes ponen de manifiesto la relevancia de idear problemas de corte investigativo que propicien que los estudiantes se involucren de modo experiencial en su resolución, mejorando así el aprendizaje de las ciencias.

Con tal fin, se construyó una nueva actividad, esta vez dirigida al nuevo grupo de grado once de cada colegio (año 2015), basada en una situación de carácter investigativo guiada a través de tres fases, repartidas en cuatro a cinco sesiones de clase, respetando el ritmo de cada institución y la búsqueda de los momentos e infraestructura adecuados. Las tres fases se denominaron: Experimento Mental, Experimento Virtual y Experimento Real.

En el proceso de aproximación a la prueba planteado por Jahnke (2005), con base en su idea de la “metáfora del físico teórico”, se parte de la idea de experimento mental como primera forma de acercamiento a las teorías matemáticas, en el ejercicio de responder a la pregunta “¿Qué hace que las cosas sean como son?”. A continuación viene una fase en la que prima el pensamiento hipotético-deductivo pero permeado éste por lo empírico. Esta idea condujo a los autores a proponer la secuencia de experimentos en el orden en que fue aplicada.

Experimento mental: Fue diseñado sobre la base de la metáfora del físico teórico dada por Jahnke (2005), que indica cómo en el experimento mental se gestiona el pensamiento matemático que modela el mundo real. En este se pretendía que, a partir de su imaginación, los estudiantes idearan una hipótesis de lo que ocurriría en la práctica. Se les propuso imaginar inicialmente una banda de caucho sostenida mediante algún soporte, de la cual debían suspenderse sucesivamente desde 1 hasta 10 discos compactos (CD). La actividad consistía en comparar el número de CD suspendidos y la respectiva elongación de una banda individual, así como de dos bandas en serie y dos bandas en paralelo, mediante una tabla de valores que relacionara estas variables. En la guía se pedía a los estudiantes encontrar relaciones entre estas, de acuerdo con su propia manera de imaginar el experimento y generar argumentos mediante los cuales pudieran dar razón de dichas relaciones obtenidas por medio de tal interpretación. El material de trabajo para esta parte constaba de un texto escrito elaborado por los docentes que contenía las instrucciones y preguntas orientadoras.

Experimento virtual: los docentes diseñaron un *applet* en GeoGebra (popular programa de Geometría Dinámica), el cual simulaba las tres situaciones antes mencionadas para un máximo de 10 CD, con base en un comportamiento fiel a lo que afirma la ley de Hooke, es decir, proporcionalidad lineal entre el número de CD y la elongación de cada banda. De igual manera, se propuso que los estudiantes registraran los valores de las variables consideradas en el experimento anterior (además de la masa y el peso) y encontraran relaciones entre dichas variables proporcionando la respectiva justificación de acuerdo con lo inferido de sus observaciones, y que realizaran las correspondientes gráficas (entre peso y elongación). El material de trabajo consistía en un documento escrito por los docentes que contenía las tablas sin diligenciar y una serie de preguntas para cada grupo (de 3 o 4 estudiantes), además de un computador que contenía el *applet* de GeoGebra. El modelo computacional propuesto se basó en los desarrollos algebraicos ya descritos en el marco teórico dentro del entorno de GeoGebra (aprovechando nuevamente la fuerte relación entre física y geometría). El diseño de la simulación está basado en algunos trabajos previos (Talero, Mora, Organista, & Galindo, 2013) que muestran la relevancia de hacer análisis computacionales a partir de problemas inicialmente simples pero que pueden complejizarse, así como en la relevancia de la experimentación con objetos geométricos propuesta por Jahnke (2005) en su aproximación genética a la prueba, en la que presenta métodos similares a lo que hoy se denomina Geometría Dinámica. En este trabajo, propone la manipulación de un triángulo, estirando uno de sus vértices hasta el infinito, y dejando constante uno de sus ángulos para que el estudiante

a través de la medida haga un acercamiento a la prueba del teorema de la suma de los ángulos internos, anticipándose a los principios en que se basan las hoy popularizadas herramientas computacionales de Geometría Dinámica que simplifican esta tarea. En el *applet* de GeoGebra diseñado por los autores se usó el elemento “Segmento” a manera de una banda elástica, de manera que al agregar un objeto representativo del peso, aumentaba su longitud proporcionalmente, a partir de lo cual, un estudiante puede observar medidas y relacionar variables.

Experimento real: Se propuso en la guía que los estudiantes, por grupos, registraran los valores obtenidos al observar el comportamiento de las bandas de caucho al suspender los CD, pero esta vez usando materiales reales y utilizando regla para tomar las medidas que se solicitaban. Se propuso que establecieran algún tipo de relación entre las variables en cuestión y argumentaran sus afirmaciones al observar el comportamiento elástico en cada una de las tres situaciones. En este experimento, se buscó que los estudiantes probaran sus ideas en un contexto más real, con bandas, CD, reglas y otros artefactos que tuvieran a la mano para determinar alguna especie de verificación de lo que conjeturaban en los dos anteriores. Este experimento es muy común en la clase de física usando resortes, pero rara vez se le deja investigar a los estudiantes si existen otros cuerpos, como las bandas, que cumplan con la ley de Hooke. Para implementar estos tres tipos de experimento primero se llevó a cabo una actividad piloto con una estudiante de un colegio distrital diferente a las IED Julio Garavito Armero y San Isidro Sur Oriental, que colaboró con la lectura de la guía previa (Figura 8) y cuya resolución de la guía permitió a los autores identificar posibles fallas en la redacción de las preguntas y proponer mejoras en el diseño de la actividad.

**TALLER: LEY DE HOOKE PARA BANDAS ELÁSTICAS EN SERIE Y EN PARALELO
TRES TIPOS DE EXPERIMENTOS**

EXPERIMENTO MENTAL

1. Imagine una banda de caucho y suponga que la cuelga de un gancho o de algún otro objeto fijo. .suponga que la longitud de la banda es de 7 cm y 2mm de espesor.
2. ¿Cuánto estima que se alarga la banda si se cuelga de ella un CD?
3. ¿Cuánto estima que se alarga la banda al colgar de ella 2 CD?
4. Llene la siguiente tabla con sus estimaciones.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

5. ¿Observa alguna regularidad matemática en el incremento de la longitud cuando se incrementa la cantidad de CDs?
6. Ahora suponga que se unen dos bandas de idénticas características a la anterior, una a continuación de la otra, a esta disposición le llamaremos bandas en serie. Para este sistema elabore una tabla similar a la del punto 4.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

7. ¿Cómo aumentaría la longitud ahora?
8. Considere ahora dos bandas semejantes como en el punto 6 pero ahora una al lado de la otra, a esta disposición le llamaremos bandas en paralelo. De manera similar estime los incrementos en las longitudes de acuerdo con el número de CDs llenando la tabla.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

9. ¿Cómo se comporta el incremento de la longitud de las bandas en relación con el número de CDs?

EXPERIMENTO VIRTUAL

Abra el archivo de Geogebra "Ley de Hooke para bandas elásticas en serie y en paralelo". El archivo simula la banda de caucho individual, las dos bandas en serie y las dos en paralelo. Realice la misma actividad anterior mediante las observaciones hechas al agregar CDs al final de las bandas elásticas con ayuda del deslizador mg.

En cada uno de los tres casos observe y describa las posibles regularidades matemáticas que relacionan el número de CDs con la elongación de las bandas de caucho.

¿Se puede predecir la elongación de las bandas para un número dado de CDs que no se encuentre en la tabla? ¿Cómo se calcularía su valor?

EXPERIMENTO REAL

Repita el procedimiento pero esta vez con bandas de caucho y CDs reales, llene la tabla en cada caso y extraiga sus conclusiones. Compare los resultados obtenidos en los tres diferentes experimentos.

Figura 8. Guía aplicada en la prueba piloto en la que se introducen los tres tipos de experimentos

El pilotaje de la actividad arrojó resultados bastante positivos, en cuanto que la estudiante mostró comprensión en la mayoría de los elementos de la guía, pero fue necesario cambiar algunas preguntas e incluir una imagen que mostrara con claridad en qué consistía el sistema de bandas en serie y el sistema de bandas en paralelo, puesto que en primera instancia tuvo confusión. La estudiante interpretó el término “bandas en serie” como dos bandas en paralelo muy pegadas y el término “bandas en paralelo” como bandas en paralelo más separadas (Figura 9).

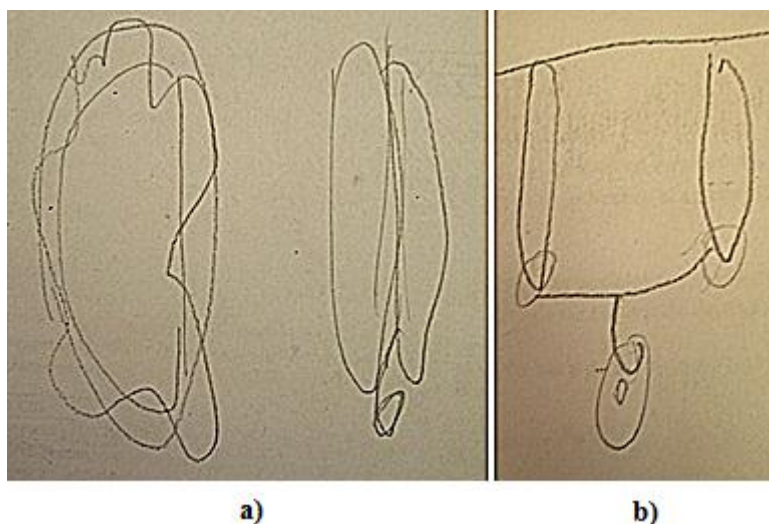


Figura 9. Representación de la estudiante sobre lo que para ella significa a) bandas en serie: dos bandas muy unidas y b) bandas en paralelo: dos bandas más alejadas

En el caso del experimento virtual, este permitió corregir errores en el diseño del *applet*, y pensar en mejoras que permitieran a los estudiantes visualizar el experimento en forma similar a como ocurre en la realidad. Una de las debilidades que la implementación del pilotaje permitió evidenciar fue que inicialmente el *applet* presentaba en la parte inferior de los segmentos que hacían las veces de bandas una figura que representaba el “plato” en el que se suponía debían colocarse los CD, mas no mostraba éstos, de modo que la estudiante interpretó dicha figura como un CD, situación que generó cierta confusión. Este hecho mostró la necesidad de suprimir este elemento y buscar la manera de incluir dentro del *applet* los CD suspendidos de las bandas, al mover el deslizador. También se determinó eliminar la banda sin CD que aparecía en el *applet* puesto que para la estudiante no cumplía función alguna y le generaba confusión (Figura 10).

Asimismo, el pilotaje permitió tener una idea bastante clara acerca de los tiempos de ejecución de cada uno de los experimentos, posibilitando prever en cuántas clases sería posible desarrollar el instrumento. Se evidenció también la necesidad de relacionar en la guía los materiales necesarios para realizar el experimento y cambiar los enunciados que cerraban demasiado las preguntas, lo que de cierta manera condicionaba de antemano las posibles respuestas.

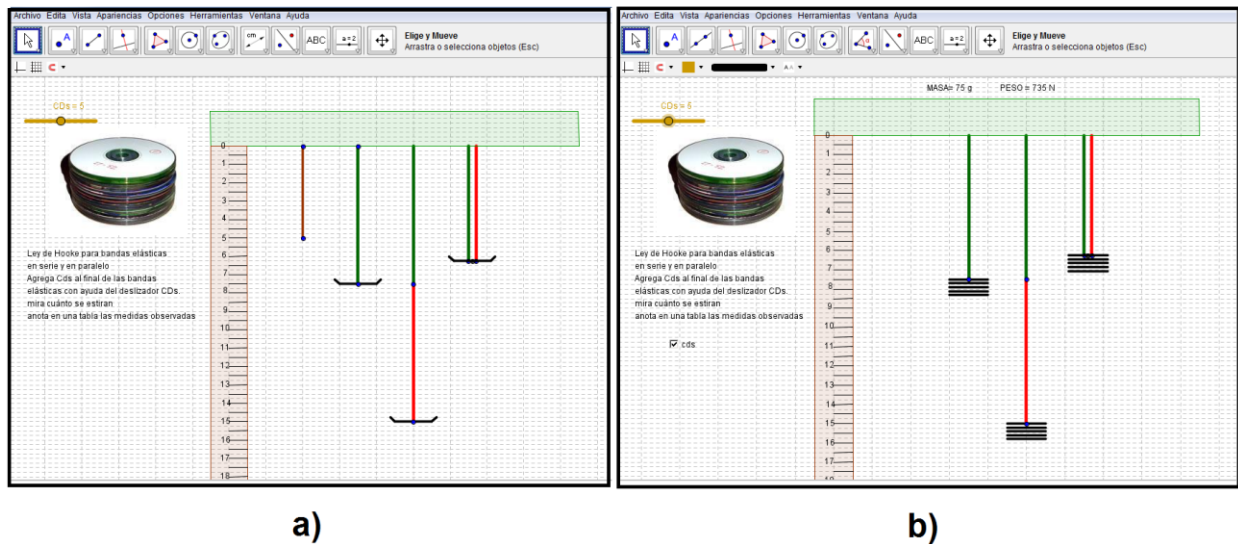


Figura 10. Comparación entre a) el *applet* del pilotaje y b) el *applet* final

La prueba piloto generó pautas para el planteamiento de la matriz de análisis desde la propuesta de Bing y Redish, puesto que a partir de esta se elaboró un cuadro comparativo intentando seguir el modelo de Toulmin, en el que aparecían los datos, la afirmación, los garantes, los recursos y el enmarque epistémico (Tabla 1).

Esta prueba proporcionó los primeros indicios de las posibles formas de argumentación que aparecen en los estudiantes. Es importante tener en cuenta que fue necesario “traducir” ciertas expresiones propias de los estudiantes de los colegios en cuestión, bajo la hipótesis de trabajo de que manejan formas de expresión muy similares. Esto último es una observación producto de la práctica docente de los autores, quienes han laborado en colegios de diferentes localidades de Bogotá.

Es de anotar que al momento de la prueba piloto se optó por la traducción libre “encuadre epistémico” para la expresión inglesa “epistemic framing” usada por Bing y Redish. Esta traducción es la que se utilizó al desarrollar la primera matriz de análisis, pues se desconocía el trabajo de Coleoni & Buteler (2008) en el que se propone “enmarque epistémico” como traducción, siendo esta la que los autores decidieron adoptar finalmente.

Tabla 1. Matriz de análisis obtenida tras la aplicación de la prueba piloto

DATOS	AFIRMACIÓN	GARANTES	RECURSOS	ENCUADRES EPISTÉMICOS
-------	------------	----------	----------	--------------------------

La experiencia indica que las bandas elásticas no se estiran fácilmente con objetos muy livianos.	Un solo CD no estira la banda: “ <i>Un CD no la estira nada</i> ”.	“ <i>El material [de un CD] es ligero... al colocarse [en la banda], solo se tensaba... pero no causaría que el elástico se estirara</i> ”.	Conocimiento básico (incluso intuitivo) de conceptos físicos tales como: el peso, y elasticidad de una banda. Existe una asociación entre el peso y la velocidad de caída de un objeto que se usa como recurso.	Encuadre físico. Noción de elasticidad: qué tanto se deforma un objeto cuando se aplica una fuerza. En el sentido de que el peso es una fuerza y la fuerza es una causa de la deformación. Si una fuerza no es suficientemente grande no puede deformar el cuerpo.
---	--	---	--	---

3.5 Etapa de ejecución

Una vez hechos los ajustes y correcciones al pilotaje de la actividad, se obtuvo la guía final. Se organizó la manera en la que había de ponerse en práctica, se determinaron los mecanismos de registro de la información en concordancia con la naturaleza y objetivos del trabajo, buscando un buen nivel de confiabilidad. Según apuntan Miles & Huberman (1994), una de las condiciones para alcanzar dicho nivel de confiabilidad es realizar una buena recolección de datos, ya que la investigación de tipo cualitativo debe tener en cuenta variables que en otro tipo de investigación serían despreciadas, considerando los detalles mínimos que inciden en los resultados. Atendiendo a esta idea, aunque se recolectan registros escritos, una parte considerable de las actividades del aula para esta investigación se registra mediante la videograbación de las sesiones de trabajo con los estudiantes.

Para el experimento mental, se propuso que la información procediera exclusivamente de los escritos de los estudiantes en razón de que solo interesaba conocer sus ideas previas individuales acerca de la situación. Además, dado el número de estudiantes se hacía poco práctico recolectar un vídeo por cada estudiante, así que se optó por esta forma de presentación.

Se propuso hacer el registro del experimento virtual mediante un software de captura de pantalla en el momento en que cada grupo resolvía la actividad, pues el interés era el de observar cómo se generaban las respuestas y sus respectivos argumentos con base en la simulación y esto se hacía más claro al observar cómo manipulaban el *applet* y cómo desarrollaban las conversaciones entre

pares. Sin embargo, las condiciones administrativas de instalación de software en las instituciones educativas no permitieron que el registro se hiciera de la forma propuesta y finalmente se hicieron videograbaciones grupales de la actividad mediante *tablets* en la IED San Isidro Sur Oriental o celulares de los estudiantes y del profesor en la IED Julio Garavito Armero.

Para el experimento real se propuso realizar una videograbación por cada uno de los grupos, pues el foco de interés son los sistemas de bandas de caucho y CD reales y la incidencia de su manipulación en las respuestas y argumentos.

La etapa de ejecución se desarrolló entre los meses de abril y junio de 2015. Sin embargo, diversas actividades dentro de las instituciones así como dos semanas de paro estatal de docentes retrasaron la culminación de los tres experimentos, pues el experimento mental se realizó antes de dicha situación social, mientras que el experimento virtual tuvo lugar sólo tres semanas más tarde. Esta situación propició en los estudiantes cierta pérdida de familiaridad con los términos usados en el experimento mental.

Aunque se pensó en una socialización y discusión final que involucrara a todos los participantes, las condiciones de tiempo y espacios no lo permitieron dado que en la IED Julio Garavito Armero la clase de física solo se impartía en el primer semestre del año, mientras que la clase de cálculo de la IED San Isidro Sur Oriental, aunque se desarrolló a lo largo del año escolar, estuvo sometida a la premura por cumplir con las responsabilidades propias del plan de estudios. La socialización se redujo entonces a la interacción al interior de los miembros de cada grupo y algunas interacciones esporádicas entre miembros de grupos distintos durante el desarrollo de los tres experimentos.

3.5.1 Experimento mental

La guía definitiva para el experimento mental se muestra en la Figura 11. En una primera parte se detallaban los materiales que debían tenerse en cuenta no solo en el experimento mental sino también en los otros dos y se mostraban los tres sistemas con bandas elásticas sobre las cuales se basa el estudio. Luego se planteó una serie de nueve preguntas (de 2 a 10) de las cuales las primeras buscaban que el estudiante estimara el comportamiento de una banda al colgar sucesivamente desde 1 hasta 10 CD y que se dispusieran estos datos en forma de tabla. La pregunta 5 fue elaborada con el ánimo de que el estudiante realizara algún tipo de generalización a partir de la tabla a la vez que argumentara sobre esta. En la pregunta 6 se pedía una estimación similar para el sistema de dos

bandas en serie y en la pregunta 7 nuevamente se buscaba algún tipo de generalización a partir de la tabla que el estudiante debía construir con sus estimaciones. En las pregunta 8 y 9 se hizo algo similar para el sistema de dos bandas en paralelo. Finalmente, en la pregunta 10 se buscaba que el estudiante realizara una generalización a partir de los tres experimentos. Se indicó a los estudiantes que debían justificar cada una de sus respuestas, con el ánimo de encontrar algún tipo de actividad argumentativa. Esta guía era de carácter individual y no requería ningún tipo de materia prima más allá de la imaginación de cada estudiante.

En el colegio IED San Isidro Sur Oriental, esta primera fase se llevó a cabo en las dos últimas horas de la jornada, después del descanso, entre las 4:10 y las 6:15 pm, tiempo del que debe descontarse un tiempo estimado de 10 a 15 minutos correspondiente a la organización de los estudiantes para iniciar la actividad.

Un primer momento de la clase fue la explicación del docente indicando que la actividad era de una naturaleza diferente a la clase regular y que formaba parte de una secuencia de tres experimentos y especificando la actividad de acuerdo con lo presentado en la guía. Se hizo especial énfasis en que el experimento mental se desarrollara únicamente con base en la imaginación de los estudiantes y que por tanto, muchas respuestas eran posibles.

En el segundo momento los estudiantes recibieron la guía y hojas milimetradas y procedieron a responder las preguntas, llenar las tablas, escribir sus argumentos y construir las gráficas, esto les tomó el resto de la clase. En el transcurso de la actividad algunos estudiantes presentaron algunas dudas. Por ejemplo, preguntaron si en las tablas debía escribirse la longitud total de la banda, pues no tenían claridad acerca del término elongación, siendo resuelta esta duda por el profesor. Otros estudiantes dudaban acerca de la forma de registrar en la tabla la elongación para el caso en que la banda no se elongaba, a lo que el profesor responde que, de acuerdo con la definición de elongación, debe ser cero en este caso. Cuando un estudiante consultó acerca de qué valor debía escribir en la tabla en el caso en que la banda se dañara, el docente respondió que debía escribir el valor que considerara debía tener la elongación aunque no siguiera alguna secuencia en particular y si consideraba que en algún momento la banda se rompía, dejara vacía la casilla o hiciera un trazo horizontal, pero que en todo caso indicara claramente las razones por las cuales tomaba esta decisión.

LEY DE HOOKE PARA BANDAS ELÁSTICAS EN SERIE Y EN PARALELO

TRES TIPOS DE EXPERIMENTOS

ELABORADA POR: CARLOS PABÓN Y FABIAN GALINDO

MATERIALES:

1. CDs.
2. Bandas elásticas aproximadamente de la misma longitud (5 cm) y grosor (1-2 mm) así como del mismo material.
3. Regla.
4. Ganchos clips para sostener los CDs.
5. Hilo para amarrar las bandas o algún elemento que sirva para el mismo efecto.
6. Un soporte para colgar las bandas suficientemente firme.
7. Celular o cámara para tomar algunas fotos y videos de la actividad.
8. Archivo de Geogebra.

Para este taller debe tenerse en cuenta tres disposiciones de las bandas elásticas que se muestran en la figura 1.

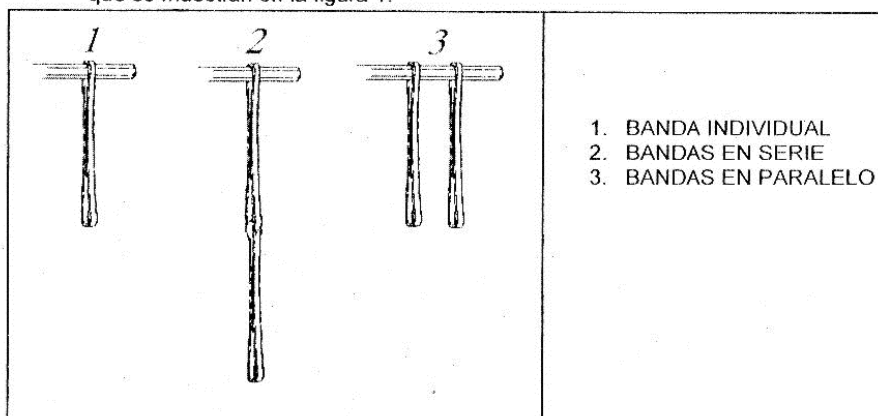


Fig 1. Se muestran tres disposiciones de las bandas para el experimento, en 1 una única banda de la cual pueden suspenderse los CDs, en 2 dos bandas dispuestas en serie, en 3 dos bandas en paralelo de las cuales se suspenden los CDs.

EXPERIMENTO MENTAL (Responda de manera individual)

1. Imagine una banda de caucho y sponga que la cuelga de un gancho o de algún otro objeto fijo (Fig 1. Banda individual).
2. ¿Cuánto estima que se estira (elonga) la banda si se cuelga de ella un CD?
3. ¿Cuánto estima que se elonga la banda al colgar de ella 2 CD?
4. Llene la siguiente tabla con sus estimaciones.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

5. ¿Qué relación observa entre los datos de la tabla?
6. Ahora suponga que se unen dos bandas de idénticas características a la anterior, en serie (Fig 1 Bandas en serie). Elabore la tabla.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

7. ¿Qué relaciones encuentra entre los datos de la tabla?
8. Considere ahora dos bandas idénticas en paralelo (Fig. 1. Bandas en paralelo) y llene la tabla de elongación.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación										

9. ¿Qué relación observa entre los datos de la tabla?
10. Elabore una gráfica cartesiana para cada tabla. ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra para las tres tablas?

Figura 11. Guía aplicada en el experimento mental

Algunos estudiantes alcanzaron a terminar sus gráficas, otros no. A estos se les permitió presentarlas en la clase siguiente. Al final, el profesor recibió el trabajo de cada estudiante y recordó que en la siguiente clase se haría el experimento virtual.

