CLASIFICACIÓN DE LOS ARGUMENTOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES QUE INGRESAN A CARRERAS TÉCNICAS AL RESOLVER UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN CON NÚMEROS 4-ESTELARES

LUCERO ANTOLÍNEZ QUIJANO
2011185038
MILLER PALACIO NÚÑEZ
2011185057

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2013

CLASIFICACIÓN DE LOS ARGUMENTOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES QUE INGRESAN A CARRERAS TÉCNICAS AL RESOLVER UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN CON NÚMEROS 4-ESTELARES

LUCERO ANTOLÍNEZ QUIJANO
2011185038
MILLER PALACIO NÚÑEZ
2011185057

ASESORA
MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2013

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero dar gracias a Dios por acompañarme en los momentos más difíciles y brindarme la fortaleza para alcanzar una de las metas más anheladas para mi proyecto de vida durante el desarrollo de este trabajo, porque gracias a Él pude superar los inconvenientes que se presentaron en este proceso.

Gracias a mi esposa Luz Adriana Ospina Ramírez, por su sacrificio y comprensión. Porque a través de su amor y