En la IED Julio Garavito Armero, el experimento mental se llevó a cabo en una sesión de 50 minutos después del descanso, entre las 10:30 AM y las 11:20 AM para el curso 1101 y entre las 11:20 y 12:10 para el curso 1102, en un día viernes. El profesor explicó los objetivos de la práctica y la metodología en poco menos de 10 minutos y el tiempo restante fue dedicado por los estudiantes a la realización de las actividades propuestas en la guía. El tiempo efectivo de dicha ejecución fue alrededor de 40 minutos. También se explicó a los estudiantes que el experimento hacía parte de una serie de tres fases en las que se realizarían un experimento virtual y otro real para contrastar las respuestas.

En cada colegio se presentaron dudas por parte de los estudiantes, por ejemplo acerca del término elongación, para lo cual se hizo necesaria la intervención del respectivo profesor, quien leyó la guía y explicó usando otros términos o mediante ejemplos, para que los estudiantes comprendieran mejor en qué consistía tal palabra, teniendo especial cuidado de no influir en la forma personal en la que cada estudiante abordaba el problema, es decir, se intentó al máximo que cada estudiante diera sus propias respuestas al problema sin dar pistas o indicaciones que los condujeran a un enmarque de autoridad dado por el profesor en su calidad de experto.

Concluido el experimento mental también se notó que aunque se propuso la elaboración de gráficas, sobre estas no se planteó ningún tipo de trabajo adicional pues se pensaba que los estudiantes las utilizarían en sus argumentos. Se halló que la mayoría de las gráficas que elaboraron manejaban escalas diferentes, lo que dificultaba establecer comparaciones entre ellas. En conclusión, la elaboración de gráficas no cumplió una función relevante para la argumentación, salvo en casos en que la construcción de las gráficas permitía evidenciar de forma rápida la presencia de alguna idea de linealidad o no linealidad, situación que en general no se presentó pues la mayoría de los grupos no hizo una comparación entre los tres casos, como inicialmente esperaban los profesores. En consecuencia, se determinó no solicitar la elaboración de gráficas en las siguientes fases.

3.5.2 Experimento virtual

Debido a que no fue posible utilizar un programa de captura de pantalla, en el colegio San Isidro Sur Oriental se hizo una primera sesión del experimento virtual usando grabadoras de audio, una por cada grupo para probar esta forma de grabación de los diálogos de los estudiantes. Sin embargo, aunque se explicó su funcionamiento a los estudiantes, solo dos de los grupos dejaron sus diálogos grabados. Además de esto, las grabaciones de audio no permitían la interpretación de algunas afirmaciones y por tanto se hacía necesario observar también las acciones de los estudiantes mediante videograbación.

Por otro lado, en esta sesión de prueba se aplicó una versión del experimento virtual planteada inicialmente pero luego los docentes investigadores llevaron a cabo una reunión en la que se decidió realizar ajustes sustanciales. Así por ejemplo, se observó que en el experimento mental hubo un buen manejo por parte de los estudiantes en la construcción de las tablas y que por tanto no habría un aporte esencialmente nuevo si en el experimento virtual se proponían las mismas tablas, idea presentada inicialmente en la guía y aplicada en la sesión de prueba en el colegio San Isidro Sur Oriental. Se decidió entonces ajustar las tablas del experimento virtual de tal manera que aparecieran otras variables como la masa y el peso y que se consideraran valores incluso por fuera del intervalo abarcado en la simulación, con la intención de que los estudiantes hicieran un trabajo de generalización así como observar los diferentes recursos matemáticos o físicos que ponían en juego.

En el colegio IED Julio Garavito Armero no se hizo esta sesión de prueba con la versión inicial del experimento virtual sino que se aplicó directamente la versión ajustada. La grabación se realizó mediante las cámaras de video de teléfonos celulares. Por otro lado, se requería usar la sala de sistemas que solo puede albergar alrededor de treinta estudiantes en condiciones de espacio reducido. Lo anterior es relevante en tanto que influye en la comunicación que tienen los diversos grupos.

En la versión final de la guía (Figura 12) se propuso llenar una tabla para cada una de las tres situaciones ya presentadas en el experimento mental. Cada tabla contenía cuatro filas correspondientes a las variables número de CD, masa, peso y elongación. En la guía entregada a los estudiantes se indicaba cómo calcular la masa y el peso de los CD aunque el archivo de GeoGebra también los mostraba a medida que se cambiaba el número de CD en el *applet*, usando

el deslizador. Para cada columna de la tabla se proporcionaba el valor de alguna de las variables (no necesariamente dentro del intervalo presentado en la simulación) y los estudiantes debían completar los valores respectivos de las otras tres luego de plantear relaciones entre las variables. Se les solicitaba que explicaran dichas relaciones y dieran una justificación de las afirmaciones que emitían en cada una de las situaciones del problema con el fin de identificar los argumentos emergentes en los estudiantes (dos preguntas al final de la guía).

EXPERIMENTO VIRTUAL (En grupos de 3 o 4 personas)

Abran el archivo de Geogebra "Ley de Hooke para bandas elásticas en serie y en paralelo". El archivo simula la banda de caucho individual, las dos bandas en serie y las dos en paralelo. Se puede cambiar el número de Cds usando el deslizador.

Asuma que la masa de un Cd es 15g. El peso se halla multiplicando la masa por la aceleración de la gravedad terrestre $g=9.8m/s^2$ de manera que 1 CD tiene un peso de: $P=0.0015Kg \cdot 9.8m/s^2 = 0.147 \text{ N}$ (newton "N" es la unidad que resulta de multiplicar kilogramos por la unidad de aceleración)

Utilice el applet en cuanto sea posible para completar las siguientes tablas-. Explique.

No. CDs			8	9				
Masa (g)					90	105		
Peso (N)	0.147	0.735						
Elongación (cm)							25	30

Con una banda.

No. CDs							25	30
Masa (g)			45	135				
Peso (N)					1.176	1.47		
Elongación (cm)	14	16						

Con dos bandas en serie.

No. CDs			6	7				
Masa (g)	45	75						
Peso (N)							2.94	4.41
Elongación (cm)					6	9		

Con dos bandas en paralelo.

¿Se puede predecir la elongación de las bandas para un número dado de CDs? ¿Cómo se calcularía su valor?

¿Se puede predecir la elongación de las bandas dada la masa? ¿Cómo se calcularía su valor?

¿Qué relaciones encuentra entre las elongaciones de las tres tablas?

Figura 12. Guía para el experimento virtual

La versión definitiva del experimento virtual tomó dos sesiones de clase de cincuenta minutos cada una. Como se indicó anteriormente, en la actividad se proporcionó a cada grupo el *applet* de GeoGebra diseñado por los docentes en el que se simulaba el comportamiento elástico de las tres situaciones (banda individual, dos bandas en serie, dos bandas en paralelo).

La Figura 13 muestra cuatro vistas diferentes del *applet*, obtenidas al manipular el deslizador, simulando el cambio en el número de CD en los tres sistemas.

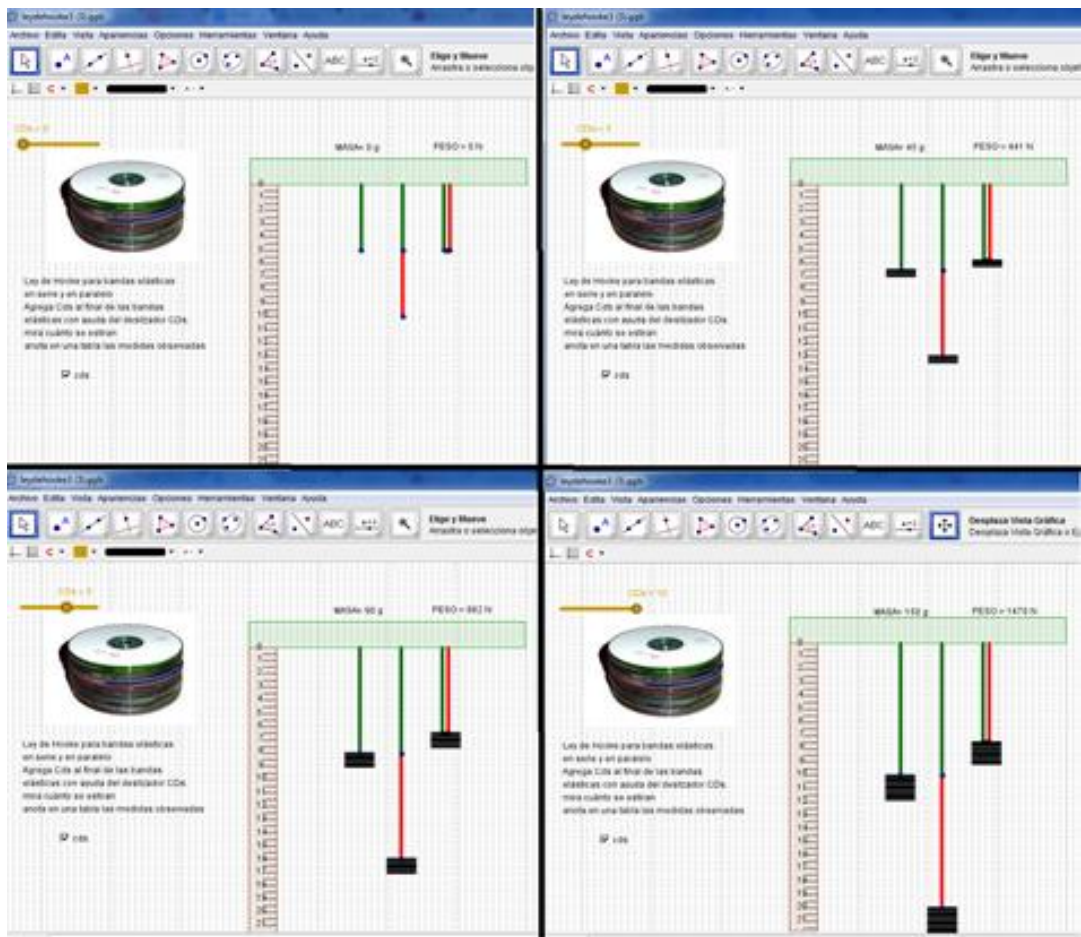


Figura 13. Efecto del deslizador en el *applet* de GeoGebra

El experimento virtual en el colegio San Isidro Sur Oriental tuvo lugar en el salón de Matemáticas, en el último bloque de clases, entre las 4:40 y las 6:10, lapso del que se debe descontar el tiempo de ingreso al salón de algunos de los estudiantes y el tiempo para dar las indicaciones y entregar los materiales (alrededor de 15 minutos para organizar los equipos). Como cada salón está organizado por mesas, en general los miembros de cada grupo fueron los mismos compañeros de mesa, es decir, una característica de estos grupos fue la afinidad o amistad entre sus miembros. En

cada mesa se entregó una guía, un computador portátil y una *tablet*. Se les indicó que resolvieran la guía conforme a las observaciones que hicieran del *applet*. Dado que los estudiantes, en su mayoría desconocían el programa Geogebra, fue necesario explicar algunos aspectos relevantes para el manejo del *applet*. Algunos estudiantes tuvieron dificultades al completar las tablas pues les costaba inferir valores que no aparecieran en la simulación. Sin embargo, según fueron encontrando regularidades pudieron avanzar con mayor seguridad. Otros, olvidaron guardar las videograbaciones en la memoria de las *tablets*. Esto obligó a que algunos de ellos tuvieran que realizar de nuevo el experimento. Lo anterior tuvo como consecuencia que para algunos grupos el experimento virtual se desarrollara en dos clases y no en una como estaba previsto.

En algunos casos, los estudiantes presentaron dudas acerca del término elongación, siendo recordado por el docente lo que ya se había explicado al respecto. La mayoría de los grupos se apoyaron en un elemento adicional (regla, hoja, etc.) para tomar la medida de la longitud de la banda en la pantalla del computador, dado que las líneas punteadas que se presentaban en el *applet* no les permitían identificar con precisión dicha medida. Solo uno de los grupos solicitó al profesor ayuda para usar la herramienta *zoom* de GeoGebra y así, no usar un elemento adicional.

Aunque en principio se propuso que la actividad se realizara sin acudir a ninguna fuente diferente de sus observaciones del *applet* en la pantalla, algunos estudiantes registraron ciertos datos con base en las tablas diligenciadas en la sesión de prueba que, como ya se indicó, no coincidían. Sin embargo, el docente no interfirió en esta decisión, la cual se evidencia en una de las videograbaciones.

Al final de la clase, el docente recibió los escritos de los estudiantes y les indicó que en la clase siguiente se llevaría a cabo el experimento real y que quienes no alcanzaron a terminar, lo harían en los primeros minutos de la clase siguiente.

En la IED Julio Garavito Armero el experimento virtual se realizó de forma similar a la que se hizo En la IED San Isidro Sur Oriental, salvo algunas diferencias de tiempo y espacio que pasan a detallarse en seguida. El experimento virtual se realizó un día viernes después del descanso entre las 10:30 AM y las 11:20 de la mañana para el curso 1101, el desplazamiento y organización tomó alrededor de 10 minutos y el espacio de trabajo utilizado fue el aula de sistemas, en los computadores de escritorio se repartieron los estudiantes en grupos de dos a tres personas por computador, quedando algunos estudiantes solos en su computador pero siempre cercano a un

estudiante de su grupo. Para el curso 1102, el espacio de trabajo y distribución de computadores fue el mismo, la actividad fue realizada entre las 11:20 y las 12:10. El tiempo de organización fue similar al del otro curso. Al igual que en la otra institución, hubo necesidad de explicar algunos aspectos relevantes de GeoGebra para el manejo del *applet*. La información se recogió con la ayuda de tres celulares, así como de los instrumentos escritos. El profesor pasó por cada una de las mesas de trabajo para dar indicaciones mínimas, sobre todo en lo referente al término elongación que fue necesario explicar varias veces.

Terminado el experimento virtual se realizó una nueva reunión de los docentes investigadores para hacer los ajustes pertinentes a la guía del experimento real.

3.5.3 Experimento real

Los estudiantes, reunidos en grupos de 3 o 4 estudiantes, llevaron a cabo el experimento real usando bandas de caucho y CD reales que fueron algunos llevados por ellos al aula o proporcionados por los respectivos docentes.

La guía (Figura 14) solicitaba diligenciar una tabla para cada uno de los sistemas en juego según la elongación de las bandas al aumentar el número de CD desde 1 hasta 10, de acuerdo con la medida tomada por los estudiantes. Esto con el objeto de observar las estrategias matemáticas o físicas que presentaron al momento de medir las elongaciones y registrar los respectivos valores en las tablas. Además incluía espacios para registrar la masa y el peso de los CD para ver si identificaban la diferencia entre estas dos magnitudes, asumiendo una masa individual de 15 g. Estas medidas no fueron tomadas por los estudiantes de forma experimental puesto que no se contaba con una balanza en el aula de clase. No obstante, la masa promedio de un CD, según medidas externas realizadas por los autores, es $15,0 \pm 0,5$ g.

Al final de la guía se formularon algunas preguntas que pedían a los estudiantes proporcionar valores de elongaciones, masas y pesos en determinados casos, algunos fuera del intervalo en que se desarrollaron las mediciones, para observar el uso de ciertas operaciones y las respectiva asociación con las tablas anteriores, así como la relación entre las unidades de medida.

De igual manera, se formularon preguntas acerca de las relaciones entre los tres tipos de experimentos para observar el cambio conceptual y algún tipo de argumentación (preguntas 1, 2, 4 y 5). Es preciso aclarar que por error se solicitó en el texto de esta guía la elaboración de gráficas,

ante lo cual los docentes indicaron a los estudiantes que no era necesario debido a que, por un lado, las limitaciones de tiempo no lo permitían y, por otro lado, se había decidido no incluir dicha actividad dentro de los experimentos virtual y real, como ya se señaló en el apartado 3.5.1.

EXPERIMENTO REAL (En grupos de 3 o 4 personas)

Repita con sus compañeros el procedimiento pero esta vez con bandas de caucho y CDs reales, llene las tablas respectivas y realice la respectiva gráfica cartesiana. En cada caso discutan lo sucedido y escriban sus conclusiones.

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Masa										
Peso										
Elongación										

Con una banda

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Masa										
Peso										
Elongación										

Con dos bandas en serie

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Masa										
Peso										
Elongación										

Con dos bandas en paralelo

Respondan las siguientes preguntas acorde a sus resultados:

1. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre el experimento virtual y el real?
2. ¿A qué atribuyen las diferencias?
3. ¿Cuánto cree que sería la elongación para cada uno de los siguientes casos? Justifique cada una de sus respuestas.
 - a. 25 CDs
 - b. 50 CDs
 - c. 450 g.
 - d. 1200 g.
 - e. 20 N.
 - f. 45 N.
4. ¿Creen ustedes que el applet se ajusta al experimento real? Justifiquen
5. Una vez realizadas las tres fases del experimento (mental, virtual y real) ¿encuentran ustedes una relación matemática entre peso y elongación? ¿cuál?

Figura 14. Guía para el experimento real

En el colegio San Isidro Sur Oriental, fueron necesarias aproximadamente dos sesiones de clase para realizar el experimento real, puesto que les tomó bastante tiempo tomar las medidas con cierto grado de precisión y algunos grupos iniciaron la primera sesión de clase con la terminación del experimento virtual.

Las dos sesiones tuvieron lugar en el mismo horario en que se desarrollaron los experimentos mental y virtual.

El docente proporcionó diez CD y tres bandas de caucho a cada grupo y dejó a disposición de todos los grupos algunos ganchos clip, ganchos mariposa, hilo (como posible método de unir las bandas en serie). Algunos estudiantes tenían dudas acerca de cómo medir la longitud natural de la banda individual pero el docente permitió elegir el valor que ellos consideraran más pertinente.

En la IED Julio Garavito Armero el experimento real se realizó un día miércoles en una sesión de 1 hora y 10 minutos para cada curso en circunstancias muy similares a las realizadas en el otro colegio, se usó el laboratorio de física y química en el que se encuentran mesas en las que deben ubicarse mayor cantidad de estudiantes lo que resultó en la combinación de algunos de los grupos del experimento virtual. Es decir, los grupos pasaron de ser grupos de dos a tres estudiantes a ser grupos de cuatro a cinco estudiantes, situación que generó cierto grado de socialización distinto al de la otra institución. Por lo demás se siguieron los mismos lineamientos que se usaron en la IED San Isidro Sur Oriental, en particular, se tuvo especial cuidado de no influir demasiado en las construcciones epistémicas de los estudiantes. Aunque fue inevitable mediar en algunos aspectos referentes al contenido y la forma de interpretar la guía (no se excluye totalmente al investigador como participante). Los estudiantes, al igual que los de la otra institución, usaron elementos que estaban a la mano para implementar los diferentes sistemas de estudio. En todo caso, el docente no influyó en la forma en que cada grupo ideó tal implementación.

Finalizado el experimento real los docentes se reunieron de nuevo para tratar la posibilidad de una socialización conjunta entre los grupos de las dos instituciones. Sin embargo, las condiciones administrativas no lo permitieron. En la IED San Isidro Sur Oriental, circunstancias particulares de cumplimiento del plan de estudios propuesto en el campo, no permitieron llevar a cabo la socialización final inicialmente propuesta. En el caso de la IED Julio Garavito Armero, en la que la clase de física solo se impartió en el primer semestre del año, el tiempo no permitió llevar a cabo dicha socialización, Por lo anterior, esta se descartó. A cambio, se propusieron las preguntas de discusión al final de la guía en torno a la relación entre los tres experimentos, a manera de conclusión, pues de antemano se tenían dudas acerca de si podía llevarse a cabo la socialización final, dadas las condiciones ya descritas.

3.6 Etapa de análisis

Las herramientas teóricas en que se basó el análisis de los procesos argumentativos de los estudiantes fueron las propuestas por Bing & Redish (2008), es decir, los enmarques epistémicos, así como la noción de recursos metacognitivos que presentan Coleoni & Buteler (2008), ya descritas en el capítulo 4. Cabe recordar que estas herramientas se encuentran inmersas en el modelo RF ya descrito, que corresponde a un enfoque cognitivo, tal como lo menciona Bing (2008), quien anota que el enfoque sociocultural y el enfoque cognitivo no tienen por qué ser mutuamente excluyentes sino que son complementarios, pero que el investigador debe hacer una elección natural dependiendo de si va a estudiar el grupo humano que aprende como un sistema o al individuo y sus propias formas de pensamiento y aprendizaje aunque se encuentre inmerso en un entorno social. Bing expresa esto con una metáfora, en el enfoque sociocultural es importante el fondo (el ambiente social, las herramientas, los usos y otros factores que afectan el aprendizaje) y su relación con el personaje, mientras que un enfoque cognitivo (en el que se puede ubicar el modelo RF) se centra en el personaje, el primer plano. En este trabajo se eligió la segunda mirada o enfoque puesto que el interés de los autores es observar la forma de construcción del conocimiento en cada uno de los estudiantes que hicieron parte del estudio.

En este estudio, como en cualquier otro, no toda la información recogida es relevante o cumple con los requisitos mínimos para el análisis. En aras de entender la construcción epistémica de cada uno los estudiantes era necesario contar con una información suficiente. Una dificultad a este respecto tuvo que ver con que algunos estudiantes presentaron ausencias en alguna de las tres fases experimentales en la respectiva institución y esto incidió en que los grupos que se formaron en el experimento virtual no se hubieran mantenido constantes para el experimento real. En consecuencia, se determinó que el conjunto de datos para el análisis debía reducirse o filtrarse teniendo en cuenta algunos criterios básicos de completitud y pertinencia en el desarrollo de los experimentos. Estos criterios pueden resumirse como sigue:

- Los documentos escritos presentaban la resolución de la mayor parte de cada guía: se había llenado todas las tablas y justificado adecuadamente la mayoría de las preguntas.
- Los videos realizados daban cuenta de aspectos relevantes para la investigación tales como: frases, acciones, gesticulación o cualquier otro rastro que indicara una postura frente a alguna idea clave para el aprendizaje.

- Calidad y confiabilidad de las videograbaciones. Hubo que descartar algunas puesto que el sonido o el mal enfoque de la cámara no permitía determinar lo que estaba ocurriendo en los diferentes grupos.
- La inasistencia de algunos de los estudiantes determinó la incompletitud de algunos documentos y videos.

Después de la recolección y filtrado de los documentos y vídeos se procedió a la lectura de los mismos. Mediante matrices o cuadros comparativos, se buscó analizar los argumentos de los estudiantes en cada una de las fases o experimentos, identificando sus elementos de acuerdo con el modelo de Toulmin para extraer lo más claramente posible los garantes y con ellos identificar los enmarques epistémicos asociados.

El registro de datos en las matrices pasó por un proceso de lectura de las respuestas de los estudiantes, plasmadas en las guías de los diferentes experimentos, así como de la escucha detenida y analítica de las videograbaciones. El objetivo de este trabajo fue el de seleccionar los segmentos que a juicio de los autores eran relevantes por su contenido argumentativo. De esta manera, segmentos de video que fueran defectuosos y cuyo audio fuera de baja calidad o que simplemente no contenían idea alguna relevante desde el punto de vista argumentativo, fueron descartados para el proceso de análisis. Asimismo, los segmentos escritos que no tuvieran la característica de ser respuestas argumentadas sino simples afirmaciones, descontextualizadas en algunos casos, también se descartaron. De esta manera, solamente algunas de las respuestas fueron transcritas directamente en la primera matriz y reubicadas en las matrices posteriores, producto de varios intentos de organización conveniente de la información para el análisis, con base en el marco teórico del presente trabajo.

La primera matriz aplicada a las respuestas de los estudiantes es mostrada en la Tabla 2.

Tabla 2. Primera matriz de análisis considerada

DATOS	AFIRMACIÓN	GARANTES	RECURSOS	ENMARQUES
Un CD no pesa mucho para estirar banda, CDs pesan más	La banda se elonga una cierta cantidad con el primer CD, a partir del segundo	La banda se elonga más cuando se suspende de ella más peso.	Según la experiencia, las bandas elásticas no se estiran fácil con objetos muy livianos.	Enmarque físico dado por la experiencia cotidiana con bandas elásticas

CD se elonga más.	Existe una relación entre las cantidades peso y elongación.
-------------------	---

Luego de diligenciar este tipo de matriz con la información recogida de un grupo de cada institución educativa, se evidenció que, dada la naturaleza de la tarea que involucra conceptos de la física y apreciaciones personales y propias del contexto, los estudiantes no siempre presentaron argumentos con una estructura acorde al modelo de Toulmin. Por otro lado, este tipo de matrices no permitía una comparación y clasificación adecuada de los recursos con sus correspondientes citas textuales, así que debió hacerse un intento de análisis más detallado de la columna de recursos. Las citas textuales son en este caso relevantes para aclarar el tipo de interpretación que los autores dan a las respuestas de los estudiantes y obtener así un análisis más confiable.

Se procedió a desarrollar una codificación para los datos obtenidos, dichos datos eran concretamente todos los escritos de los estudiantes incluyendo las guías con las tablas diligenciadas, hojas adicionales con respuestas a las preguntas formuladas en la guía y hojas milimetradas para las gráficas en el caso del experimento mental, así como las diferentes videograbaciones obtenidas de cada grupo de trabajo en el caso de los experimentos virtual y real.

Dadas las dificultades encontradas al aplicar el primer tipo de matriz, se optó por una segunda, como la presentada en la Tabla 3.

Tabla 3. Matriz de análisis que involucra tipos de recursos epistémicos

Descripción del vídeo.	Recursos Sobre Física	Recursos sobre Matemáticas	Recursos físicos y matemáticos conjuntamente	Observaciones	Posibles categorías.
EVS1 (2:55 a 6:25) La estudiante escribe en la tabla los diferentes valores de peso y masa, mientras realiza operaciones en la hoja.	Los conceptos de masa y peso y sus unidades de medición	El recurso suma (escrita) para calcular la masa de 8 CD el caso de 10 CD hizo la multiplicación 15 por 10 usando el algoritmo largo.	Uso y distinción de las unidades de masa y peso según el <i>applet</i> .	Aunque efectúa los cálculos, los compara con los de la sesión de prueba.	El recurso matemático multiplicación está débilmente ligado, pues no se usa en todos los casos en que sería conveniente hacer, en cambio sí se usa la suma.

Este tipo de tabla dejaba de lado los elementos del modelo de Toulmin y se concentraba en los recursos matemáticos, físicos y aquellos de tipo físico-matemático en búsqueda de posibles categorías de análisis partiendo de las observaciones de dichos recursos al aplicar la tabla a los diferentes grupos. Sin embargo, esta matriz a juicio de los autores, resultaba poco práctica pues dificultaba la búsqueda de regularidades y no se logró encontrar categorías más adecuadas que las que describen Bing y Redish. Asimismo, la columna añadida para las evidencias no permitía tener a mano las citas de los estudiantes para su análisis directo. Se consideró que se requería de un tipo de matriz más compacta y se probó con la que muestra la Tabla 4 en la que aparece un ejemplo de los recursos que presentó la estudiante Kilarith, aunque se hizo lo mismo con cada uno de los estudiantes del grupo.

Tabla 4. Matriz que involucra los recursos epistémicos de un grupo de estudiantes

GRUPO 1: Recursos Experimento Mental	
Recursos matemáticos	Recursos físicos
<p>Kilarith:</p> <p>Proporcionalidad lineal. Para una banda escribe una sucesión aritmética de razón 5mm. La linealidad se pierde a partir del quinto CD, en el sistema en serie. En este la elongación es mayor que el primero.</p> <p>Para el sistema en paralelo estima una menor elongación que en la primera, pero en la sucesión no se observa linealidad.</p> <p>Usa números decimales en sus estimaciones pero tiene dificultades al representarlos pues escribe $\frac{4}{5}$ cuando quiere decir 4,5.</p> <p>Usa predominantemente los cm como unidad de medida, pero en la tercera tabla, en la que las elongaciones son muy pequeñas, involucra mm y la unidad equivalente a la décima parte del centímetro (que el grupo representó con mcm)</p>	<p>Para las bandas en paralelo se detecta una idea de distribución del peso.</p> <p>Existe una confusión entre las medidas de peso y longitud.</p> <p>No están fuertemente ligados los recursos de peso y longitud a sus definiciones. Sin embargo, fue más acertada que sus dos compañeras en lo relativo a la relación entre las tres situaciones, pues imaginó que para el sistema en serie las elongaciones eran mayores que en el caso de la banda individual y estas a su vez, mayores que en el caso de las bandas en paralelo.</p>

Esta es una matriz compacta porque abarca todo el experimento mental de cada uno de los integrantes de un grupo completo a diferencia de los ejemplos anteriores que permitían tener la visión solo de un argumento. Pese a esto, y luego de leer a Perea & Buteler (2014) los autores consideraron pertinente que también los enmarques epistémicos deberían hacer parte de las matrices de análisis. Así, se determinó trabajar en una matriz como la que se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. Última versión de la matriz de análisis

Enmarques epistémicos. Indicios o indicadores	Evidencias	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	de Cita <i>Respuestas de los estudiantes</i>
Mapeo físico. Descripción del cambio que ocurre en el fenómeno físico de una a dos bandas.	EMSE1 EMSE2 EMSE3	Recurso físico de distribución del peso (se da en el paso del sistema de una banda individual a los sistemas en serie)	Ingrid: Sistema de dos bandas en serie: “La elongación es menor ya que el CD en este caso es sujetado por 2 bandas del mismo grosor y peso las dos. El hecho de que el Cd esté sujeto por más bandas quiere decir que la elongación por banda disminuye ya que es menos peso para cada banda”

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm

En esta última versión de la matriz se pueden evidenciar el enmarque epistémico identificado, las citas textuales de los estudiantes con su correspondiente evidencia y los recursos identificados.

El análisis del instrumento se realizó con un modelo de macro matriz en la que se organizaron las matrices de análisis de los cuatro grupos en sus tres fases (Figura 15), con el fin de analizar las regularidades, similitudes y diferencias de los diversos razonamientos, argumentos, recursos, entre otras. La macro matriz fue analizada en forma horizontal para observar y comparar las formas de pensar de los cuatro grupos acerca de cada experimento y de forma vertical para analizar los cambios que se presentaron al cambiar de contexto experimental.

El orden de los grupos seleccionadas para el análisis fue el siguiente:

El Grupo # 1 estaba conformado por tres estudiantes: Ingrid, Paola y Kilarith de la IED SISO. El grupo # 2 estaba integrado por Enrique, Laura, Valentina y Sharon de la IED JGA. El Grupo # 3 estaba integrado por Gelen, Paula y Camila de la IED SISO. El grupo # 4 estaba conformado por las estudiantes Yeimi, Verónica y Mary Luz de la IED JGA.

GRUPO 1 EXPERIMENTO MENTAL	GRUPO 2 EXPERIMENTO MENTAL	GRUPO 3 EXPERIMENTO MENTAL	GRUPO 4 EXPERIMENTO MENTAL
GRUPO 1 EXPERIMENTO VIRTUAL	GRUPO 2 EXPERIMENTO VIRTUAL	GRUPO 3 EXPERIMENTO VIRTUAL	GRUPO 4 EXPERIMENTO VIRTUAL
GRUPO 1 EXPERIMENTO REAL	GRUPO 2 EXPERIMENTO REAL	GRUPO 3 EXPERIMENTO REAL	GRUPO 4 EXPERIMENTO REAL

Figura 15. Macro matriz de análisis con la que se plantea la lectura vertical y la lectura horizontal de los tres experimentos

Como lo señalan Bing & Redish (2008), es posible identificar un enmarque epistémico mediante los garantes de los argumentos generados por los estudiantes. En este sentido, una tarea fundamental en el análisis de la actividad consistía en la identificación de argumentos, tarea que fue llevada a cabo desde el inicio del proceso de análisis pero que requería de una interpretación adecuada para organizar dichos argumentos en la estructura propia del modelo de Toulmin.

Un elemento clave para detectar y presentar los argumentos de los estudiantes fue tener en cuenta que su lenguaje no era el mismo que el de un experto, se requería entonces hacer una traducción que complementara tal lenguaje, esa traducción dependía del tiempo de contacto de los estudiantes con sus profesores lo que permitió ese reconocimiento del uso de las palabras. Un ejemplo de esto es el argumento en el escrito de Camila cuando, en relación con el sistema en paralelo, afirma que “se disminuye el peso” (Ver Anexo 7, fila 3), dejando incompleta la idea en la frase, situación muy recurrente entre los estudiantes. Solo el contexto particular de la pregunta permitió a los docentes interpretar que lo que quería decir era “disminuye el peso soportado por cada banda”. Asimismo, cuando escribió, para el mismo sistema, “... haciendo que quede más o menos por la mitad de los

pesos de la primera tabla”, la estudiante incurrió en una imprecisión lingüística más que conceptual, puesto que en ninguna tabla para este experimento se hacía referencia a pesos y la estudiante en otra respuesta mostró cierto conocimiento de la diferencia entre peso y masa. En este caso, los docentes interpretaron que la estudiante se refería a la elongación de la banda para cada peso.

En algunos casos, esta traducción ha sido puesta a prueba mediante la discusión dialéctica entre los autores quienes adoptaron como método fundamental la contraposición de ideas acerca de las observaciones realizadas. Un ejemplo de este hecho está dado por la secuencia de elongaciones presentada por Paola en el experimento mental, cuando se le planteó el sistema de dos bandas en paralelo y la estudiante presentó una tabla en la que los valores de las elongaciones aumentaban solamente al momento de incrementar el peso en dos CD. Uno de los docentes, remitiéndose exclusivamente a la tabla, consideraba que con esta secuencia, de manera precipitada e incorrecta, la estudiante intentó explicar que las bandas no se elongaban igual que en el caso de la banda individual sino más “lentamente”, idea que partió de la premisa de que la estudiante entendió bien la disposición de las dos bandas en paralelo. Por su parte, el otro docente se remitió al dibujo incluido por Paola en el escrito, en el cual a cada banda le escribió un valor de elongación, así como parte de su respuesta en la se refiere a que en este sistema “los dos CD pesarán igual”, lo que le permitió (lo mismo que al primer docente) interpretar finalmente que la estudiante estaba razonando correctamente pero no había comprendido la estructura del sistema en paralelo, puesto que pensaba que consistía en colgar un CD de cada una de las bandas de manera independiente (Anexo 1, fila 4).

Luego de identificar un argumento era preciso elaborar una estructura del mismo, siguiendo el modelo de Toulmin. Este proceso también pasó por una discusión entre los docentes, quienes contraponían sus ideas para establecer una disposición adecuada de los elementos de que consta el modelo. Un ejemplo de este último caso es la siguiente discusión sobre el argumento escrito de la estudiante Ingrid, en el experimento mental, en el caso de una banda individual.

Ingrid (escrito): *“En la tabla, la elongación del caucho aumenta dependiendo de la cantidad de CD que se vayan agregando. Por ejemplo: si un CD pesa 10 g y la banda se estira 5 mm y se agrega otro CD del mismo peso entonces la banda se elongará el doble, es decir 10 mm, ya que el peso pasó de 10 g a 20 g”*

Carlos: *“¿este sí será un argumento?”*

Fabián: “*Sí, puesto que hay una secuencia lógica del tipo ‘si P entonces Q’*”

Carlos: “*¿pero esto sí es un argumento de tipo Toulmin? ¿Cuáles serían los datos y cuál es la afirmación?*”

Fabián: “*En este caso P: ‘un CD pesa 10 g y la banda se estira 5 mm y se agrega otro CD del mismo peso’. Serían los datos*”.

Carlos: “*En parte sí son los datos, pero entonces, ¿cuál es la afirmación? ¿Solamente el enunciado Q: ‘entonces la banda se elongará el doble, es decir 10 mm ya que el peso pasó de 10 g a 20 g’?* [Refiriéndose literalmente a la afirmación de la estudiante, quien usa indistintamente peso y masa]. *Hay algo más que eso.*”

Fabián: “*Pues en el fondo está la idea de que al agregar el doble de peso se obtiene el doble de elongación*”

Carlos: “*La idea de proporcionalidad.*”

Fabián: “*Ese es un respaldo*”

Carlos: “*Ese es más bien el garante*”

Fabián: “*¿y entonces cuál sería la afirmación?*”

Carlos: “*Lo que debería sustentar la proporcionalidad es que si se aumenta el número de CD aumenta la elongación*”

Fabián: “*Pero ella incluyó el peso del CD, así que está considerando que: ‘cada CD pesa igual, 10 gramos’* [lo que considera la estudiante]”

Carlos: “*Entonces estos son como los datos*”

Fabián: “*¿Para afirmar qué?*”

Carlos: “*Que si se agrega otro CD del mismo peso, la banda se elongará el doble*”

Fabián: “*La estimación que ella hace son los datos*”

La estructura tipo Toulmin del argumento de Ingrid, obtenida a partir de esta discusión, se muestra en la Figura 16.

Es importante anotar que incluso para la elección de las secuencias lógicas de pensamiento que debían ir en la matriz se dio una discusión entre los autores, a veces más extensa que la anterior. También surgieron discusiones al respecto de si ciertas acciones podían ser constituidas como garantes en el caso del ejercicio experimental que llevaba a cabo el estudiante, a pesar de no estar presente un argumento en forma verbal o escrita. Como se evidencia más adelante, la respuesta a esta discusión fue que algunas acciones se constituían en garantes del quehacer experimental, de modo que los garantes no se evidenciaban solamente a través de frases (explícitas o implícitas) sino también a través de movimientos o gestos.

4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Este capítulo consta de tres partes. En la primera se describen los aspectos que deben tenerse en cuenta para la comprensión de las decisiones tomadas por los autores al analizar los datos obtenidos a través de la matriz. En la segunda parte se hace la lectura horizontal detectando a la vez argumentos y enmarques presentes (tipos de recursos desde la perspectiva de Bing y Redish) para cada una de las tres fases experimentales y en la tercera parte se hace una lectura de lo que ocurrió en cada uno de los grupos al cambiar de experimento (lectura vertical).

4.1 Aspectos generales a tener en cuenta

A partir de la macro matriz se encontraron ciertos rasgos característicos tanto del proceso argumentativo de los estudiantes como del uso o la formación de diversos recursos epistémicos de los mismos. Las evidencias observadas no se limitaban al lenguaje verbal, oral o escrito sino a los gestos y acciones, así como a la forma de emplear las herramientas que los estudiantes tuvieron a su disposición para elaborar las tareas requeridas, que quedaron registradas en los diferentes vídeos. Así por ejemplo, los estudiantes usaron los elementos provistos por el profesor para el montaje del experimento real y buscaron sus propios métodos para disponer cada uno de los tres sistemas, algunos grupos usaron ganchos clip para sostener los CD, otros usaron pitillos o incluso una banda de caucho adicional, algunos sostuvieron las bandas de caucho con la mano, otros usaron un bolígrafo o lápiz. Para unir las bandas en serie algunos grupos hicieron un nudo con las dos bandas, otros usaron un caucho adicional para amarrarlas o el hilo proporcionado por el docente. Estas características particulares de la forma en que construyeron el experimento real o de cómo usaron las herramientas en el experimento virtual constituyeron evidencias de la existencia de ciertos recursos epistémicos, así como de algunos elementos de confianza que conformaron el respaldo de sus acciones o de sus garantes en el modelo argumentativo de Toulmin.

4.2 Lectura horizontal de la matriz

4.2.1 Análisis del experimento mental

En el experimento mental, al aplicar el método de la macro matriz y realizar una lectura horizontal, es decir, al comparar los diferentes grupos, se encontró que la mayoría de las tablas para el sistema de una banda individual se llenaron recurriendo a sucesiones lineales (Anexos 1, 4, 7 y 10), a partir

del supuesto de que cada CD pesaba lo mismo que cualquier otro (excepto en el caso de una estudiante). En la Figura 16 se muestra un argumento de este tipo expuesto por la estudiante Ingrid del grupo # 1 del colegio SISO.

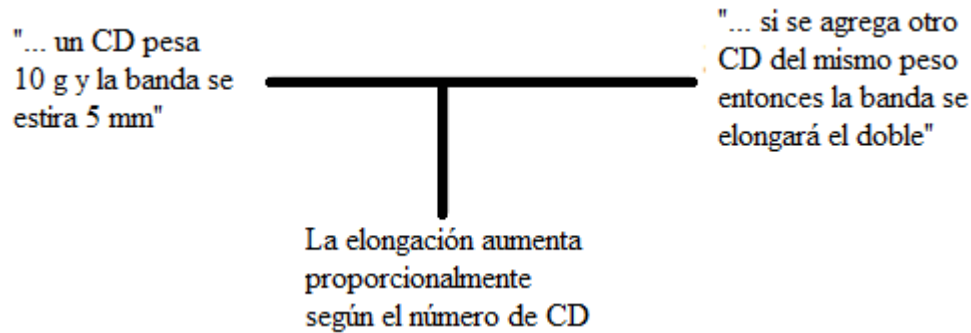


Figura 16. Argumento de Ingrid en el experimento mental (proporcionalidad entre la elongación y el número de CD)

El garante de este argumento mostró el uso de un recurso puramente matemático de cálculo, cercano a la proporcionalidad lineal, por lo tanto se evidencia un enmarque de cálculo (siguiendo a Bing y Redish), pues a pesar de que usó en alguna medida la idea de peso del CD, lo que garantizaba la afirmación y su conexión con los datos era la idea de proporcionalidad.

Un rompimiento con la linealidad que se observó en algunos estudiantes tuvo lugar en el caso de la elongación para el primer CD considerado en la tabla, pues existen *p-prims* (recursos intuitivos ya mencionados en el marco teórico) que los indujo a pensar que la primera elongación era diferente de las demás. En algunos casos se llegó a la estimación de que el primer CD estiraba la banda menos que los demás, obteniéndose una progresión aritmética cuya razón es diferente del término inicial (por ejemplo, véase el Anexo 4, fila 1, respuestas de Enrique).

La estudiante Sharon, en cambio, argumentó que el peso del gancho era importante para llenar la tabla, no bastaba con considerar solamente los CD. Su argumento se esboza en la Figura 17.

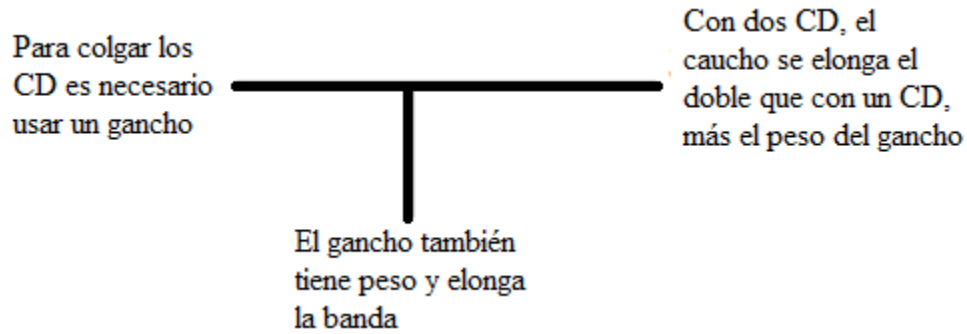


Figura 17. Argumento de Sharon en el experimento mental (el gancho también elonga la banda)

Se identificó un enmarque de mapeo físico dado que el garante estaba relacionado con la idea de un peso adicional, es decir el del gancho, que se consideraba suficiente para elongar la banda. Este garante sustentó el hecho de que la tabla no presentaba una sucesión lineal sino una progresión aritmética en la que el primer término es mayor que la razón (obsérvese que en otros casos, el valor inicial era menor que la razón, aunque no se observó ningún argumento, como en el caso de Enrique).

Sólo una estudiante, Camila (grupo #3, véase Anexo 7, fila 3), usó el recurso de que los CD podían tener diferente masa, lo que le hizo pensar en una diferenciación entre los conceptos de masa y peso y, en consecuencia, llenó la tabla con una sucesión creciente que no era lineal ni aritmética. Recurriendo también a un mapeo físico, Camila hizo referencia a que los CD tenían masa distinta y que por esto no había proporcionalidad lineal entre el número de CD y la elongación (Figura 18). Por esta razón, presentó en la primera tabla una sucesión con incrementos aleatorios en la elongación.

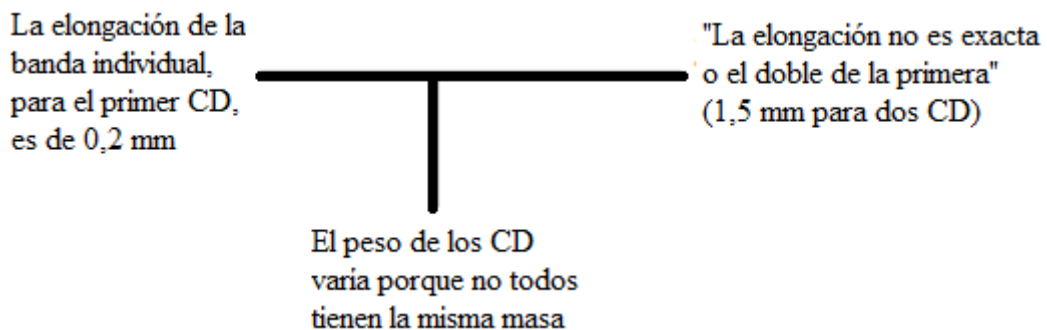


Figura 18. Argumento de Camila en el experimento mental (la masa de los CD no es la misma)

En el caso del sistema de una banda, la mayoría de los estudiantes optaron por un enmarque de cálculo más que por argumentos físicos, para lo cual usaron sucesiones generalmente lineales o aritméticas. Concretamente, 7 estudiantes propusieron como modelo una sucesión lineal mientras

que 4 propusieron como modelo una sucesión aritmética (Ver Anexos 1, 4, 7 y 10) en la que el primer CD no elongaba la banda igual que lo hacían los demás. Este hecho y algunos de los argumentos presentados dieron cuenta de que existía un recurso de adición preferentemente, no se recurría a la multiplicación. Los autores consideran que una de las causas de esto fue la forma misma de la tabla en la que se pedían elongaciones para números sucesivos de CD. Lo anterior hacía difícil que el estudiante llegara a la idea de una constante de elasticidad.

Se observó un cambio en la preferencia por el enmarque en el paso del sistema de una banda a los sistemas de dos bandas, aquí se recurrió preferentemente a algún recurso físico que diera sustento al cambio o a la conservación de la elongación con respecto a los datos de la primera tabla. Los estudiantes hicieron referencia recurrente a una idea de distribución de peso, aunque no fuera totalmente explícita, para el sistema de dos bandas en paralelo (ver ejemplos concretos en los Anexos 1, 4, 7 y 10).

Para el sistema de dos bandas en serie, dicho recurso fue menos frecuente. Para ilustrar esto, se muestra en la Figura 19 el argumento presentado por Gelen (grupo # 3), en el que no usó ninguna idea de distribución de peso, sino la idea de que a igual peso, sin importar la longitud de la banda, la elongación se mantenía constante con respecto al primer sistema.

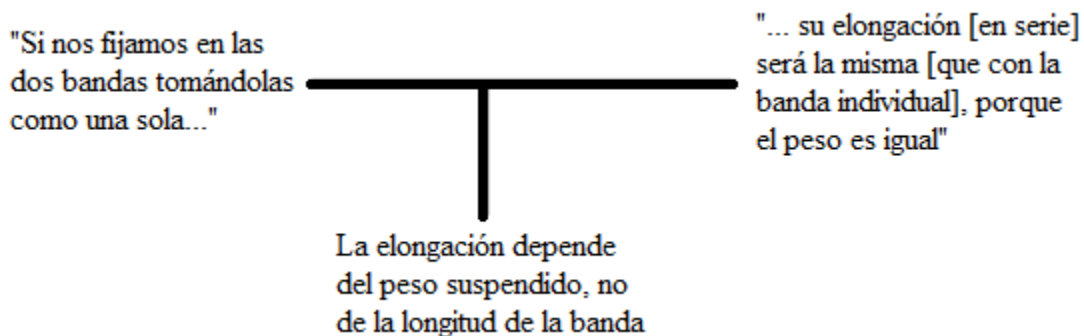


Figura 19. Argumento de Gelen en el experimento mental (a igual peso, igual elongación)

Otros estudiantes consideraban que para dos bandas en serie la elongación era mayor. Las respuestas al respecto fueron bastante heterogéneas. Un ejemplo de uno de los argumentos que, en este caso, difiere de la idea de que la elongación se duplicaba o se mantenía igual al primer sistema, se puede encontrar en la afirmación de Yeimy (grupo # 2), según la cual al suspender un CD en el sistema en serie la elongación aumentaba un poco más que en el sistema individual, aunque no el doble (Figura 20). La razón que aludió la estudiante tuvo que ver con el hecho de que la segunda banda también tenía un peso que necesariamente aumentaría la elongación de la primera. Se puede

observar al respecto que la estudiante dio al sistema en serie un tratamiento similar al de la banda individual, pues solo tuvo en cuenta el estiramiento de la primera banda (de la segunda solo tomó en cuenta el peso, que según estimación de la estudiante equivalía a la mitad del peso de un CD). Es de anotar además que la ley de Hooke es un modelo en el que se asume que el peso de los resortes (o bandas) es despreciable.

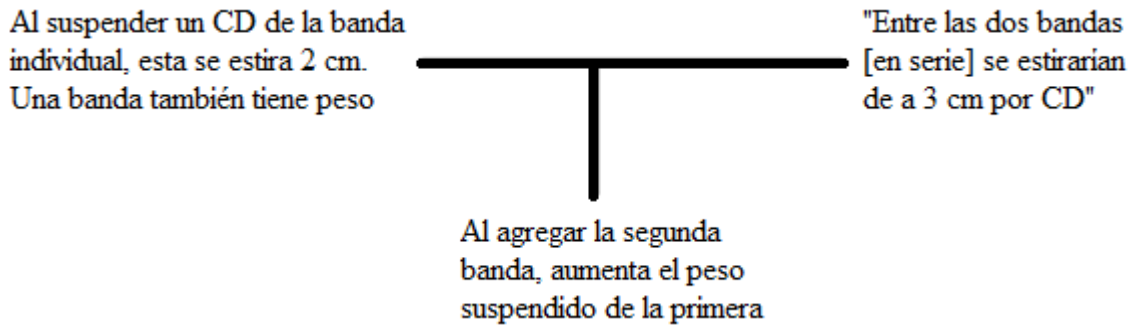


Figura 20. Argumento de Yeimy en el experimento mental (la banda también tiene peso)

Por otro lado, la estudiante Valentina (grupo # 2) hizo el cambio de enmarque en el sistema de dos bandas en paralelo, es decir, para los sistemas de una banda y de dos bandas en serie recurrió a un enmarque de cálculo. Para construir la última tabla usó un mapeo físico sustentado en el hecho de que la fuerza se distribuía equitativamente entre las dos bandas (Figura 21):

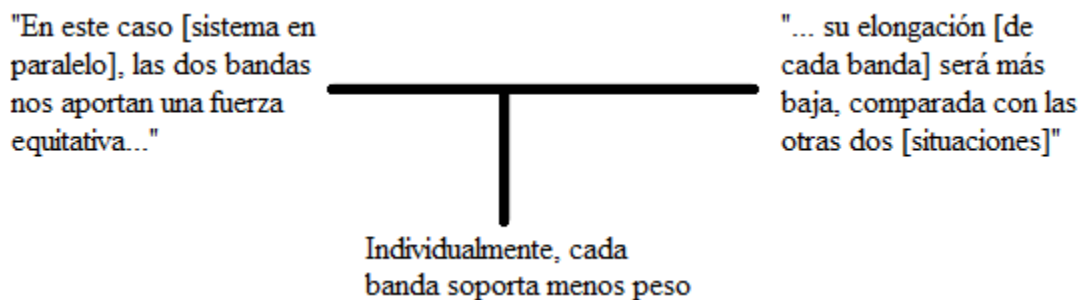


Figura 21. Argumento de Valentina en el experimento mental (distribución del peso para el sistema en paralelo)

Sin embargo, la estudiante no llegó a decir que la elongación fuera la mitad de la que podría verse con una sola banda, que era lo que se esperaba desde el modelo de la ley de Hooke mostrado en el marco teórico.

En el caso de una estudiante Camila (grupo # 1) no hubo cambio de enmarque: desde el comienzo hizo un mapeo físico que se mantuvo en los tres sistemas. Es de notar que asimismo fue la única estudiante que consideró la posibilidad de que los CD tuvieran pesos diferentes. En particular, en el sistema en paralelo se evidencia un recurso de distribución del peso. En este caso, Camila hizo

un cambio de variable para garantizar algún grado de proporcionalidad, ya no usó la variable número de CD sino la variable peso, puesto que desde un comienzo consideró que el peso de los CD no era el mismo. Este uso del concepto peso fue fundamental para elegir el enmarque físico, sin embargo fue también fuerte la idea de proporcionalidad, pero seguía existiendo una idea de imprecisión debido a la diferencia de pesos (Figura 22).

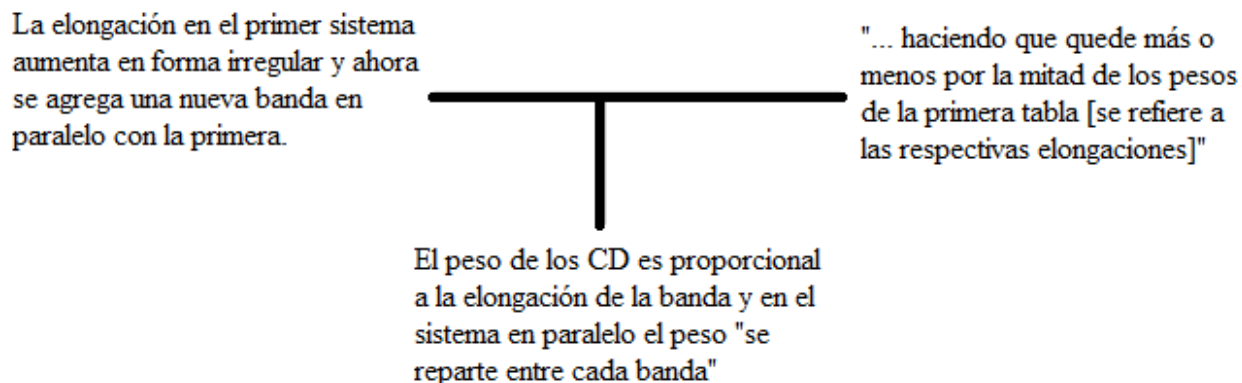


Figura 22. Argumento de Camila en el experimento mental (distribución del peso en el tercer sistema)

En el caso de Laura (grupo # 2) se encontró una afirmación basada en el peso del CD, que permaneció al analizar las dos bandas en paralelo, según la cual el peso es el factor determinante en la elongación del sistema, independientemente de que haya una o dos bandas sosteniendo el CD. Este argumento se presenta en la Figura 23.

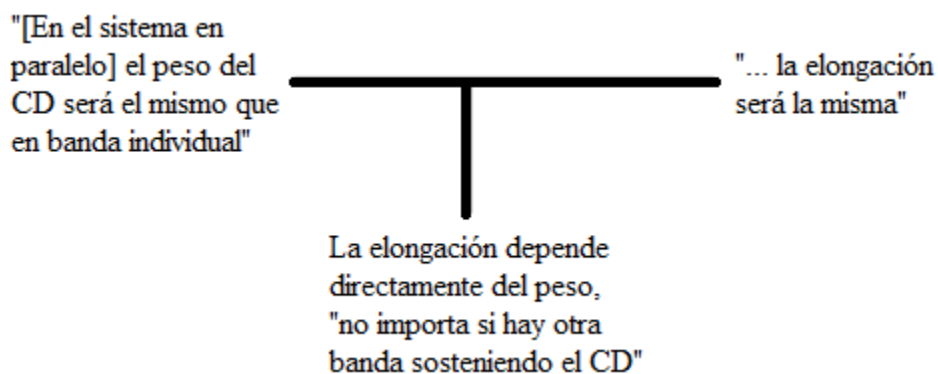


Figura 23. Argumento de Laura en el experimento mental (a igual peso, igual elongación)

Una afirmación similar se encontró en la respuesta de Paola (Grupo #1) acerca de que en el sistema de dos bandas en paralelo la elongación era igual que con una sola banda, pero fue debido a la interpretación que la estudiante hizo del sistema pues consideraba que al poner dos bandas en paralelo los CD debían suspenderse de cada banda por separado (dos experimentos de banda

individual uno cerca al otro), según fue inferido por los autores a partir de la representación que hizo del sistema.

4.2.2 Análisis del experimento virtual

En el experimento virtual, el primer enmarque que se evidenció, no esperado previamente al diseñar la guía, fue el mapeo físico. En todos los grupos sin excepción apareció una ayuda geométrica para buscar la precisión en la lectura de la medida de la elongación. Ninguno de los grupos confió plenamente en la grilla de fondo del *applet* en GeoGebra, de manera que se valieron de algún instrumento para hacer coincidir el extremo inferior de la banda con su proyección sobre la regla virtual. Algunos grupos usaron por ejemplo una regla, otros, el borde de una hoja de papel y solo uno de ellos usó un recuadro con el mouse para el mismo objetivo. Pudo apreciarse un recurso metacognitivo de precisión: para que el valor fuera correcto, debía colocarse la regla u otro instrumento de manera adecuada, no se podía colocar de cualquier forma, eso garantizaba que las medidas presentadas en las tablas fueran correctas (Figura 24). Este recurso fue asociado por los autores con un garante, aunque no en un sentido explícito (Bing & Redish, 2008).

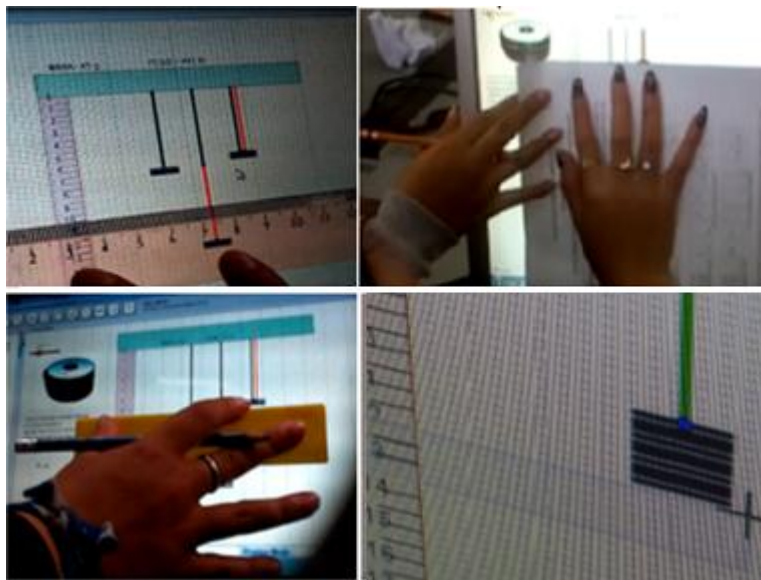


Figura 24. Recurso metacognitivo en el experimento virtual (precisión al tomar una medida)

El diseño de la guía determinó un enmarque de cálculo, que la mayoría de los estudiantes siguieron ya fuera realizando sumas, multiplicaciones simples o combinaciones de estas dos operaciones, con lo que se observó que el recurso de multiplicación no estaba fuertemente ligado a este tipo de problemas. Un ejemplo de este hecho fue el caso de Enrique, quien para calcular la masa de 20 CD

realizó en la calculadora la operación $150+150$. En todo caso, el estudiante confiaba más en la calculadora para comprobar sus resultados y más aún, en el *applet*, al que le dejó prácticamente toda la autoridad.

En algunos casos, la confianza de los estudiantes en que el *applet* les proporcionaba siempre las respuestas les hizo cometer errores al registrar los valores en la tabla, pues cuando se les daba como dato una elongación de un valor fuera del rango del *applet* continuaron buscándolo en él, y como consecuencia empezaron a confundir la elongación con la longitud total del sistema, de modo que tomaban la lectura directamente de la regleta sin restar la longitud original de la banda. Así, registraron un valor incorrecto para el número de CD. Esto se debió a la fuerte confianza de los estudiantes en el *applet*, propagándose el error al registrar otros valores.

En algunas ocasiones, se evidenció un enmarque de autoridad dado por la confianza hacia un estudiante destacado académicamente en la clase.

Solo en muy pocos casos, por ejemplo en el grupo # 3, se llegó a una generalización, determinando una relación expresable matemáticamente entre el número de CD y la elongación respectiva para los tres sistemas y dando lugar a un argumento como el que se muestra en la Figura 25.

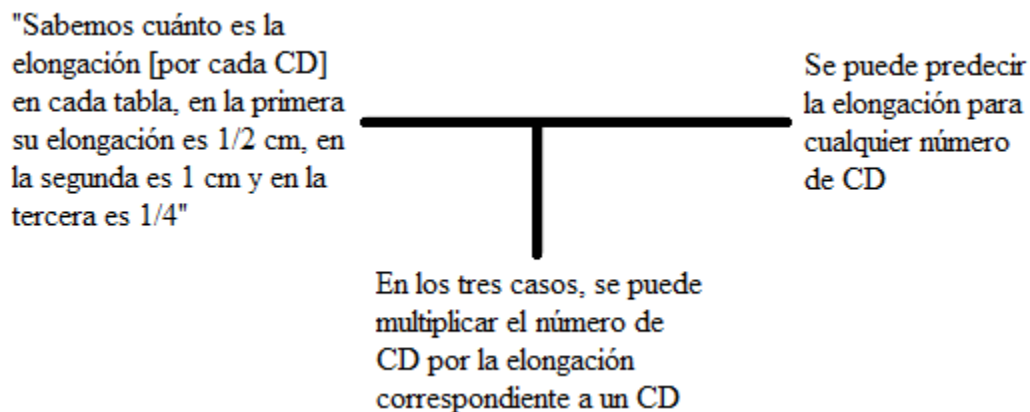


Figura 25. Argumento de generalización en el grupo # 3: Predicción de la elongación dado el número de CD

4.2.3 Análisis del experimento real y lectura vertical

El título de este apartado obedece en parte a que fue en el experimento real en el que se hizo la síntesis por parte de los estudiantes de las tres fases experimentales. Es aquí en donde ocurrieron las comparaciones entre las tres actividades, a fin de cuentas fue el juez último de la teoría.

En el experimento real se evidenció un enmarque de autoridad en el proceso de tomar las medidas. Los estudiantes buscaron la manera de que el sistema se pareciera lo más posible a lo mostrado en el *applet* del experimento virtual. Así, por ejemplo, intentaron hacer que los CD quedaran en equilibrio, dado que el *applet* mostraba los CD orientados horizontalmente. Esto los llevó a usar un recurso geométrico de buscar el centro del CD y una manera de amarrar las bandas al centro del mismo (Figura 26) con la idea de que este era el punto en el que el CD se equilibraba (centro de gravedad).



Figura 26. Búsqueda del centro geométrico del CD con el fin de ponerlo en equilibrio evidenciando un enmarque de autoridad del experimento virtual

De igual forma, midieron la longitud natural de la banda colocándola recta sobre la regla, a la manera en que aparecía en el *applet* (Figura 27). Por esto, algunos llegaron a la conclusión errónea de que con el primer CD se obtenían elongaciones muy pequeñas o incluso negativas, dado que la medida de la longitud natural de la banda ya había sido alterada. Otra forma de medir la longitud natural de esta sería recurrir al primer esquema mostrado en la guía del experimento mental en el que aparecen suspendidas sin ningún CD, pero los estudiantes prefirieron que la forma de la banda se pareciera a la que se mostraba en el experimento virtual, constituyéndose así un enmarque de autoridad en el que el *applet* brinda más confianza al estudiante los planteamientos y resultados del experimento mental.

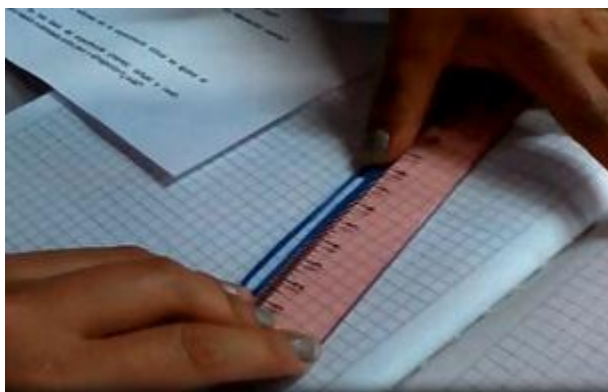


Figura 27. Enmarque de autoridad (garante de que la medida está bien tomada: la banda está recta como exige el experimento virtual)

Los estudiantes recurrieron a un mapeo físico al buscar la precisión en la medida de la elongación. Al respecto, se destacó el grupo # 2 que, al superar la confusión generada por su intento de hacer que el experimento real fuera fiel al experimento virtual, utilizó un recurso metacognitivo del tipo *qué pasa si*, al cambiar la disposición de los CD a una configuración vertical en vez de horizontal. Una vez aceptada esta nueva configuración el grupo superó la confusión y asumió que los resultados aun así debían ser similares. Luego refinaron este método con ayuda de una segunda (o tercera) banda para amarrar los CD y suspenderlos de las bandas que son de interés en la medida, garantizando que la medida de la longitud total del sistema fuera de alta precisión ya que la medida se tomaba hasta el punto donde se anudaba la banda adicional el cual coincidía casi exactamente con el extremo inferior de la banda (Figura 28). , hecho que no sería posible en métodos de medida en los que parte de la longitud de la banda no es directamente medible, implementados por otros grupos. Esta decisión del grupo es un ejemplo de lo ya anotado por Perea & Buteler (2014) en relación con el hecho de que el uso de recursos metacognitivos en estudiantes novatos contribuye a que estos empiecen a asumir actitudes de estudiantes expertos.



Figura 28. Método que le garantiza al estudiante un buen nivel de precisión en la medida de la elongación de la banda usando una banda adicional

Un uso similar de un recurso metacognitivo del tipo “qué pasa si” ante un factor de error propio del método de medición aplicado, se encuentra en el Grupo # 4 cuando al tomar la medida total de la banda usan una escuadra para acceder a un segmento de esta que queda oculto debido al método que utilizaron para suspender los CD en el que dicho segmento es interior al orificio central de la pila de CD y por tanto inaccesible para una regla corriente (Figura 29).



Figura 29. Método que busca garantizar la precisión usando la punta de la escuadra para incluir en la medida la porción de la banda no accesible directamente

En el caso del grupo # 3, se vio claramente una construcción propia del concepto de elongación como una variable que podía tomar incluso valores negativos, cosa que el profesor no había mencionado. Así, como se explica en la tabla, el enmarque de autoridad hacia el *applet* llevó al grupo a estirar la banda demasiado para tomar la medida natural (con el ánimo de que estuviera recta como en el experimento virtual). Esto hizo que al suspender de la banda un CD, su longitud fuera incluso menor que la medida tomada como longitud natural, lo que determinó una elongación negativa que el grupo calculó como -0,3 cm.

Se recurrió también a un mapeo físico, especialmente en el grupo # 1, cuando comparó el experimento virtual y el real. Cada estudiante justificó las semejanzas o diferencias entre estos dos experimentos de acuerdo con el grado de ajuste entre lo que mostraba el *applet* y lo encontrado en la realidad al medir personalmente la elongación. Así, mientras para Kilarith, los experimentos se parecían debido a que los procedimientos eran similares, para Paola había divergencias debido a que el sistema real no era estable y para Ingrid, eran demasiado diferentes, porque la linealidad solo se dio en un intervalo muy pequeño a partir del cual las medidas esperadas no se dieron, variando la elongación en forma distante de lo que el *applet* proponía. La estudiante afirmó que “el computador acertó en muy pocas cosas”, de lo cual se interpretó que la estudiante consideraba que el *applet* debería ser fiel a la realidad, en contraposición con la idea que tenía al inicio del experimento real, según la cual éste debía ajustarse al *applet*, debido a la predominancia de un enmarque de autoridad.

Particularmente, en este caso se observó un argumento dado por Ingrid, según el cual “no existe ninguna ecuación que relacione las dos variables, ya que hasta tres CD cuando estaban en serie se podría decir que la elongación es constante pero a partir de ahí el cambio es repentino”. Aquí se observó un recurso metacognitivo de comparación que le permitió enunciar un criterio acerca del ajuste de un modelo matemático con el fenómeno real consistente en que para que fuera un buen modelo, los valores numéricos de la variable en cuestión debían ser similares a los que proporcionaba la ecuación no solo en un intervalo pequeño sino para la totalidad del proceso. El respaldo para el garante de este argumento fue la idea de que un fenómeno estaba bien modelado por una ecuación si esta se ajustaba al mismo en todo el intervalo de aplicación. El argumento se visualiza, de acuerdo con el modelo de Toulmin, en la Figura 30.

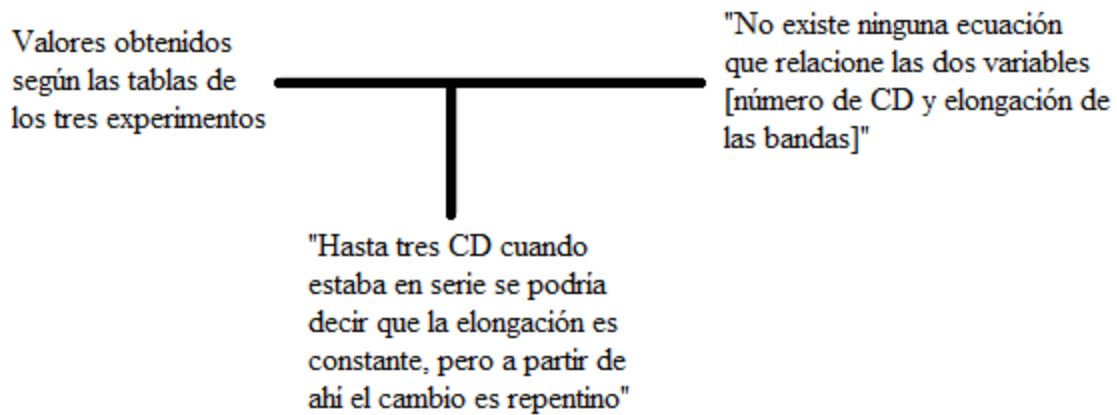


Figura 30. Argumento de Ingrid acerca de los tres experimentos: "No existe una ecuación que relacione las dos variables"

Se observó, adicionalmente a lo anterior, un enmarque de cálculo: al momento de hacer estimaciones para valores que estaban por fuera del intervalo de trabajo del experimento real, la mayoría de los estudiantes hizo dicha estimación tomando un valor obtenido dentro de las medidas tomadas previamente y usando proporcionalidad directa, incluso cuando explícitamente en el grupo se había observado que esta no se cumplía para los valores registrados en la tabla (Ver Anexo 9, fila 5).

5 CONCLUSIONES

Este capítulo está organizado en dos partes. La primera relaciona los aportes del análisis de la actividad de aula en relación con la pregunta de investigación y los objetivos planteados. La segunda parte presenta los aportes de la actividad misma a nivel de la Educación Matemática, las perspectivas hacia futuro de la actividad desarrollada con los estudiantes así como del presente trabajo en general.

5.1 Con respecto a la pregunta de investigación y los objetivos planteados

Los recursos epistémicos presentados por los estudiantes, identificados a través de sus argumentos, se clasifican dentro de las categorías de enmarques epistémicos previstas por Bing y Redish, con excepción del enmarque de consistencia matemática, en el que se comparan dos modelos similares y se usan recursos de uno de ellos para explicar el otro. El experimento mental muestra ser rico en argumentación y en él pueden verse especialmente algunos enmarques de cálculo y un mapeo físico, mientras que el experimento virtual, por otro lado, genera un enmarque de autoridad en las actuaciones de los estudiantes quienes relegan al *applet* la solución de los problemas presentados en la guía. El enmarque de autoridad determinado por el experimento virtual influye en la manera en que los estudiantes afrontan las primeras etapas de medida en el experimento real, pero los resultados de este último experimento cuestionan la autoridad del *applet*, puesto que, como se muestra en el análisis, algunos grupos se ven abocados a tomar decisiones sobre los métodos de medida que los alejan de intentar reproducir de manera idéntica el experimento virtual. Este hecho está mediado por un tipo de recurso metacognitivo del tipo “¿qué pasa si?”.

La actividad planteada permite a los estudiantes encontrar relaciones epistémicas entre la física y la matemática más allá de las clases regulares de física y matemáticas por separado, como lo muestran los argumentos analizados en el capítulo anterior. Así por ejemplo, las relaciones entre cantidad de CD, masa y la correspondiente elongación que se genera en la banda elástica da lugar en los estudiantes a recursos más elaborados o fuertemente ligados. Esto en el sentido de encontrar relaciones entre una fórmula matemática y un fenómeno natural como el estiramiento de una banda, en donde el propio estudiante se ve obligado a tomar decisiones sobre si un modelo es o no aplicable a la realidad y en qué circunstancias puede ser aplicable. De esta manera, en el futuro, cuando se vea enfrentado a un problema físico que requiera el uso de las matemáticas reconocerá que la ecuación es válida sólo limitadamente de acuerdo con las circunstancias, saliendo así del paradigma

de la resolución algorítmica de problemas, pese a que alguna estudiante por ejemplo, se queda con la idea de que “no hay ninguna fórmula que modele el fenómeno” (pues esta idea puede ser moldeada a través de un futuro estudio estadístico sobre correlación lineal de la situación que no hace parte del alcance de esta investigación). En esta dirección se da un paso importante para la construcción de recursos metacognitivos propios de las ciencias, como lo sugiere la frase célebre atribuida a Ortega y Gasset, “Siempre que enseñes, enseña a la vez a dudar de lo que enseñas” (Ortega Blake, 2013).

Respecto de la ley de Hooke aplicada a las bandas elásticas puede decirse, por ejemplo, que en el experimento mental algunos estudiantes usan significativamente un enmarque de cálculo representado por la aparición de un garante relacionado con el recurso de la proporcionalidad lineal, aunque otros usan como garantías recursos propios de un enmarque de mapeo físico para argumentar su explicación sobre el comportamiento de la banda al suspender de esta un número determinado de CD. Así por ejemplo, la estudiante Camila propone desde el comienzo en su experimento mental un modelo no lineal entre las variables número de CD y elongación argumentando que esto es así porque los CD no pueden pesar igual, como ya se ha explicado en la etapa de análisis.

Con respecto al cambio de fases experimentales se observa la preponderancia del experimento virtual sobre los otros dos, constituyendo en los estudiantes un enmarque de autoridad en el que el *applet* garantiza que el experimento mental fue correcto o no. Como primera medida se abandonan las ideas iniciales del experimento mental, aunque algunas de estas pudieran ser más ajustadas a la realidad. Así por ejemplo, en el experimento mental existe cierta idea del posible error, pero con el experimento virtual, se deja un poco de lado puesto que este sugiere un comportamiento regular en todos los casos. Esta idea viene a imponerse luego en las primeras etapas del experimento real, pues los estudiantes lo consideran correctamente realizado si se hace en condiciones similares a las que presenta el *applet*, como ya se ha señalado en el análisis mediante ejemplos tales como la búsqueda por parte de los estudiantes de que los CD deben ser orientados horizontalmente en equilibrio o el estiramiento de las bandas para medir su longitud natural. Es importante superar el enmarque de autoridad que genera este tipo de experimento porque está sustentado en la fe puesta en el poder que tiene el mismo, dado que se considera un modelo perfecto de la realidad. Así, la actividad debe ayudar a generar cuestionamientos acerca de esa autoridad. Si bien el experimento

real es un buen juez del experimento virtual y contribuye a la generación de argumentos en contra de éste, se corre el riesgo de que la actividad no lleve a los estudiantes a establecer relaciones adecuadas entre los tres experimentos. En este sentido, los *applet*, simulaciones etc. se pueden convertir en una autoridad que coarte el razonamiento argumentativo. Sin embargo el experimento virtual favorece en gran medida el desarrollo de cálculos matemáticos y reafirma el modelo lineal de la ley de Hooke, como puede notarse con la aparición recurrente del enmarque de cálculo en tal experimento, en el que aparecen preferentemente los recursos de la suma y la multiplicación.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el orden de los experimentos probablemente determinó el fuerte enmarque de autoridad que se presentó con el experimento virtual, pero es necesario aclarar que este orden fue fundamentado en las ideas de Jahnke (2005, 2010) con las que enfatiza que el acercamiento a la teoría y a la prueba de la misma debe hacerse desde un marco experimental, que coincide en gran medida con el orden de las dos fases (mental y virtual) aquí mencionadas. La tercera fase es más propia de la física que exige la comprobación de un modelo a nivel de un experimento real.

Lo anterior nos lleva a considerar los resultados del trabajo dentro de lo que Jahnke llama una aproximación genética a la prueba. Puede decirse que en este trabajo se llega a una primera fase de aproximación a la teoría en la que la medida juega un papel relevante en la formación de la teoría que se quiere probar. En esta fase formativa son importantes los esquemas lógicos de pensamiento, por ejemplo: los estudiantes en su desarrollo de métodos de medición identifican ciertos “invariantes” o regularidades tales como el hecho de que la elongación no se ve afectada al colocar el CD horizontal o verticalmente.

Todos estos esquemas lógicos pueden considerarse en el sentido que Coleoni & Buteler (2008) categorizan como recursos metacognitivos. Este trabajo permitió observar tal tipo de recursos no esperados inicialmente. Los recursos metacognitivos permiten a los estudiantes tomar decisiones acerca del conocimiento que deben poner en juego y el conocimiento por ellos mismos construido a través de las tres fases experimentales. Por ejemplo se hace evidente el recurso de “comparación” en el caso de la estudiante Ingrid, cuando su observación del experimento real le permite poner a prueba la validez de sus hipótesis en el experimento mental y lo observado en el experimento virtual. La comparación entre los hechos y la teoría, que para la estudiante evidencia una divergencia entre la realidad y lo que propone el modelo matemático, la conduce a afirmar que la

teoría no se ajusta a la realidad aunque lo hace solo en un pequeño intervalo. Asimismo, estos recursos metacognitivos propician en el estudiante el paso de un enmarque a otro para acomodarse a la situación. Recursos metacognitivos como la comparación, la confusión, el “qué pasa si” les permiten buscar otros posibles razonamientos que los lleven a sentirse más cómodos con sus respuestas. Este es el caso del grupo # 4, que elige colocar el CD verticalmente considerando que esto no afecta los resultados del experimento y aun así continúa siendo comparable con lo que pasa en el experimento virtual o el experimento mental.

El experimento real contribuyó a cuestionar la autoridad del *applet* en el experimento virtual, puesto que las medidas encontradas inducen al estudiante necesariamente a la idea de error experimental y a la búsqueda de estrategias para superar estos errores. Un ejemplo de esta búsqueda está dado por la decisión del grupo # 4 de medir la elongación de la banda mediante una escuadra que tiene una punta que le permite acceder a la parte más baja de la misma dentro del orificio del CD, esto no se podría hacer con una regla normal. Esta decisión fue necesaria debido a una primera decisión de atar la banda a una pequeña tira de papel por debajo de los CD para mantenerla en equilibrio (Figura 29).

En general puede decirse que los estudiantes encuentran un sentido en la actividad que consiste en explicar el comportamiento de un objeto del mundo real, que aunque no tiene las mismas aplicaciones que los resortes de Hooke, son significativos en cuanto a los usos cotidianos que los estudiantes le dan y han sido observados por los autores. Por ejemplo en tareas que realizan en su clase de tecnología cuando usan una banda a manera de polea para transmitir el movimiento de un motor hacia una rueda o en juegos tales como la catapulta de bolitas de papel, que suelen lanzarse entre ellos. Esta valoración de lo cotidiano por parte de los estudiantes hace que tenga sentido buscar un modelo que explique cómo funcionan.

A lo largo del proceso investigativo que ha dado lugar a este escrito se encuentran algunos criterios a tener en cuenta para construir actividades que pretenden enlazar los campos de la física y las matemáticas. Los principales se mencionan a continuación:

- Presentar a los estudiantes un problema no acabado, susceptible de ser construido o discutido, permite generar en el estudiante interés por buscar sus propias respuestas y expresarlas sin el temor de ser juzgado. El experimento mental es una muestra de las posibles formas de argumentación que surgen a partir de una pregunta abierta que le permite

al estudiante explorar modelos de su propia realidad con ayuda de elementos de su entorno inmediato. Los elementos tales como estimación de medidas de lo cotidiano, variación de esas medidas e imaginación son de importancia en la generación de dicho interés, a la vez que propician el razonamiento matemático y físico.

- La relación de interés y atracción hacia el experimento virtual es palpable en el estudiante, pues es cercano por ejemplo, a los juegos de vídeo y otras experiencias similares que son para él cotidianas y que le permiten manipular objetos dentro de los modelos matemáticos que hacen parte del propio conocimiento matemático y de las ciencias naturales. El *applet* permite de esta manera, un acercamiento más directo entre el usuario y el conocimiento.
- Sin embargo, debe buscarse no dar demasiado peso de autoridad a ninguno de los tres experimentos, especialmente en lo que se refiere al uso de las TIC. Se debe ser cuidadoso en el diseño del *applet*, pues puede generar en el estudiante la falsa creencia de que los modelos matemáticos con que se construyen son perfectos y la realidad debe acoplarse a éstos.

5.2 Aportes y perspectivas a futuro

La actividad permite a los estudiantes generar preguntas que nutren la actividad argumentativa que está en la base de las cadenas de razonamiento lógico demostrativo, especialmente en el experimento mental (a pesar de ser un ejercicio individual), lo cual confirma la idea presentada por Jahnke (2005) de que esta primera fase contribuye al desarrollo argumentativo de los estudiantes. En esta fase, el estudiante antes de generar argumentos para los demás los genera para su propio convencimiento y satisfacción personal. Esto se constituye en preparación para la confrontación de sus argumentos con la comunidad. Por ejemplo, la estudiante Sharon, en el desarrollo del experimento mental, se pregunta acerca de la incidencia del gancho en la elongación de la banda de caucho y esto la conduce a considerar una sucesión aritmética de las elongaciones, justificada en el hecho de que para el primer registro se debe tener en cuenta el peso del gancho y en adelante simplemente los pesos de los CD que se van agregando, esto en últimas la lleva a tener en cuenta posibles errores experimentales que hacen la diferencia entre un modelo matemático y el fenómeno que modela.

La interacción grupal permite superar ciertas dificultades o vacíos del aprendizaje que los estudiantes cargan a través de muchos de sus cursos anteriores de matemáticas. Un ejemplo de este

hecho es lo que ocurre en el grupo # 3, en el desarrollo del experimento virtual, donde la estudiante Paula se ve obligada a usar el sistema decimal al efectuar una suma ($0,5+0,25$) y la interacción con el grupo y con el docente, así como la visualización del *applet* le permiten darse cuenta de su error y comprender mejor la suma (Ver Anexo 7, fila 3). Algo similar ocurre con la multiplicación para el estudiante Enrique quien aún se encuentra más cómodo con la suma (ver Anexo 6, fila 1), pero en la interacción con sus compañeros en el experimento virtual comienza a darse cuenta de la practicidad de la multiplicación.

El experimento real, por otro lado, pone a los estudiantes en confrontación con el modelo matemático y les genera inquietudes acerca de la validez del mismo. El caso más interesante de este hecho tuvo lugar cuando la estudiante Ingrid afirma “el computador acertó en muy pocas cosas”, poniendo de manifiesto un cuestionamiento del modelo por parte de la estudiante al comparar las observaciones hechas en el experimento virtual (absolutamente fiel al modelo matemático “Ley de Hooke”) y las mediciones tomadas en el experimento real.

Por otro lado, el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes permite identificar algunos aspectos que no fueron tenidos en cuenta inicialmente por los autores, quienes los consideran de importancia para la reformulación de la actividad, con la intención de hacerla más robusta en el sentido de que permita desarrollar más y mejores recursos epistémicos en los estudiantes.

Los autores observan, por ejemplo, que los estudiantes usan preponderantemente recursos de tipo aditivo para resolver situaciones multiplicativas. Dada la riqueza argumentativa del experimento mental, una forma posible de aportar en este sentido es no presentar las tablas del experimento mental en la forma propuesta en la actividad sino partir inicialmente de un orden natural en el número de CD para luego incluir otros valores no consecutivos. Esto puede permitir que el estudiante plantee inicialmente su modelo propio y posteriormente determine por sí mismo alguna regla para calcular la elongación, que puede ser mediante la proporcionalidad o alguna otra que se le ocurra, sin recurrir a un enmarque de autoridad, situación que tuvo lugar en el experimento virtual.

Con relación al experimento virtual, el cual constituyó para los estudiantes un enmarque de autoridad muy fuerte como lo hemos ya señalado, los autores consideran importante, para futuras experiencias, tener en cuenta que no debe ser presentado como un modelo acabado, sino que debe ser el reflejo de un modelo en construcción.

Uno de los aspectos para ajustar en el experimento real es el hecho de que en las tablas se solicita registrar la masa de los CD, asumiendo que esta es igual para todos y con base en el mismo valor que aparece en el experimento virtual. La propuesta de ajuste consiste en que la masa sea medida por los estudiantes y haya una pregunta que genere argumentación sobre si es o no adecuado considerar la masa de los CD aproximadamente igual. Este aprendizaje por parte de los autores se ha logrado a partir de la observación de argumentos como el que la estudiante Camila (grupo # 1) presenta en el experimento mental.

Asimismo se propone una continuación de la actividad que responda a las inquietudes de la estudiante Ingrid respecto de si el modelo matemático es fiable o no. Si bien las ecuaciones pueden no ajustarse de manera totalmente precisa a la realidad, existen criterios para pensar que se ajustan en forma razonable, tales como los métodos estadísticos de regresión lineal. Estos métodos pueden permitir a los estudiantes tener un criterio más sólido acerca de la pertinencia del modelo matemático.

Adicionalmente a lo anterior, surgen algunas inquietudes que, de acuerdo con los objetivos, al presente trabajo no le corresponde resolver, pero que pueden resultar de interés para trabajos posteriores:

¿Qué condiciones debe satisfacer cualquier labor virtual de modo que no termine convirtiéndose en una autoridad incuestionable para el estudiante y le permita argumentar?

¿Qué incidencia sobre la actividad podría tener el cambiar el orden de los experimentos?

¿Cómo después de la fase formativa de la teoría, en la que se alimentan las habilidades argumentativas, se puede dar paso a la construcción de pruebas formales?

¿Qué implicaciones y qué relaciones pueden hallarse entre lo social y lo cognitivo en un tipo de actividad que involucra investigación individual y colectiva?

BIBLIOGRAFÍA

- Bing, T. (2008). *An epistemic framing analysis of upper level Physics students' use of Mathematics (Tesis doctoral)*. College Park: Universidad de Maryland.
- Bing, T. J., & Redish, E. F. (2008). Using warrants as a window to epistemic framing. *Proceedings of the Physics Education Research Conference July 2008*. 1064, pp. 71-74. Edmonton AB: AIP Conf. Proc.
- Bing, T. J., & Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, 5(2), 020108.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte: PME.
- Coleoni, E., & Buteler, L. (2008). Recursos metacognitivos durante la resolución de un problema de física. *Investigações em Ensino de Ciências*, 13(3), 371-383.
- diSessa, A. (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman, & P. B. Pufall, *Constructivism in the Computer Age*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Publisher.
- Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education* (Vol. I, pp. 128-142). Osnabrueck.
- Gal, O. (2002). *Meanest Foundations and Nobler Superstructures: Hooke, Newton, and the "Compounding of the Celestiall Motions of the Planetts"*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- García, G., & Montejó, J. (2011). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(2), 128-138.
- Gil, D., Martínez, J., & Senent, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas de física: una investigación orientada por nuevos supuestos. *Enseñanza de las ciencias*, 6(2), 131-146.

- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421-438.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In J. Bishop, *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 877-908). Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Another approach to proof: arguments from Physics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), 1-8.
- Hernández, P. (2014). *Los usos del conocimiento matemático en un escenario de divulgación: la periodicidad (Tesis doctoral)*. Chilpancingo: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 428-437). Sant Feliu de Guíxols.
- Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical Physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Ed.), *Explanation and proof in Mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 17-32). New York: Springer.
- Kuhn, T. S. (1982). La tradición matemática y la tradición experimental en el desarrollo de la física. In T. S. Kuhn, *La tensión esencial. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia* (R. Helier, Trans., pp. 56-89). México: Fondo de Cultura Económica.
- MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Ciencias Naturales y Educación Ambiental*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis. An Expanded Sourcebook* (Segunda ed.). Sage Publications.
- Moyer, A. E. (1977). Robert Hooke's Ambiguous Presentation of "Hooke's Law". *Isis*, 68(2), 266-275.
- Ortega Blake, A. (2013). *El gran libro de las frases célebres*. Grijalbo.

- Perea, M. A., & Buteler, L. M. (2014, Dic.). Sofisticación epistémica en electrostática: un estudio de caso en alumnos universitarios. *Revista Enseñanza de la Física*, 26(Número extra), 185-193.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española (23.a ed.)*. Retrieved Julio 11, 2015, from <http://www.rae.es/rae.html>
- Redish, E. (2010). Introducing Students to the Culture of Physics: Explicating elements of the hidden curriculum. *Proceedings of the Physics Education Research Conference*. 1289, pp. 49-52. Portland, OR: AIP Conference Proceedings.
- Schoenfeld, A. H. (2000, June/July). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47(6).
- SED. (2007). *Colegios públicos de excelencia para Bogotá: Orientaciones curriculares para el Campo de Pensamiento Matemático*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Talero, P., Mora, C., Organista, O., & Galindo, F. (2013). Experimentos virtuales sobre una mosca vagabunda: Más allá de la solución de Neumann. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(2), 1-6.
- Tipler, P. A. (1995). *Física*. Barcelona: Reverté.
- Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación*. (M. Morrás, & V. Pineda, Trans.) Barcelona: Ediciones Península.
- Valencia, S., Méndez, O., & Jiménez, G. (2008). ¿Enseñanza de las ciencias por disciplinas o interdisciplinariedad en la escuela? *Tecné, Epísteme y Didaxis*(23), 78-88.
- Young, H., & Freedman, R. (2009). *Física universitaria*. México: Pearson Educación.

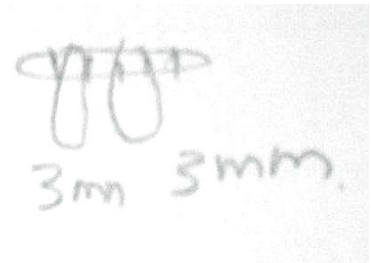
ANEXOS

Anexo 1. Grupo # 1, experimento mental

Experimento mental Grupo # 1 IED SISO

Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de recursos que se ponen en juego	Cita. Respuestas de los estudiantes																						
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p><i>Las sucesiones escritas en las tablas de la guía son lineales. Se obtienen a partir del primer elemento de la sucesión mediante proporcionalidad.</i></p>	<p>Proporcionalidad lineal. La estudiante escribe en la primera tabla una sucesión que expresa la relación lineal entre elongación y número de CD, con una razón constante de 2 mm.</p> <p>Recurso físico de uniformidad en la banda y el supuesto de que el peso de los CD es el mismo.</p> <p>Representación numérica de la medida. La estudiante usa unidades adecuadas de modo que los números registrados siempre sean enteros.</p> <p>Usa las unidades del sistema métrico decimal usando mm predominantemente.</p>	<p>Ingrid:</p> <p>Sistema de una banda: <i>“En la tabla, la elongación del caucho aumenta dependiendo de la cantidad de CD que se vayan agregando. Por ejemplo: si un CD pesa 10 g y la banda se estira 5 mm y se agrega otro CD del mismo peso entonces la banda se elongará el doble, es decir 10 mm ya que el peso pasó de 10 g a 20 g”</i> (proporcionalidad lineal).</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2 mm</td> <td>4 mm</td> <td>6 mm</td> <td>8 mm</td> <td>10 mm</td> <td>12 mm</td> <td>14 mm</td> <td>16 mm</td> <td>18 mm</td> <td>20 mm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2 mm	4 mm	6 mm	8 mm	10 mm	12 mm	14 mm	16 mm	18 mm	20 mm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	2 mm	4 mm	6 mm	8 mm	10 mm	12 mm	14 mm	16 mm	18 mm	20 mm														
<p>2. Mapeo físico:</p> <p>Hace una descripción del cambio que ocurre en el fenómeno físico al pasar del sistema con una banda al sistema de dos bandas.</p>	<p>Proporcionalidad lineal para la tabla con dos bandas en serie pero el valor inicial y la razón es la mitad de la anterior: 1mm.</p> <p>Recurso físico de distribución del peso cuando pasa a solucionar la situación de las dos bandas en serie y luego realiza algo similar cuando</p>	<p>Ingrid:</p> <p>Sistema de dos bandas en serie: <i>“La elongación es menor ya que el CD en este caso es sujetado por 2 bandas del mismo grosor y peso las dos. El hecho de que el Cd esté sujeto por más bandas quiere decir que la elongación por banda disminuye ya que es menos peso para cada banda”</i></p>																						

	<p>resuelve la situación para dos bandas en paralelo.</p> <p>Proporcionalidad lineal para dos bandas en paralelo, la razón constante es igual a la cuarta parte de lo que ocurre con una banda: 0.5 mm (lo representa por 5 mcm).</p>	<table border="1" data-bbox="1066 212 1801 302"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>1mm</td><td>2mm</td><td>3mm</td><td>4mm</td><td>5mm</td><td>6mm</td><td>7mm</td><td>8mm</td><td>9mm</td><td>10mm</td></tr> </table> <p>Sistema de dos bandas en paralelo: “En este caso las bandas están paralelas lo que ocasiona que cada banda tenga que soportar menos peso ya que el CD tiene más lugares de donde sujetarse (idea de distribución de peso). Yo imaginé que la banda en este caso por CD se elongaría 5 mcm. Si en cierto caso se agrega otro Cd, la banda se elongaría 1 mm ya que va aumentando de 5 en 5”</p> <table border="1" data-bbox="1066 542 1801 634"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>5mcm</td><td>1mm</td><td>15mcm</td><td>2mm</td><td>25mcm</td><td>3mm</td><td>35mcm</td><td>4mm</td><td>45mcm</td><td>5mm</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	5mcm	1mm	15mcm	2mm	25mcm	3mm	35mcm	4mm	45mcm	5mm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm																																				
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	5mcm	1mm	15mcm	2mm	25mcm	3mm	35mcm	4mm	45mcm	5mm																																				
<p>3. Enmarque de cálculo:</p> <p>La sucesión escrita en la tabla es lineal con razón constante de 3 mm.</p>	<p>Proporcionalidad lineal. La estudiante escribe en la primera tabla una sucesión que expresa la relación lineal entre elongación y número de CD, con una razón constante de 3 mm.</p> <p>Recurso físico de uniformidad en la banda y el supuesto de que el peso de los CD es el mismo.</p>	<p>Paola:</p> <p>Sistema de una banda: “En cada CD cambia su elongación si se sigue el procedimiento con las bandas de caucho esto se cambia ya que si hay más CD en las bandas estos van a seguir estirando hasta llegar al punto donde el caucho ya no da más”.</p> <table border="1" data-bbox="1066 867 1864 971"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>3mm</td><td>6mm</td><td>9mm</td><td>12mm</td><td>15mm</td><td>18mm</td><td>21mm</td><td>24mm</td><td>27mm</td><td>30mm</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3mm	6mm	9mm	12mm	15mm	18mm	21mm	24mm	27mm	30mm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	3mm	6mm	9mm	12mm	15mm	18mm	21mm	24mm	27mm	30mm																																				
<p>4. Mapeo físico :</p> <p>Existe un indicio de <i>p-prim</i> en el que la estudiante tiene la creencia de que cuando se colocan dos bandas en serie sólo se estira una de las dos.</p>	<p>La segunda tabla es idéntica a la primera.</p> <p>Recurso físico en el que el peso de los CD sólo afecta la banda de la cual están directamente colgadas (aunque la estudiante no lo dice con esas palabras).</p> <p>No se evidencia una buena lectura de la actividad, al contrario se evidencia una interpretación distinta de la actividad. Sin embargo existe un recurso físico</p>	<p>Paola:</p> <p>Sistema de dos bandas en serie: “Pasa lo similar del punto 5 ya que expliqué que si se sigue el procedimiento con las bandas de caucho esto se cambia, o sea que en este punto lo que sucedió fue que se puso otra banda de caucho y los CD pero al igual si la cantidad de CD aumenta demasiado las bandas de caucho no aguantarán más”.</p> <table border="1" data-bbox="1066 1230 1864 1344"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>3mm</td><td>6mm</td><td>9mm</td><td>12mm</td><td>15mm</td><td>18mm</td><td>21mm</td><td>24mm</td><td>27mm</td><td>30mm</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3mm	6mm	9mm	12mm	15mm	18mm	21mm	24mm	27mm	30mm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	3mm	6mm	9mm	12mm	15mm	18mm	21mm	24mm	27mm	30mm																																				

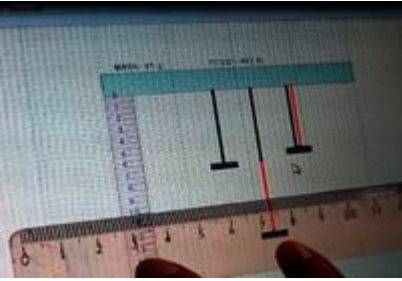
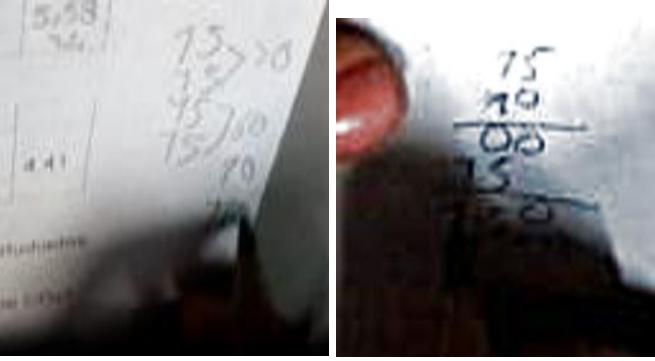
	<p>según el cual si se aumenta la cantidad de CD, la banda puede romperse, pero esta cantidad es superior a 10 para los tres sistemas.</p> <p>En la tercera tabla se repiten los valores por parejas. Para el sistema en paralelo, la estudiante interpreta que debe procederse suspendiendo el primer CD de una sola de las bandas, elongándose 3 mm. El segundo CD en la otra banda que también se elongará 3 mm. El tercer CD en la primera banda, que se elongará 6 mm y el cuarto CD en la segunda banda que la elongará 6 mm, y así sucesivamente. Esta es la razón por la que repite los datos en la tabla.</p>	<p>Sistema de dos bandas en paralelo: “Yo me imagino que si las bandas de caucho son paralelas y si no siguen la serie hacia abajo esto va a hacer que las bandas paralelas y los CD estiren igual ya que si tiene la misma distancia los dos CD pesarán igual”. Anexa un dibujo representando dos bandas separadas y escribe al lado de cada una “3 mm”</p> <table border="1" data-bbox="1060 430 1816 544"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>3mm</td> <td>3mm</td> <td>6mm</td> <td>6mm</td> <td>9mm</td> <td>9mm</td> <td>12mm</td> <td>12mm</td> <td>15mm</td> <td>15mm</td> </tr> </table>  <p>(El dibujo indica que se cuelga un CD de cada una de las bandas).</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3mm	3mm	6mm	6mm	9mm	9mm	12mm	12mm	15mm	15mm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	3mm	3mm	6mm	6mm	9mm	9mm	12mm	12mm	15mm	15mm														
<p>5. Enmarque de cálculo:</p> <p>La sucesión escrita en la primera tabla de la guía es lineal con razón constante de 5 mm</p>	<p>Sucesión lineal para una sola banda, con una razón constante de 5 mm, aunque en algunos casos la estudiante hace la respectiva conversión a cm.</p> <p>Recurso físico de uniformidad en la banda y el supuesto de que el peso de los CD es el mismo.</p>	<p>Kilarith:</p> <p>Sistema de una banda: “la relación que se observa es que cada elongación que estira la banda elástica al agregarle 1 CD es de 5 mm puesto que su peso hace que esta se elongue una muy pequeña cantidad, ya si le agrego más CD se va a estirar un poco más ya que el peso de los CD es de 5mm y ha de aumentar 5 líneas por cada uno”</p> <table border="1" data-bbox="1060 1161 1837 1307"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>5mm</td> <td>1cm</td> <td>1/5cm</td> <td>2cm</td> <td>2/5cm</td> <td>3cm</td> <td>3/5cm</td> <td>4cm</td> <td>4/5cm</td> <td>5cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	5mm	1cm	1/5cm	2cm	2/5cm	3cm	3/5cm	4cm	4/5cm	5cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	5mm	1cm	1/5cm	2cm	2/5cm	3cm	3/5cm	4cm	4/5cm	5cm														
<p>6. Mapeo físico:</p>	<p>Aparece una justificación de tipo físico para llenar la tabla.</p>	<p>Kilarith:</p>																						

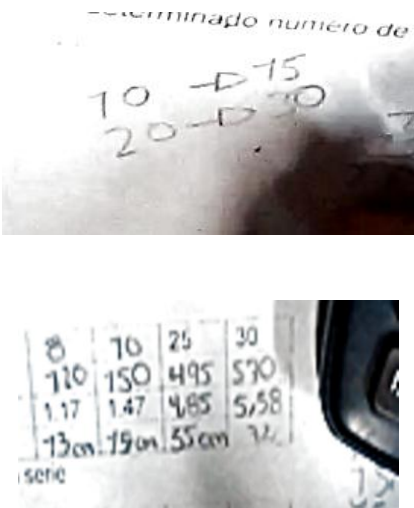
<p>Da relevancia a las características físicas de la banda, así como en la separación de las bandas que le da la configuración al sistema físico.</p>	<p>Para la estudiante al colocar dos bandas en serie, la elasticidad de la banda no es tan uniforme ya que construye una sucesión que tiene características de progresión aritmética (y cuya razón es, por cierto el doble de la evidenciada en la primera tabla), pero solo hasta el quinto CD a partir del cual la variación no es constante.</p> <p>Si se colocan las bandas en paralelo la elasticidad no es lineal.</p> <p>Se identifica un recurso físico en el sentido de que cada banda debe soportar menos peso si se colocan lo suficientemente separadas.</p> <p>La expresión “pesen menos”, se refiere a que los CD ejercen menos fuerza sobre cada banda individual, en el sistema en paralelo.</p>	<p>Sistema de dos bandas en serie: “La relaciones son que cada uno de los CD pasan a tener un peso de 0,5 mm hasta cierto punto, puesto que algunos varía en su peso 0,9 mm etc. Estos cambios hacen que las bandas se estiren más hasta llegar a un punto donde quede totalmente elongada pero no se alcanza a romper”.</p> <table border="1" data-bbox="1066 397 1787 516"> <tr> <th>No. CDs</th> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <th>Elongación</th> <td>1,5cm</td> <td>2,5cm</td> <td>3,5cm</td> <td>4,5cm</td> <td>5,5cm</td> <td>5,9cm</td> <td>6,2cm</td> <td>6,8cm</td> <td>7,5cm</td> <td>7,9cm</td> </tr> </table> <p>Sistemas de dos bandas en paralelo: “La relación que se observa es que la elongación es menor porque las bandas de caucho están separadas. Al estar de esta manera el peso de los CD pasan a ser mínimos ya que al estar separados los cauchos hace que los CD pesen menos y se estiren muy poco”</p> <table border="1" data-bbox="1066 727 1881 862"> <tr> <th>No. CDs</th> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <th>Elongación</th> <td>0,5 mm</td> <td>0,9 mm</td> <td>1 mm</td> <td>1,3 mm</td> <td>1,7 mm</td> <td>1 cm</td> <td>1,2 cm</td> <td>1,3 cm</td> <td>1,4 cm</td> <td>1,7 cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1,5cm	2,5cm	3,5cm	4,5cm	5,5cm	5,9cm	6,2cm	6,8cm	7,5cm	7,9cm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0,5 mm	0,9 mm	1 mm	1,3 mm	1,7 mm	1 cm	1,2 cm	1,3 cm	1,4 cm	1,7 cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	1,5cm	2,5cm	3,5cm	4,5cm	5,5cm	5,9cm	6,2cm	6,8cm	7,5cm	7,9cm																																				
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	0,5 mm	0,9 mm	1 mm	1,3 mm	1,7 mm	1 cm	1,2 cm	1,3 cm	1,4 cm	1,7 cm																																				

Anexo 2. Grupo # 1, experimento virtual

Experimento virtual Grupo # 1 IED SIS0



Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Mapeo físico: Usa un método para garantizar que las medidas queden tomadas con precisión: colocar la regla</p>	<p>Uso de la geometría para comparar dos segmentos: implementa un método para tomar la medida de la elongación en el que usa una regla real para hacer corresponder el extremo inferior de la banda con su proyección sobre la regleta</p>	<p>La estudiante dispone la regla horizontalmente para tomar con mayor precisión la medida.</p>

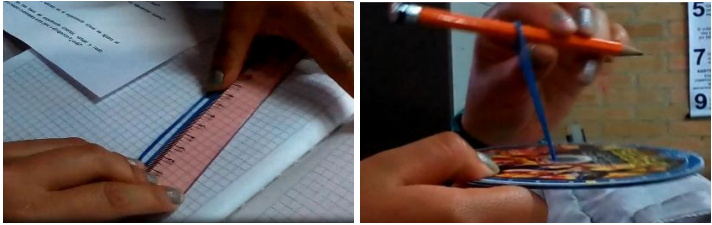
<p>de determinada forma geométrica.</p>	<p>virtual del archivo GeoGebra. Queda manifiesta una búsqueda de precisión en la medida.</p> <p>Usa representación de fracciones y números decimales al registrar los valores medidos.</p>	
<p>2. Enmarque de cálculo:</p> <p>La repetición de algoritmos y la confianza en las operaciones fundamentales de suma, multiplicación y división, garantizan que la labor está siendo bien realizada.</p>	<p>Recurso suma (escrita) para resolver una situación de tipo multiplicativo. Así, el recurso matemático multiplicación es débilmente ligado a la situación.</p> <p>Ejecución de algoritmos matemáticos para hacer operaciones y encontrar datos está fuertemente ligado a este tipo de problemas.</p> <p>La estudiante usa las unidades de medida propuestas por la simulación.</p> <p>Existe una diferenciación entre masa y peso de acuerdo con las unidades de medición para cada magnitud.</p> <p>Escritura de la respuesta en decimales ya que así lo presenta la calculadora. Aunque las respuestas tienen en su mayoría tres cifras decimales, solo escribe las dos primeras.</p>	 <p>La estudiante escribe en la tabla valores de peso y masa, mientras va escribiendo algunas operaciones en el margen de la hoja. Para calcular la masa de 8 CD suma de 15 en 15.</p> <p>Para calcular la masa de 10 CD inicialmente hizo una suma pero se equivocó, entonces hizo la multiplicación 15 por 10 usando el algoritmo largo.</p> <p>Luego la estudiante hace un cierto uso de proporcionalidad para encontrar el valor de una elongación correspondiente a un número de CD por fuera del intervalo presentado en la simulación: “con 10 CD son 15, con 20 son 30” luego mira un dato anterior, con “5 CD son 5 cm”, luego concluye: “con 25 CD son 35”. El error se propaga.</p>

		 <p>...terminado numero de</p> <p>10 → 15 20 → 30</p> <table border="1" data-bbox="1323 487 1711 690"> <tr><td>8</td><td>70</td><td>25</td><td>30</td></tr> <tr><td>110</td><td>150</td><td>495</td><td>570</td></tr> <tr><td>1.17</td><td>1.47</td><td>4.85</td><td>5.58</td></tr> <tr><td>13cm</td><td>19cm</td><td>55cm</td><td>72cm</td></tr> </table> <p>serie</p> <table border="1" data-bbox="1155 771 1837 917"> <tr><td>No. CDs</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td><td>70</td><td>25</td><td>30</td></tr> <tr><td>Masa (g)</td><td>60</td><td>90</td><td>45</td><td>135</td><td>120</td><td>150</td><td>495</td><td>570</td></tr> <tr><td>Peso (N)</td><td>0,58</td><td>0,88</td><td>0,44</td><td>1,32</td><td>1,17</td><td>1,47</td><td>4,85</td><td>5,58</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>14</td><td>16</td><td>3cm</td><td>9cm</td><td>8cm</td><td>10cm</td><td>25cm</td><td>30cm</td></tr> </table> <p>Con dos bandas en serie.</p> <p>Sin embargo después lo corrige (aunque el video no lo muestra).</p>	8	70	25	30	110	150	495	570	1.17	1.47	4.85	5.58	13cm	19cm	55cm	72cm	No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30	Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570	Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58	Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	10cm	25cm	30cm
8	70	25	30																																																			
110	150	495	570																																																			
1.17	1.47	4.85	5.58																																																			
13cm	19cm	55cm	72cm																																																			
No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30																																														
Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570																																														
Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58																																														
Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	10cm	25cm	30cm																																														
<p>3. Enmarque de autoridad :</p> <p>Para Ingrid existe una confianza en las medidas tomadas directamente del software.</p> <p>Kilarith confía en el conocimiento de Ingrid porque ella ha obtenido mejores resultados en matemáticas.</p>	<p>Conteo de centímetros.</p> <p>La estudiante Ingrid no incluye el 10 dentro de su conteo para medir, mientras que la estudiante Kilarith aparentemente si lo hace, pues cuenta 4.</p>	<p>Existe un diálogo entre Ingrid y Kilarith</p> <p>Ingrid mide la elongación para tres CD en el sistema en serie, para esto recurre a tomar la medida en la pantalla así: coloca tres CD y luego cuenta los cm desde 10 hasta 13 desplazando la regla real: “1, 2, 3” y coloca este valor en la tabla.</p> <table border="1" data-bbox="1155 1185 1879 1356"> <tr><td>No. CDs</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td><td>70</td><td>25</td><td>30</td></tr> <tr><td>Masa (g)</td><td>60</td><td>90</td><td>45</td><td>135</td><td>120</td><td>150</td><td>495</td><td>570</td></tr> <tr><td>Peso (N)</td><td>0,58</td><td>0,88</td><td>0,44</td><td>1,32</td><td>1,17</td><td>1,47</td><td>4,85</td><td>5,58</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>14</td><td>16</td><td>3cm</td><td>9cm</td><td>8cm</td><td>10cm</td><td>25cm</td><td>30cm</td></tr> </table> <p>Con dos bandas en serie.</p>	No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30	Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570	Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58	Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	10cm	25cm	30cm																
No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30																																														
Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570																																														
Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58																																														
Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	10cm	25cm	30cm																																														

		<p>Kilarith dice: “cuatro, ¿no?”</p> <p>Ingrid insiste: “No, no, tres”.</p> <p>Kilarith: “Bueno”</p>																																				
<p>4. Enmarque de autoridad:</p> <p>Los errores se propagaron debido a la mala interpretación de la estudiante y a su confianza excesiva en la aplicación.</p>	<p>Existe una inadecuada interpretación de la elongación, por lo que mide la longitud de las dos bandas y asumen este valor como la elongación del sistema.</p> <p>La confianza en la aplicación es tal que no se da cuenta que comete este error, aun cuando ha corregido otros lugares de la tabla.</p>	<p>Ingrid: “Con 4 CD la elongación es 14”, “con 6 son 16”</p> <table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>3</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>70</td> <td>25</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>Masa (g)</td> <td>60</td> <td>90</td> <td>45</td> <td>135</td> <td>120</td> <td>150</td> <td>495</td> <td>570</td> </tr> <tr> <td>Peso (N)</td> <td>0,58</td> <td>0,88</td> <td>0,44</td> <td>1,32</td> <td>1,17</td> <td>1,47</td> <td>4,85</td> <td>5,58</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>14</td> <td>16</td> <td>3cm</td> <td>9cm</td> <td>8cm</td> <td>170 cm</td> <td>75 cm</td> <td>30 cm</td> </tr> </table> <p>Con dos bandas en serie.</p> <p>Los valores erróneos registrados en las dos primeras columnas son el producto del error en los valores 4 CD y 6 CD, obtenidos por una apreciación errónea de la elongación en la aplicación.</p>	No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30	Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570	Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58	Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	170 cm	75 cm	30 cm
No. CDs	4	6	3	9	8	70	25	30																														
Masa (g)	60	90	45	135	120	150	495	570																														
Peso (N)	0,58	0,88	0,44	1,32	1,17	1,47	4,85	5,58																														
Elongación	14	16	3cm	9cm	8cm	170 cm	75 cm	30 cm																														

Anexo 3. Grupo #1, experimento real

Experimento real Grupo #1 IED SISO		
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Enmarque de autoridad :</p> <p>Cuando dice “<i>hay que tener en cuenta que las bandas no estén enrolladas porque esto les resta elongación</i>”, pone de manifiesto la dificultad para medir de manera precisa, debe garantizarse las condiciones adecuadas para que el experimento esté bien hecho. Acomodar los elementos del experimento real al modelo virtual para confiar en que las medidas</p>	<p>Uso adecuado de los submúltiplos del metro.</p> <p>Uso inadecuado de la regla al medir.</p> <p>Usa un recurso físico de equilibrio para intentar colocar los CD en posición horizontal y garantizar que el experimento real se parezca al experimento virtual.</p> <p>La estudiante usa un soporte horizontal: el lápiz para garantizar una semejanza con la disposición de los elementos observada en el experimento virtual, al</p>	<p>En este segmento, Ingrid toma las medidas de las elongaciones en el sistema de una banda individual al tiempo que describe el desarrollo que hace de esta tarea. Kilarith se limita a grabar el video y hacer algunos breves comentarios.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>

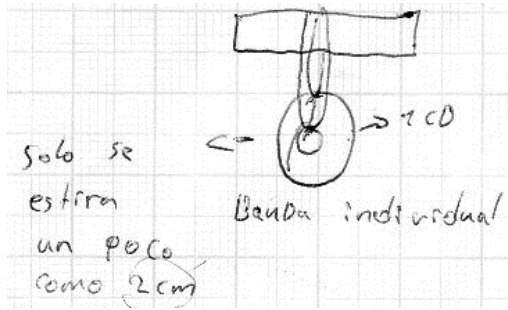
<p>sean adecuadas. Existe confianza en los resultados del experimento virtual</p>	<p>cual le otorga la autoridad, en el sentido de asumir que las medidas se tomarán con precisión si la disposición de los elementos se asemeja lo mejor posible ala forma presentada en el experimento virtual.</p>	<p>La estudiante toma la medida por comparación con la regla. Escribe la longitud de la banda en cm, para esto le da una forma recta. De esta manera obliga al elemento a comportarse de forma similar a las ideas previas surgidas del experimento virtual.</p> <p>La estudiante toma los dos extremos de la banda y los hace coincidir con el 1 de la regla y el 8. Hace una lectura errada y dice que la longitud de la banda es 8 cm. Luego toma la medida suspendiendo un CD, mide una longitud de “8 cm y 2 mm” es decir, comete un error sistemático en la medida de la longitud que evidencia cierto desconocimiento del uso del cero en la medición. Enuncia la longitud de la banda como 8cm y 2 mm, pero opta por expresar las elongaciones en milímetros.</p>  <p>La estudiante intenta reproducir las mismas condiciones del experimento virtual, incluyendo el equilibrio.</p>
<p>2. Mapeo físico:</p> <p>Aparece una <i>discusión</i> para decidir si el experimento real se acopla o no, al experimento virtual.</p> <p>Ingrid da a entender que el <i>applet</i> debería ajustarse a la realidad y no al contrario. Con esto, la estudiante supera el enmarque de autoridad que tenía en el experimento virtual.</p>	<p>Las medidas (lo numérico) de la longitud son fundamentales para determinar la semejanza entre los experimentos realizados.</p> <p>Los elementos físicos determinan las diferencias entre los experimentos, las medidas en el experimento real representan mayor nivel de dificultad que en el experimento virtual, que resulta más estable.</p> <p>La inestabilidad del sistema resulta en errores que no permiten determinar con</p>	<p>En este video las estudiantes justifican con sus palabras las preguntas formuladas al final de la guía del experimento real.</p> <p>Cada una expresa una afirmación y la sustenta.</p> <p>Kilarith: expresa que los experimentos son parecidos ya que el proceso llevado a cabo es esencialmente el mismo.</p> <p>Paola: Justifica las diferencias por la dificultad en la toma de las medidas en el experimento real, (lenguaje gestual que hace alusión al movimiento del sistema mientras se toma la medida).</p> <p>Ingrid: justifica las diferencias entre el experimento virtual y el experimento real puesto en que las medidas son muy diferentes,</p>

	claridad tales semejanzas. Recurso metacognitivo de la “discusión”	en unos casos se alarga más, tal vez por el peso de los CD. “El computador acertó en muy pocas cosas”.
<p>3. Mapeo físico:</p> <p>Observan que la sucesión de medidas no es una progresión lineal, existen variaciones que no se explican mediante la proporcionalidad lineal.</p>	<p>La realidad no puede ser medida con la misma precisión con la que se hacen cálculos matemáticos.</p> <p>Recurso metacognitivo de la “confusión” al momento de implementar el sistema físico lo que da lugar a un recurso metacognitivo de comparación.</p> <p>Buteler (2008) que puede dar origen a nuevas respuestas.</p>	<p>Las estudiantes hablan acerca de sus opiniones alrededor de una pregunta de la guía: “Una vez realizadas las tres fases del experimento (mental, virtual y real) ¿encuentran ustedes una relación matemática entre peso y elongación? ¿cuál?”</p> <p>Ingrid: <i>No existe ninguna relación matemática, digámoslo así no existe ninguna ecuación que relacione las dos variables ya que hasta tres CDs cuando estaban en serie se podría decir que la elongación es constante pero a partir de ahí el cambio es repentino.</i></p>

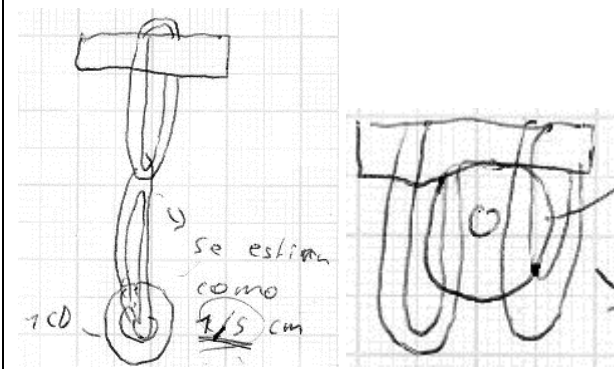
Anexo 4. Grupo #2, experimento mental

Experimento mental Grupo # 2 IED JGA																								
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes																						
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p>Obtiene la sucesión sumando 3cm a la primera elongación estimada.</p>	<p>El estudiante propone una sucesión aritmética con valor inicial de 2cm y razón de 3 cm.</p>	<p>Enrique: “No se estira tanto porque el peso del CD no pesa tanto entonces se estira poco”.</p> <table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2cm</td> <td>5cm</td> <td>8cm</td> <td>11cm</td> <td>14cm</td> <td>17cm</td> <td>20cm</td> <td>23cm</td> <td>26cm</td> <td>29cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2cm	5cm	8cm	11cm	14cm	17cm	20cm	23cm	26cm	29cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	2cm	5cm	8cm	11cm	14cm	17cm	20cm	23cm	26cm	29cm														
<p>2. Mapeo físico:</p> <p>Aparece la idea de una banda que no se elonga con regularidad al comienzo.</p> <p>Existe una comparación física en el comportamiento de las tres bandas, en el que muestra como en el primer</p>	<p>Existe un recurso de resistencia de la banda.</p> <p>Cuando se dispone de diferentes maneras las bandas resisten de forma diferente. Así cuando se disponen en serie resisten un poco más que cuando la banda está sola. Pero resisten más las bandas cuando están en paralelo.</p>	<p>Muestra un dibujo:</p>																						

sistema se estira un poco más con un CD, que en los otros 2 casos.



luego realiza otro dibujo para las bandas en serie y uno más para las bandas en paralelo:



Más adelante escribe: "pues un CD no pesa tanto y cuando coloca mayor de CD aumenta el peso de los CD y el caucho se estira demasiado que de pronto se rompa o mantiene el peso"

3. Enmarque de cálculo:

Se observa una sucesión con valor inicial 5 cm y razón constante de 5 cm/CD

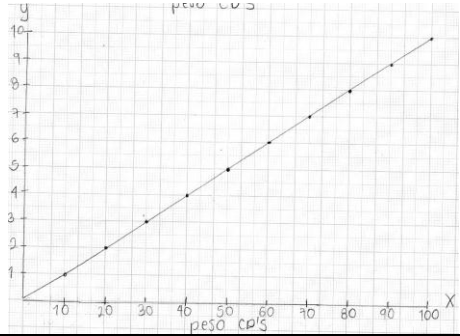
Recurso de proporcionalidad lineal.

La estudiante imagina la elongación como una medida del peso a juzgar por la representación gráfica que realiza.

La estimación es bastante grande para el peso de un CD o bien se supone que la banda elástica se alarga con bastante facilidad.

Para una sola banda: "El peso de los CD aumenta el doble al colocar más CD y así la banda se estira más"

No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elongación	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm

<p>4. Mapeo físico:</p> <p>La estudiante recurre a un argumento relacionado con el peso.</p>	<p>Aparece el mismo recurso de proporcionalidad que en el caso de una sola banda. Pero esta vez esta guiado por un recurso físico en el que, las dos bandas se comportan igual que una.</p> <p>Además hay un <i>p-prim</i> en el que la estudiante no distingue el peso de la banda de la elongación como lo indica el nombre del eje horizontal “Peso CDS”, que hace referencia a la elongación en cm.</p> <p>A diferencia de otras gráficas expuestas, la estudiante supone que para 0 CD, la elongación es 0 cm como lo muestra la gráfica.</p>	<p>Laura:</p> <p>Para dos bandas en serie: “El peso del CD aumenta el doble al colocar más CD y así la banda estira más”</p> <table border="1" data-bbox="1165 337 1890 402"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>10cm</td> <td>20cm</td> <td>30cm</td> <td>40cm</td> <td>50cm</td> <td>60cm</td> <td>70cm</td> <td>80cm</td> <td>90cm</td> <td>100cm</td> </tr> </table> <p>Para dos bandas en paralelo: “El peso del Cd será el mismo que en banda individual, no importa si hay otra banda sosteniendo el CD, la elongación será la misma” (Idéntica tabla a la del sistema de una banda).</p> <p>La estudiante construye sus gráficas así (sistema en serie):</p> 	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	10cm	20cm	30cm	40cm	50cm	60cm	70cm	80cm	90cm	100cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	10cm	20cm	30cm	40cm	50cm	60cm	70cm	80cm	90cm	100cm														
<p>5. Enmarque de cálculo:</p> <p>Presenta una sucesión lineal con valor inicial 1 cm y razón constante igual.</p> <p>Se observa proporcionalidad lineal en cada una de las tablas.</p>	<p>Proporcionalidad lineal con valor con razón constante de 1 cm.</p> <p>También emplea un modelo de proporcionalidad lineal directa entre la elongación y el número de bandas en serie.</p>	<p>Valentina:</p> <p>Para una sola banda: “ Cuando ponemos 1 CD se estirará un cm y si colocamos 2 se estirará el doble”</p> <table border="1" data-bbox="1165 1104 1890 1193"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>1cm</td> <td>2cm</td> <td>3cm</td> <td>4cm</td> <td>5cm</td> <td>6cm</td> <td>7cm</td> <td>8cm</td> <td>9cm</td> <td>10cm</td> </tr> </table> <p>Para dos bandas en serie: “Teniendo una banda unida con otra, la elongación será mayor, ya que se estirará más, entonces ya que son dos bandas tendrá el doble que con una banda”</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1cm	2cm	3cm	4cm	5cm	6cm	7cm	8cm	9cm	10cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	1cm	2cm	3cm	4cm	5cm	6cm	7cm	8cm	9cm	10cm														


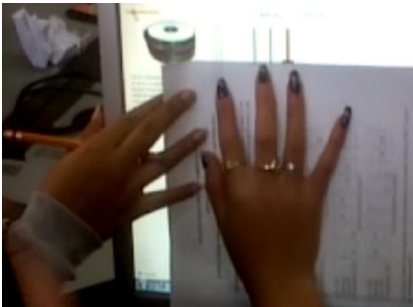
		<table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2cm</td> <td>4cm</td> <td>6cm</td> <td>8cm</td> <td>10cm</td> <td>12cm</td> <td>14cm</td> <td>16cm</td> <td>18cm</td> <td>20cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2cm	4cm	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	2cm	4cm	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm																																				
<p>6. Mapeo físico:</p> <p>Uso de proporcionalidad en cada tabla, pero no en la relación entre los tres sistemas. Hay una disminución de tan sólo 1 mm con respecto a la tabla de una sola banda.</p>	<p>Aparece la noción de fuerza elástica de las bandas y la noción de dos fuerzas equitativas.</p> <p>La estudiante considera la proporcionalidad directa entre la elongación y el número de CD que se van colocando.</p> <p>La representación decimal y el sistema métrico decimal se observa como un recurso fuertemente ligado, debido al buen uso de la coma y al nivel de aproximación en la estimación de la medida.</p>	<p>Valentina:</p> <p>Para dos bandas en paralelo:</p> <p><i>“En este caso las dos bandas nos aportan una fuerza equitativa y su elongación será más baja comparada con las otras dos”</i></p> <table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>0,9cm</td> <td>1,8cm</td> <td>2,7cm</td> <td>3,6cm</td> <td>4,5cm</td> <td>5,4cm</td> <td>6,3cm</td> <td>7,2cm</td> <td>8,1cm</td> <td>9cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0,9cm	1,8cm	2,7cm	3,6cm	4,5cm	5,4cm	6,3cm	7,2cm	8,1cm	9cm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	0,9cm	1,8cm	2,7cm	3,6cm	4,5cm	5,4cm	6,3cm	7,2cm	8,1cm	9cm																																				
<p>7. Mapeo físico:</p> <p>Imagina un gancho con el cual debe colgar el CD y le da importancia a su peso</p>	<p>Tiene en cuenta el peso de un gancho que imagina para colgar el primer CD, por esto imagina que un CD más el gancho elonga la cuerda 3cm.</p>	<p>Sharon:</p> <p>Respuesta 1: “1 cm”</p> <p>Respuesta 2: “El doble de un CD pero teniendo en cuenta el gancho y su proporción”</p> <p>Por esto comienza la tabla con 3 cm, en lugar de 1 cm (ver tabla en el siguiente cuadro)</p>																																												
<p>8. Enmarque de cálculo:</p> <p>A partir de la primera cantidad suma un mismo valor para obtener la sucesión.</p>	<p>A partir del primer CD llena la tabla con una sucesión de números impares con razón constante de 2 cm/CD.</p> <p>Usa números naturales para estimar sus medidas y unidades de cm. luego usa la representación decimal correctamente para expresar la mitad de estas cantidades en la siguiente tabla.</p>	<p>Sharon: Para una banda:</p> <table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>3cm</td> <td>5cm</td> <td>7cm</td> <td>9cm</td> <td>11cm</td> <td>13cm</td> <td>15cm</td> <td>17cm</td> <td>19cm</td> <td>21cm</td> </tr> </table> <p>Para dos bandas en serie:</p> <table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>1,5cm</td> <td>2,5cm</td> <td>3,5cm</td> <td>4,5cm</td> <td>5,5cm</td> <td>6,5cm</td> <td>7,5cm</td> <td>8,5cm</td> <td>9,5cm</td> <td>10,5cm</td> </tr> </table> <p>Respuesta 7: “Que la reducción del peso es a la mitad del CD” (Hace referencia a la reducción de la elongación en la tabla)</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3cm	5cm	7cm	9cm	11cm	13cm	15cm	17cm	19cm	21cm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1,5cm	2,5cm	3,5cm	4,5cm	5,5cm	6,5cm	7,5cm	8,5cm	9,5cm	10,5cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	3cm	5cm	7cm	9cm	11cm	13cm	15cm	17cm	19cm	21cm																																				
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	1,5cm	2,5cm	3,5cm	4,5cm	5,5cm	6,5cm	7,5cm	8,5cm	9,5cm	10,5cm																																				

		Para dos bandas en paralelo: Supone que es el doble de la elongación registrada en la primera tabla para 1 CD pero luego llena una tabla con una razón de 2cm/CD:																						
		<table border="1"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>6cm</td> <td>8cm</td> <td>10cm</td> <td>12cm</td> <td>14cm</td> <td>16cm</td> <td>18cm</td> <td>20cm</td> <td>22cm</td> <td>24cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm	22cm	24cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm	22cm	24cm														



Anexo 5. Grupo # 2, experimento virtual


Experimento virtual Grupo #2 IED JGA

Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p>El estudiante realiza sumas sucesivas, aunque no una multiplicación directa.</p>	<p>Para llenar los datos de masa y peso, el estudiante recurre a la suma, más que a una multiplicación directa. Se identifica un recurso de suma fuertemente ligado.</p>	<p>Se da un diálogo entre el profesor, Enrique y Cesar, estudiante de otro grupo:</p> <p>Profesor: <i>¿Cómo fue que hizo el cálculo?</i></p> <p>Enrique: <i>pues masa de 10 son 150.</i></p> <p>Cesar: <i>La masa de 10 son 150, él lo duplicó.</i></p> <p>Cesar: <i>¿Enrique sólo sumo o multiplicó? Ah, usted los sumó, tenía que multiplicarlo...</i></p> <p>Profesor: <i>¿Cómo sumó?</i></p> <p>Enrique: <i>pues, 150 (masa en gramos de 10 CD), más 150 son 300 y 75 son 375 (masa en gramos de 25 CD)</i></p>

		 <p>(Hace en la calculadora la operación 150+150) Obtiene 300 y luego suma la masa de 5 CD: 75 g y lo apunta en la tabla.</p>
<p>2. Mapeo físico: Al estudiante, igual que en el experimento mental le parece relevante comparar las tres tablas correspondientes a los tres sistemas.</p>	<p>Basado en el experimento mental, intenta construir una relación entre las tres tablas. Usa un recurso metacognitivo de “comparación” entre los tres sistemas, similar a lo que realizó en el experimento mental.</p>	<p>Enrique: <i>“Se puede predecir la elongación a partir de un análisis, donde llegamos a la conclusión, y cada elongación de cada número de CD y cada (¿tabla?) da un número de resultado:</i> <i>tabla 1: 0,5</i> <i>tabla 2: 1</i> <i>tabla 3: 0,25 “</i></p>
<p>3. Mapeo físico: Usa elementos geométricos para garantizar la precisión en su método de medida</p>	<p>Busca recursos de precisión en la medida, para esto recurre a ciertos elementos de geometría tal como la comparación entre la longitud de dos segmentos con cierto sentido de paralelismo o perpendicularidad.</p>	 <p>Sharon: <i>Coloca una hoja de papel en la pantalla para garantizar que su medida es precisa.</i></p>

Anexo 6. Grupo # 2, experimento virtual

Experimento Real Grupo #2 IED JGA		
Enmarques epistémicos : Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Enmarque de autoridad: El estudiante busca equilibrar el CD en posición horizontal, como aparece en el experimento virtual. Esto garantiza que la medida esté bien tomada.</p>	<p>Métodos de medida: Equilibrio de un objeto, el estudiante busca que el experimento real sea similar al experimento virtual, para esto emplea un soporte realizado con una hoja de papel, como se observa en la fotografía.</p>	<p>Enrique: El estudiante intenta colocar el CD en posición horizontal y en equilibrio a semejanza del experimento virtual.</p> 
<p>2. Mapeo físico: Los estudiantes buscan un método cuya precisión les permita confiar en las medidas tomadas.</p>	<p>Uso del instrumento de medida: la regla. Está fuertemente ligado al recurso del sistema métrico decimal.</p> <p>Se recurre a un recurso de precisión en la medida: Este método tiene ventajas frente a los observados en otros grupos, porque en este caso la longitud de la banda es medida en toda su extensión, lo que no ocurre en otros métodos. Así que puede asumirse que el grupo tiene un recurso de “evitar el error en el experimento”, un recurso metacognitivo “hacerlo de esta manera me permite obtener mejores resultados”</p>	 <p>Los estudiantes Laura y Enrique toman la medida usando un método bastante preciso, mientras Valentina da algunas sugerencias para evitar el error.</p>

<p>3. Mapeo físico:</p> <p>Los estudiantes deciden cuál parte del sistema es el adecuado para medir y cual puede despreciarse a la hora de tomar la medida.</p>	<p>Los estudiantes ahora reconocen que el experimento real es diferente a la aplicación pero que en esencia deben medir la longitud de una sola banda. La segunda banda usada para amarrar los CD, también se estira pero esta longitud no es tenida en cuenta. Usa un recurso físico para aislar un sistema. por esto miden sólo desde el nudo entre las dos bandas</p>	 <p>Laura y Enrique ubican el cero de la regla justo en el nudo entre las dos bandas usadas para realizar el montaje.</p>
<p>4. Enmarque de cálculo:</p> <p>Uso de suma, multiplicación para responder las preguntas y llenar las tablas.</p>	<p>Uso del recurso de la proporcionalidad y la suma según muestran las respuestas 3a, 3b, y de proporcionalidad (sin sumar) en la respuesta 3c.</p> <p>Buen uso del recurso sistema decimal.</p>	<p>Los estudiantes usan proporcionalidad para estimar elongaciones para valores por fuera del intervalo presentado considerado en las tablas. Así, por ejemplo, para estimar la elongación de una banda con 25 CD, los estudiantes hacen uso del valor obtenido en el experimento para 10 CD: 5,3 mm lo multiplican por 2, obtienen 10,6 mm y luego le suman la elongación correspondiente a 5 CD de la misma tabla: 2 mm, de ahí el resultado 12,6</p>

Anexo 7. Grupo #3, experimento mental

Experimento Mental (grupo de estudio #3 IED SISO)		
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p>La estudiante acude a una forma de generar los diferentes términos</p>	<p>Para una banda, presenta una sucesión aritmética de razón 1 mm y valor inicial 2 mm. Así, para 9 CD la elongación registrada es de 10 mm. Sin embargo, para 10 CD escribe como elongación 1 cm.</p>	<p>Gelen:</p> <p>Sistema de una banda: <i>“Observo que cuando su peso aumenta la elongación de la banda será de 1 mm más, cuando llegamos a 10 CD su elongación será de 1 cm”</i></p>

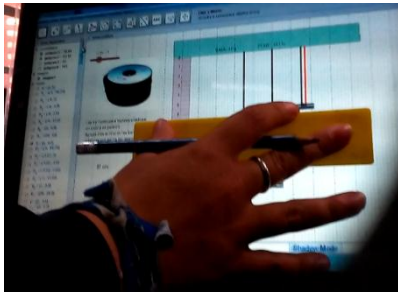
<p>de la sucesión consistente en sumar de 1 mm en 1 mm</p>	<p>Aparentemente, para la estudiante son medidas diferentes, lo cual indicaría que el recurso de medida no está fuertemente ligado.</p> <p>La estudiante utiliza exclusivamente números naturales.</p>	<table border="1" data-bbox="1188 207 1850 305"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2mm</td> <td>3mm</td> <td>4mm</td> <td>5mm</td> <td>6mm</td> <td>7mm</td> <td>8mm</td> <td>9mm</td> <td>10mm</td> <td>1cm</td> </tr> </table> <p>¿Qué relación observa entre los datos de la tabla?</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	1cm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	1cm																																				
<p>2. Mapeo físico:</p> <p>Aunque construye sucesiones obtenidas sumando la misma constante repetidas veces, el sustento que da a este procedimiento es claramente físico, pues justifica las elongaciones presentadas por las características físicas de bandas y CD.</p>	<p>Las tablas obtenidas responden a una progresión aritmética.</p> <p>Para dos bandas en serie, la estudiante construye una sucesión idéntica a la del sistema con una banda.</p> <p>En el sistema de dos bandas en paralelo, la estudiante presenta un sucesión lineal de razón 0,5 mcm y valor inicial 0.</p> <p>Para el sistema en serie, usa los mismos valores numéricos y unidades de medida que en el sistema individual.</p> <p>En el sistema en paralelo, usa números decimales usando la coma e introduce las unidades mcm (que tal vez tomó por comunicación con la estudiante Ingrid, del grupo #1).</p>	<p>Gelen:</p> <p>Sistema de dos bandas en serie: “Si nos fijamos en las dos bandas, tomándola[s] como una sola, su elongación será la misma porque el peso es igual, solo que el caucho es más largo y su elongación no cambia al milímetro que estira”.</p> <table border="1" data-bbox="1188 594 1892 691"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2mm</td> <td>3mm</td> <td>4mm</td> <td>5mm</td> <td>6mm</td> <td>7mm</td> <td>8mm</td> <td>9mm</td> <td>10mm</td> <td>1cm</td> </tr> </table> <p>¿Qué relaciones encuentra entre los datos de la tabla?</p> <p>Sistemas de dos bandas en paralelo: “la relación es que el peso será mucho menos porque ya son dos bandas que sostendrán el peso del CD más o menos se estarían dividiendo el peso, por eso será más poco el peso, prácticamente ya no se elongaría 1 mm sino un 0,5 micrómetros”.</p> <table border="1" data-bbox="1188 935 1892 1032"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>0</td> <td>0,5mcm</td> <td>1mcm</td> <td>1,5mcm</td> <td>2mcm</td> <td>2,5mcm</td> <td>3mcm</td> <td>3,5mcm</td> <td>4mcm</td> <td>4,5mcm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	1cm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0	0,5mcm	1mcm	1,5mcm	2mcm	2,5mcm	3mcm	3,5mcm	4mcm	4,5mcm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	1cm																																				
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	0	0,5mcm	1mcm	1,5mcm	2mcm	2,5mcm	3mcm	3,5mcm	4mcm	4,5mcm																																				
<p>3. Mapeo físico:</p> <p>La estudiante presenta en sus tres tablas sucesiones crecientes que no siguen una regla de formación definida y las sustenta (en los tres casos) tomando como referente el ajuste entre los valores numéricos de las elongaciones y los pesos de los CD, los cuales considera que no son constantes. La estudiante</p>	<p>En el sistema individual la estudiante presenta una sucesión creciente pero no lineal ya que no sigue una regla clara de formación.</p> <p>(En la mayoría de los demás casos en el sistema de una banda, prima el enmarque de cálculo)</p> <p>Para el sistema en serie, los valores son iguales o muy cercanos a la mitad de los que</p>	<p>Camila:</p> <p>Sistema de una banda individual: Respuesta 2: “Pienso que la elongación dependería del peso de cada CD y en mis cálculos se estiraría más o menos 0,2 mm porque no todos los CD tienen la misma masa, entonces su peso variaría a medida de ir poniendo más CD”</p> <p>Respuesta 3 “Como los CD no tiene la misma masa según lo que yo pienso, la elongación no es exacta o el doble de la primera (se refiere al caso en el que se suspende de la banda</p>																																												

<p>confía más en esas diferencias. Debido a esto no se garantiza la linealidad.</p>	<p>registró en el sistema de una banda individual.</p> <p>La representación numérica que utiliza es la de números decimales usando el punto decimal, lo cual indica cierta consciencia de los números decimales que no se observa en otros estudiantes, quienes limitan el recurso a números naturales.</p> <p>La estudiante no escribe unidades de medida en ninguna de las tres tablas, sin embargo se infiere que se trata de milímetros, puesto que en la pregunta 3 (estimación de la banda al colocar 2 CD. Ver cita).</p> <p>El recurso al que más da valor es el de masa y peso de los CD, se concentra en el hecho de que los CD no son equivalentes en masa o peso, aunque deja claro que estos dos conceptos son distintos, no es claro si tiene comprensión de tal diferencia.</p>	<p>un solo CD), por lo tanto, la elongación sería aproximadamente 1,5 mm”.</p> <p>“Se observa que varían mucho por el peso de cada CD, esto nos lleva a pensar que es cierto que a medida que se cuelgan de ellos más CD va aumentando el peso sin ninguna secuencia”</p> <table border="1" data-bbox="1188 428 1856 521"> <tr><th>No. CDs</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><th>Elongación</th><td>0,2</td><td>1,5</td><td>3</td><td>5</td><td>6,6</td><td>8</td><td>8,5</td><td>9</td><td>9,6</td><td>11,6</td></tr> </table> <p>Sistema de dos bandas en serie: La estudiante no escribió una justificación. Sin embargo, los términos de la sucesión que construye son, en general, el doble de los que presenta en la tabla para el sistema de una banda individual.</p> <table border="1" data-bbox="1188 704 1856 797"> <tr><th>No. CDs</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><th>Elongación</th><td>0,5</td><td>3</td><td>6</td><td>10</td><td>12,5</td><td>15</td><td>19,6</td><td>19</td><td>21</td><td>23,2</td></tr> </table> <p>Sistema de dos bandas en paralelo: “ya que el peso se reparte entre cada banda por lo tanto se disminuye el peso haciendo que quede más o menos por la mitad de los pesos de la primera tabla”.</p> <table border="1" data-bbox="1188 980 1856 1073"> <tr><th>No. CDs</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><th>Elongación</th><td>0,1</td><td>0,1</td><td>1,5</td><td>1,5</td><td>1,3</td><td>4</td><td>14</td><td>14</td><td>5,2</td><td>5,9</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0,2	1,5	3	5	6,6	8	8,5	9	9,6	11,6	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0,5	3	6	10	12,5	15	19,6	19	21	23,2	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0,1	0,1	1,5	1,5	1,3	4	14	14	5,2	5,9
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	0,2	1,5	3	5	6,6	8	8,5	9	9,6	11,6																																																										
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	0,5	3	6	10	12,5	15	19,6	19	21	23,2																																																										
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	0,1	0,1	1,5	1,5	1,3	4	14	14	5,2	5,9																																																										
<p>4. Enmarque de cálculo:</p> <p>La estudiante construye una tabla cuya descripción se basa en los cambios dados en las cantidades presentadas de acuerdo con la operación matemática que permite obtenerlas.</p>	<p>Proporcionalidad lineal: para el sistema individual, la estudiante presenta una sucesión lineal de razón constante 1 mm. En el caso del sistema de dos bandas en paralelo, la estudiante construye una sucesión aritmética de valor inicial 0 y razón 0,5 mcm (micrómetros).</p> <p>Los valores numéricos que usa son todos números naturales. En la última tabla</p>	<p>Paula:</p> <p>Sistema de una banda individual: “Que siempre que pongamos un Cd más se aumentaría un mm y cuando se pongan 10 Cd se elongará 1 cm”</p> <table border="1" data-bbox="1188 1273 1856 1365"> <tr><th>No. CDs</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><th>Elongación</th><td>1mm</td><td>2mm</td><td>3mm</td><td>4mm</td><td>5mm</td><td>6mm</td><td>7mm</td><td>8mm</td><td>9mm</td><td>10mm</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm																																												
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm																																																										

	<p>contiene números decimales que usan indistintamente la coma y el punto decimal. La representación numérica es por tanto, un recurso débilmente ligado.</p> <p>La estudiante presenta en la tercera tabla medidas que no corresponden a la idea que expresa en su respuesta escrita (ver Cita). Con un CD, la banda se elonga 1 mm, por tanto la mitad es 0,5 mm o 5 mcm, de acuerdo con lo que las estudiantes han llamado micrómetros. Esto indica que el recurso de medida no está fuertemente ligado.</p>	<p>Sistema de dos bandas en paralelo: “Ya que hay dos banditas en paralelo, con el primer CD no se va a elongar, con el segundo CD se elonga 0,5 micrómetros, la mitad de lo que se elonga con una sola banda y por cada CD que se agregue se elonga 0,5 micrómetros más”</p> <table border="1" data-bbox="1186 389 1837 487"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>0</td> <td>0,5 mm</td> <td>1,5</td> <td>2</td> <td>2,5</td> <td>3</td> <td>3,5</td> <td>4</td> <td>4,5</td> <td>5</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	0	0,5 mm	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	0	0,5 mm	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5														
<p>5. Mapeo físico:</p> <p>Para el sistema de dos bandas en paralelo, la estudiante construye la tabla sustentando su construcción en la fidelidad entre los valores registrados y la elongación de las bandas.</p>	<p>Presenta una sucesión idéntica a la del sistema con una banda, el sistema físico es equivalente al primero, por eso repite la misma tabla: Dos bandas en serie se elongan igual que una.</p> <p>En las sucesiones presentadas, los valores numéricos son naturales.</p> <p>Usa el recurso de las unidades del sistema métrico decimal: milímetros.</p>	<p>Sistema de dos bandas en serie:</p> <p>“El hecho de que hayan dos banditas no significa que cuando se pongan los CD aumente más su peso, va a seguir elongándose 1 mm, si se ponen 2 Cd se elonga 2 mm porque las dos banditas es como si tuviéramos una sola”.</p> <table border="1" data-bbox="1186 828 1837 925"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>1 mm</td> <td>2 mm</td> <td>3 mm</td> <td>4 mm</td> <td>5 mm</td> <td>6 mm</td> <td>7 mm</td> <td>8 mm</td> <td>9 mm</td> <td>10 mm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	10 mm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
Elongación	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	10 mm														

Anexo 8. Grupo # 3, experimento virtual


Experimento Virtual (grupo de estudio #3 IED SISO)		
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes
<p>1. Mapeo físico:</p> <p>Acuden a un método geométrico para garantizar la precisión en la medida.</p>	<p>Usa una regla para garantiza la precisión en la medida.</p> <p>Uso de Geometría para comparar dos segmentos (el de la banda en el <i>applet</i> y el de la regleta virtual).</p>	<p>La estudiante Gelen llena la primera tabla con ayuda de la calculadora.</p>


		 <p>La estudiante Paula le ayuda a manipular el <i>applet</i> y le indica la elongación correspondiente a determinado número de CD para que Gelen la registre en la tabla.</p>
<p>2. Enmarque de autoridad:</p> <p>Cuando la tabla les ofrece dudas acerca de los datos que deben registrarse, acuden a preguntarle a la estudiante Ingrid del grupo #1.</p>	<p>Usa números decimales al registrar los valores medidos ya sea usando la calculadora u observando el valor en el <i>applet</i>. Sin embargo solo en una de las celdas, en la que debían escribir 4,5 cm, la estudiante escribió $\frac{4}{5}$, lo que indica que no está fuertemente ligado el recurso de representación numérica</p>	<p>En este segmento se logra identificar interacción con el grupo #1, puesto que entre los minutos 2:07 y 2:15, se escucha el siguiente diálogo:</p> <p>Gelen: <i>“Ingrid, ¿qué números puso en los últimos dos, arriba en el número de CD?”</i></p> <p>Ingrid: <i>“900 y 750”</i></p> <p>Gelen <i>“no, no, no, pero en el número de CD”</i></p> <p>Ingrid <i>“[ininteligible] y 50”</i></p> <p>Paula <i>“¿por qué tan altos?”</i></p> <p>Ingrid <i>“... y el profe me dijo que estaba bien”</i></p>
<p>3. Mapeo físico:</p> <p>La estudiante intenta representar coherentemente las medidas observadas en el <i>applet</i> o aplicación</p>	<p>Los recursos débilmente ligados de la representación decimal y la medición se vinculan y se hacen más fuertes en tanto que aparentemente no han sido trabajados de forma conjunta.</p>	<p>Las estudiantes están registrando en la tabla las elongaciones para el sistema de dos bandas en paralelo. Observan que para 1 CD la elongación es la mitad de medio centímetro, o sea 0,25 cm, y para 2 CD es de medio centímetro, o sea 0,5 cm. Para 3 CD, Paula observa que la elongación es 0,5 cm más 0,25 cm, pero no sabe cómo escribirlo en decimales. Le pregunta al profesor, desarrollándose el siguiente diálogo:</p> <p>Paula: <i>Profe, está en 0,5 y corre la mitad de la mitad</i></p> <p>Profesor: <i>O sea 0,5 más 0,25</i></p>

		<p>Paula: <i>o sea que eso da 0,30</i></p> <p>Profesor: <i>¿0,5+0,25 es 0,30?</i></p> <p>Paula: <i>25 y 5...</i></p> <p>Profesor: <i>O sea que para usted 0,5 es menor que 0,25?</i></p> <p>Paula: <i>No, es mayor.</i></p> <p>Profesor: <i>Entonces 0,25 más 0,5 no puede ser 0,30</i></p> <p>Gelen: <i>Es 0,75</i></p> <p>Paula: <i>Es 0,75</i></p>
<p>4. Enmarque de cálculo:</p> <p>Repetición de un procedimiento algorítmico (cálculo del peso).</p> <p>Identificó una regularidad entre las variables número de CD y elongación, luego de registrar los valores en la tabla.</p>	<p>Existe un recurso de aplicación algorítmica.</p> <p>Se observa un recurso de proporcionalidad entre dos variables (elongación y número de CD)</p>	<p><i>Se observa a Paula y Camila instando a Gelen a explicar lo que hizo en la tabla. Gelen lo dice en forma muy breve:</i></p> <p>Gelen: <i>“pues que se multiplica por 9,8 y se divide por 1000 y así da...”</i></p> <p>Paula: <i>“el peso”</i></p> <p>Gelen: <i>“el número del peso”</i></p> <p>Paula: <i>“¿cómo sacó la elongación?”</i></p> <p>Gelen: <i>“la elongación, pues le saqué la mitad”.</i></p>
<p>5. Enmarque de cálculo:</p> <p>Se realizan varios cálculos y a partir de ellos se induce una afirmación de tipo para cada sistema.</p>	<p>Las estudiantes identifican que el cambio en la elongación es constante según se aumenta el número de CD. De igual manera, logran identificar una relación numérica entre el número de CD y la elongación correspondiente (generalización). Lo mismo ocurre para establecer una relación numérica entre la masa y el número de CD.</p> <p>Recurso metacognitivo de comparación.</p>	<p>Escrito grupal:</p> <p><i>“Se puede predecir ya que sabemos cuánto es la elongación en cada tabla, por ejemplo en la primera tabla su elongación es de 1 cm y medio (quiso decir medio cm según lo muestra la tabla), en la segunda tabla su elongación es la misma que el número de CD es decir que por cada CD aumenta 1 cm y en la tercera tabla se elonga $\frac{1}{4}$ de cm por cada CD”</i></p> <p><i>“Se calcula dividiendo por el valor de la elongación (se refiere a la elongación por cada CD), en este caso la primera tabla se divide por dos, en la segunda por uno y en la tercera se divide por cuatro”</i></p>

		“Sí se puede predecir porque sabemos el peso de los CD y si nos dan determinado número de masa lo podemos dividir por los 15 g y se obtiene el número de CD”.
--	--	---

Anexo 9. Grupo # 3, experimento real

Experimento Real (grupo de estudio #3 IED SISO)																																														
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes																																												
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p>Operan correctamente para la primera tabla pero en la segunda tabla olvidan dividir por 1000.</p> <p>En la tercera tabla no existe claridad de que el algoritmo haya sido bien reproducido, pues no todos los valores del peso son correctos.</p>	<p>Multiplicación y división. Algoritmo para obtener el peso de un objeto, dada su masa en gramos.</p>	<p>En la primera tabla se evidencia un cálculo básico de multiplicación y división para obtener la masa y el peso.</p> <table border="1" data-bbox="1108 695 1822 852"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Masa</td> <td>15</td> <td>30</td> <td>45</td> <td>60</td> <td>75</td> <td>90</td> <td>105</td> <td>120</td> <td>135</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>Peso</td> <td>147</td> <td>294</td> <td>441</td> <td>588</td> <td>735</td> <td>882</td> <td>1029</td> <td>1176</td> <td>1323</td> <td>1470</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>0,0</td> <td>0,3</td> <td>0,6</td> <td>0,9</td> <td>1,3</td> <td>1,6</td> <td>1,9</td> <td>2,6</td> <td>3,3</td> <td>3,6</td> </tr> </table> <p>Con una banda</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Masa	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	Peso	147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323	1470	Elongación	0,0	0,3	0,6	0,9	1,3	1,6	1,9	2,6	3,3	3,6
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Masa	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150																																				
Peso	147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323	1470																																				
Elongación	0,0	0,3	0,6	0,9	1,3	1,6	1,9	2,6	3,3	3,6																																				
<p>2. Mapeo físico:</p> <p>Aplica un método de medición de la longitud. Aunque es errado, todas lo validan</p>	<p>Comparación de dos segmentos rectilíneos.</p>	<p>Las bandas se sostienen con la mano. La medida se toma a partir del 1 en la regla como lo muestra el vídeo</p> 																																												

<p>3. Enmarque de autoridad:</p> <p>Las estudiantes consideran que la longitud de la banda sin CD debe tomarse dándole forma recta, de acuerdo con lo observado en el <i>applet</i>.</p>	<p>La visualización del experimento a través del <i>applet</i>.</p> <p>La longitud natural de la banda tiene sentido sólo si está toma una forma recta (otros grupos no acuden a este tipo de recurso, sólo miden su longitud suspendiendo la banda de un esfero por ejemplo). Este enmarque de autoridad da lugar al valor negativo de la elongación que fue presentado en la tercera tabla ya que el haber estirado inicialmente las bandas incidió en que la elongación desde el primer Cd es negativa (-0,3 cm), y para el segundo CD (0 cm). A pesar de este aparente error, este hecho es indicio de su buena comprensión del concepto de elongación.</p>	<p>Se observa el método de medición de las estudiantes. Inicialmente disponen la banda con el gancho para tomar la medida con el primer CD. Luego se percatan de que necesitan conocer la longitud de la banda sola sin ningún CD suspendido. Las estudiantes miden la longitud de la banda sin remover el CD del sistema, pero intentando darle forma alargada a la banda.</p> <p>Gelen mantiene la regla vertical mientras que Paula, sosteniendo con la mano el sistema de una banda y un CD, lo acerca a la regla. Los CD se sostienen mediante un gancho clip. Paula escribe en la tabla el valor leído en la regla.</p>  <p>La siguiente tabla muestra la elongación negativa que se obtuvo a causa del estiramiento de la banda para tomar su longitud natural.</p> <table border="1" data-bbox="1110 938 1829 1040"> <thead> <tr> <th>No. CDs</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Masa</td> <td>15</td> <td>30</td> <td>45</td> <td>60</td> <td>75</td> <td>90</td> <td>105</td> <td>120</td> <td>135</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>Peso</td> <td>147</td> <td>294</td> <td>441</td> <td>588</td> <td>735</td> <td>882</td> <td>1029</td> <td>1176</td> <td>1323</td> <td>1470</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>-0,3</td> <td>0</td> <td>3,2</td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> <td>7,0</td> <td>1,3</td> <td>1,5</td> <td>1,3</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p>Con dos bandas en paralelo</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Masa	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	Peso	147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323	1470	Elongación	-0,3	0	3,2	0,5	0,5	7,0	1,3	1,5	1,3	2
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Masa	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150																																				
Peso	147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323	1470																																				
Elongación	-0,3	0	3,2	0,5	0,5	7,0	1,3	1,5	1,3	2																																				
<p>4. Enmarque de cálculo:</p> <p>Uso de diferentes algoritmos para calcular sus respuestas.</p>	<p>El uso de la coma en la representación decimal en las medidas tomadas para la tabla y el uso de punto en el cálculo de la elongación para la pregunta 3c indica el uso de la calculadora y la “confusión” en las convenciones de representación de decimales.</p>	<p>Para calcular la elongación con 450g, los estudiantes dividen entre 15g (peso de cada CD) de lo cual obtienen 30 CD que es tres veces el último dato de la tabla 1: con 10 CD 3,6 cm de elongación (dato obtenido de la medición directa) y luego multiplican por 3 obteniendo 10.8</p> <p><i>30 CDs. 450 g. 10.8</i></p>																																												

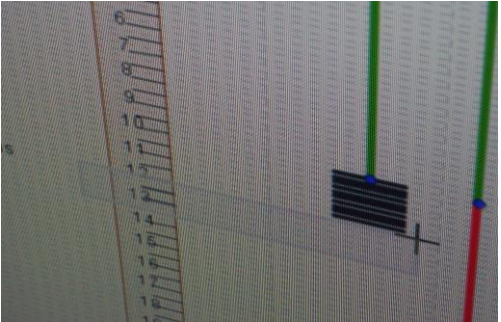
	Los demás datos están errados pero indican el uso de cierto algoritmo de cálculo.	
--	---	--

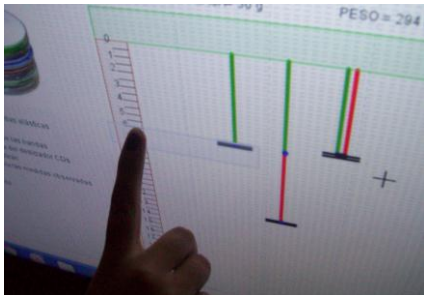
Anexo 10. Grupo # 4, experimento mental

Experimento Mental (grupo de estudio #4 IED JGA)																																																																				
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes																																																																		
<p>1. Enmarque de Cálculo:</p> <p>Realiza una suma para obtener la siguiente elongación al aumentar el número de CD</p>	<p>La estudiante usa un recurso de sucesión lineal con razón constante de 2. Pero hace alusión más a la diferencia entre los datos de la tabla, lo que hace pensar que simplemente suma.</p> <p>Las tres sucesiones que presenta tienen la misma razón pero tienen un valor inicial distinto.</p>	<p>Verónica: <i>Respuesta 2. 1-3 cm</i></p> <p><i>Respuesta 3. 3- 7 cm</i></p> <p><i>Respuesta 7. “aumenta su alargamiento 2 cm”</i></p> <p>Banda individual:</p> <table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td>19</td><td>21</td></tr> </table> <p>Sistema en serie:</p> <table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td>19</td><td>21</td><td>23</td></tr> </table> <p>Sistema en paralelo:</p> <table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td>19</td></tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21																																																										
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23																																																										
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																										
Elongación	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19																																																										
<p>2. Enmarque físico:</p> <p>Explicación basada en el fenómeno físico de distribución de peso.</p>	<p>La estudiante usa un recurso físico de distribución del peso entre las dos bandas en paralelo.</p>	<p>Verónica:</p> <p><i>Bandas en paralelo. Respuesta. 10: “Que las cuerdas distribuyen el peso y disminuye en 2” (la última tabla, respecto de la primera tabla)</i></p>																																																																		
<p>3. Enmarque de cálculo:</p> <p>Realiza una suma para obtener la siguiente</p>	<p>Construye una sucesión sumando 2 cm a partir del primer elemento que supone 1cm.</p> <p>Usa el recurso del peso del CD, del cual dice que no pesa mucho,</p>	<p>Mary luz:</p> <p><i>Para una sola banda:</i></p> <p><i>Respuesta 2: “1 cm ya que un CD no pesa mucho”</i></p> <p><i>Respuesta 3: 3 cm</i></p>																																																																		

<p>elongación al aumentar el número de CD</p>		<p>presenta la siguiente tabla:</p> <table border="1" data-bbox="1087 256 1808 313"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>1cm</td> <td>3cm</td> <td>5cm</td> <td>7cm</td> <td>9cm</td> <td>11cm</td> <td>13cm</td> <td>15cm</td> <td>17cm</td> <td>19cm</td> </tr> </table>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	1cm	3cm	5cm	7cm	9cm	11cm	13cm	15cm	17cm	19cm																						
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	1cm	3cm	5cm	7cm	9cm	11cm	13cm	15cm	17cm	19cm																																				
<p>4. Enmarque de cálculo:</p> <p>Realiza una suma para obtener la siguiente elongación al aumentar el número de CD</p>	<p>Construye una sucesión sumando 2 cm a partir del primer elemento que supone 2cm.</p> <p>Usa el recurso del peso del CD, del cual dice que no pesa mucho.</p> <p>Para el sistema en serie considera que el peso de la segunda banda hace que la banda se estire un poco más, pero no el doble que en el sistema de una banda.</p>	<p>Yeimi:</p> <p>Para una sola banda:</p> <p>Respuesta 2: “1 cm ya que un CD no pesa mucho, en sí es liviano”</p> <table border="1" data-bbox="1087 483 1808 540"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>2cm</td> <td>4cm</td> <td>6cm</td> <td>8cm</td> <td>10cm</td> <td>12cm</td> <td>14cm</td> <td>16cm</td> <td>18cm</td> <td>20cm</td> </tr> </table> <p>Para dos bandas en serie:</p> <table border="1" data-bbox="1087 605 1808 662"> <tr> <td>No. CDs</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Elongación</td> <td>3cm</td> <td>6cm</td> <td>9cm</td> <td>12cm</td> <td>15cm</td> <td>18cm</td> <td>21cm</td> <td>24cm</td> <td>27cm</td> <td>30cm</td> </tr> </table> <p>“Entre las dos bandas se estirarían de a 3 cm por CD, ya que se agregó otra banda y por ello aumenta un poco su peso”</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	2cm	4cm	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Elongación	3cm	6cm	9cm	12cm	15cm	18cm	21cm	24cm	27cm	30cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	2cm	4cm	6cm	8cm	10cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm																																				
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
Elongación	3cm	6cm	9cm	12cm	15cm	18cm	21cm	24cm	27cm	30cm																																				

Anexo 11. Grupo # 4, experimento virtual

<p align="center">Experimento Virtual (grupo de estudio #4 IED JGA)</p>		
<p>Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores</p>	<p>Conjunto de Recursos que se ponen en juego</p>	<p>Cita Respuestas de los estudiantes</p>
<p>1. Mapeo físico:</p> <p>Implementa un método de medida para registrar sus datos en la tabla.</p>	<p>La estudiante recurre a la búsqueda de un método de medida para la elongación, para esto se vale del mouse y de la pantalla, pero toma mal sus medidas, debido a un malentendido con la elongación, que sólo supera hasta el final. Así la estudiante mide la extensión desde el extremo superior de la banda hasta el último CD colocado, este error no permite una evolución satisfactoria de la actividad.</p>	 <p>La estudiante Mary Luz llena la tabla, para lo cual en el borde de la hoja usa una sucesión para encontrar los diferentes valores</p>


	<p>Luego de una aclaración que hace el profesor, la estudiante comprende que debe medir solo la longitud de la banda sin incluir los CD.</p>	<p>Profesor: ¿Con 10 CD te dio una elongación de...?</p> <p>Mary Luz: 12,5</p> <p>Profesor: “Recuerda que la elongación es... [muestra en la pantalla]... cuanto se estiró la banda”.</p> <p>Mary Luz: “o sea al colocar un CD (manipula el applet) aumenta sólo 0,5”</p> <p>Mary Luz: “o sea... le puse dos CD se estiró 1”</p> 																																																																								
<p>2. Enmarque de cálculo:</p> <p>Uso de algoritmos para llenar la tabla.</p> <p>Uso preferentemente de la suma para completar los valores grandes de la sucesión, no hay evidencia de uso de la multiplicación.</p>	<p>La estudiante llena una hoja aparte, que da cuenta del problema de comprensión acerca del significado de elongación, pues el primer valor para la elongación con un CD es 5,5 cm.</p> <p>Pero, salvando esta dificultad se nota un recurso de cálculo, la primera tabla es correcta hasta donde alcanzaron a llenarla.</p> <p>La estudiante aplica la proporcionalidad para llenar algunos lugares de la tabla, según el algoritmo indicado en la guía, encuentra el peso para 25 CD y para 30 CD, luego con ayuda de su compañera mediante una sucesión llegan a construir el valor de la elongación para 25 CD.</p>	<p>Verónica:</p> <table border="1" data-bbox="1125 927 1797 1027"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Masa (g)</td><td>15</td><td>75</td><td>120</td><td>135</td><td>90</td><td>105</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Peso (N)</td><td>0.147</td><td>0.735</td><td>1.176</td><td>1.323</td><td>0.882</td><td>1.029</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>Elongación (cm)</td><td>5,5</td><td>9,5</td><td>9,0</td><td>9,5</td><td>8,0</td><td>8,5</td><td>25</td><td>30</td></tr> </table> <p>Con una banda.</p> <p>En la tabla hay un desfase de 5 cm, pues la estudiante no resto la longitud original, para obtener la elongación, salvo este error sistemático, las tablas fueron diligenciadas siguiendo un cálculo.</p> <table border="1" data-bbox="1125 1187 1797 1287"> <tr><td>No. CDs</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td><td>1</td><td>25</td><td>30</td></tr> <tr><td>Masa (g)</td><td>60</td><td>90</td><td>45</td><td>135</td><td>120</td><td>15</td><td>325</td><td>450</td></tr> <tr><td>Peso (N)</td><td>588</td><td>882</td><td>441</td><td>1323</td><td>1.176</td><td>1.47</td><td>3.165</td><td>4.410</td></tr> <tr><td>Elongación (cm)</td><td>14</td><td>16</td><td>13</td><td>19</td><td>18</td><td>11</td><td>35</td><td>40</td></tr> </table> <p>Con dos bandas en serie.</p>	No. CDs	1	5	8	9	6	7			Masa (g)	15	75	120	135	90	105			Peso (N)	0.147	0.735	1.176	1.323	0.882	1.029			Elongación (cm)	5,5	9,5	9,0	9,5	8,0	8,5	25	30	No. CDs	4	6	3	9	8	1	25	30	Masa (g)	60	90	45	135	120	15	325	450	Peso (N)	588	882	441	1323	1.176	1.47	3.165	4.410	Elongación (cm)	14	16	13	19	18	11	35	40
No. CDs	1	5	8	9	6	7																																																																				
Masa (g)	15	75	120	135	90	105																																																																				
Peso (N)	0.147	0.735	1.176	1.323	0.882	1.029																																																																				
Elongación (cm)	5,5	9,5	9,0	9,5	8,0	8,5	25	30																																																																		
No. CDs	4	6	3	9	8	1	25	30																																																																		
Masa (g)	60	90	45	135	120	15	325	450																																																																		
Peso (N)	588	882	441	1323	1.176	1.47	3.165	4.410																																																																		
Elongación (cm)	14	16	13	19	18	11	35	40																																																																		

No. CDs	3	5	6	7	4	13	2	3	
Masa (g)	45	75	90	105	60		30	45	
Peso (N)	441	225	882	1029	588		2.94	4.41	
Elongación (cm)	5.5	6.25	6.5	6.75	6	9	5.5	5.75	

Con dos bandas en paralelo.

Anexo 12. Grupo # 4, experimento real

Experimento Real (grupo de estudio #4 IED JGA)																																																																																																																																						
Enmarques epistémicos: Indicios o indicadores	Conjunto de Recursos que se ponen en juego	Cita Respuestas de los estudiantes																																																																																																																																				
<p>1. Enmarque de cálculo:</p> <p>Las estudiantes calculan mediante un algoritmo errado, el peso, obteniendo un cero de más en la notación decimal.</p>	<p>El recurso de multiplicación aparece débilmente ligados al cálculo del peso, existe dificultad para ubicar la coma en el lugar adecuado y “confusión” para escribir en mm o cm la medida.</p> <p>Las estudiantes no logran ponerse de acuerdo sobre cómo escribir las medidas en la tabla, así de cómo debe dar el cálculo del peso.</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Masa</td><td>15g</td><td>30g</td><td>45g</td><td>60g</td><td>75g</td><td>90g</td><td>105g</td><td>120g</td><td>135g</td><td>150g</td></tr> <tr><td>Peso</td><td>0,0147N</td><td>0,0294N</td><td>0,0441N</td><td>0,0588N</td><td>0,0735N</td><td>0,0882N</td><td>0,1029N</td><td>0,1176N</td><td>0,1323N</td><td>0,147N</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>0,2mm</td><td>0,9mm</td><td>1,3mm</td><td>1,6mm</td><td>2,1mm</td><td>2,5mm</td><td>3mm</td><td>3,7mm</td><td>4,5mm</td><td>5,2mm</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Con una banda</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Masa</td><td>15g</td><td>30g</td><td>45g</td><td>60g</td><td>75g</td><td>90g</td><td>105g</td><td>120g</td><td>135g</td><td>150g</td></tr> <tr><td>Peso</td><td>0,0147N</td><td>0,0294N</td><td>0,0441N</td><td>0,0588N</td><td>0,0735N</td><td>0,0882N</td><td>0,1029N</td><td>0,1176N</td><td>0,1323N</td><td>0,147N</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>1cm</td><td>1,8cm</td><td>2,6cm</td><td>3cm</td><td>3,8cm</td><td>4,6cm</td><td>5,6cm</td><td>6,6cm</td><td>8cm</td><td>9cm</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Con dos bandas en serie</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>No. CDs</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>Masa</td><td>15g</td><td>30g</td><td>45g</td><td>60g</td><td>75g</td><td>90g</td><td>105g</td><td>120g</td><td>135g</td><td>150g</td></tr> <tr><td>Peso</td><td>0,0147N</td><td>0,0294N</td><td>0,0441N</td><td>0,0588N</td><td>0,0735N</td><td>0,0882N</td><td>0,1029N</td><td>0,1176N</td><td>0,1323N</td><td>0,147N</td></tr> <tr><td>Elongación</td><td>0,1mm</td><td>0,2mm</td><td>0,3mm</td><td>0,5mm</td><td>0,6mm</td><td>1cm</td><td>1,1cm</td><td>1,3cm</td><td>1,5cm</td><td>1,8cm</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">Con dos bandas en paralelo</p>	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g	Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N	Elongación	0,2mm	0,9mm	1,3mm	1,6mm	2,1mm	2,5mm	3mm	3,7mm	4,5mm	5,2mm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g	Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N	Elongación	1cm	1,8cm	2,6cm	3cm	3,8cm	4,6cm	5,6cm	6,6cm	8cm	9cm	No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g	Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N	Elongación	0,1mm	0,2mm	0,3mm	0,5mm	0,6mm	1cm	1,1cm	1,3cm	1,5cm	1,8cm
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																												
Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g																																																																																																																												
Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N																																																																																																																												
Elongación	0,2mm	0,9mm	1,3mm	1,6mm	2,1mm	2,5mm	3mm	3,7mm	4,5mm	5,2mm																																																																																																																												
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																												
Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g																																																																																																																												
Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N																																																																																																																												
Elongación	1cm	1,8cm	2,6cm	3cm	3,8cm	4,6cm	5,6cm	6,6cm	8cm	9cm																																																																																																																												
No. CDs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																																																																																												
Masa	15g	30g	45g	60g	75g	90g	105g	120g	135g	150g																																																																																																																												
Peso	0,0147N	0,0294N	0,0441N	0,0588N	0,0735N	0,0882N	0,1029N	0,1176N	0,1323N	0,147N																																																																																																																												
Elongación	0,1mm	0,2mm	0,3mm	0,5mm	0,6mm	1cm	1,1cm	1,3cm	1,5cm	1,8cm																																																																																																																												
	<p>La estudiante usa un recurso de suma, para intentar estimar cuántos CD pesan 20N.</p>	<p>Mary Luz: “Se necesitarían por ahí unos 70 o más CD” (para obtener un peso de 20 N)</p>																																																																																																																																				

	<p>No aparece la división o una multiplicación o alguna idea de proporcionalidad, directa.</p> <p>Sólo recurre al recurso de pensamiento aditivo.</p> <p>Adicional a esto, el error cometido sobre el lugar decimal imposibilita que la estudiante pueda continuar</p>	<p>Profesor: <i>¿Cuántos?</i></p> <p>Mary Luz: <i>por ahí unos 150 Newtons”...</i> <i>como la mayor son 10 (CD), y eso son 0,1147 N</i></p> <p>Profesor: <i>Revisemos esa cantidad, cuánto les da 0,015 por 9.8”... espérese... da 0,147 ¿cierto? Tienen un cero de más para un CD o sea que para 10 CD habría que correr la coma un lugar.</i></p> <p>Mary Luz: <i>“ah para 10 CD es 1,47 N o sea para 20 N tendríamos que aumentar los CD”</i></p>
<p>2. Enmarque de autoridad:</p> <p>Los estudiantes le dan la autoridad al <i>applet</i>, considerando que la disposición de los elementos en el experimento real conduce a resultados correctos si coincide con la que aparece en el experimento virtual.</p>	<p>El recurso de la forma geométrica de la banda, recta para poder medir su longitud original.</p> <p>Uso correcto del instrumento de medida, se mide la longitud comparando con el cero de la regla y tomando la lectura adecuada.</p> <p>De la misma manera usan el recurso del equilibrio, para garantizar que el experimento esté de acuerdo al experimento virtual y mantienen el método de medida durante todo el experimento, incluso acercan los CD a la superficie de la mesa para garantizar que permanezcan rectos. Así, para este grupo, colocar los CD en otra disposición podría variar las medidas de elongación.</p>	<p>Las tres integrantes deciden medir la banda lo más recta posible, a semejanza de lo visualizado en el experimento virtual</p> 
<p>3. Mapeo físico:</p> <p>Búsqueda de un método confiable de medida.</p>	<p>Usan un método de medida bastante preciso para medir la banda completamente, el uso de la punta de la escuadra hasta dentro del CD podría asegurar no despreciar ninguna parte de la banda, aun la que queda escondida dentro de los CD. Con estas estrategias se busca precisión en la medida.</p>	<p>Las tres integrantes deciden cuál es el mejor método de medida.</p>

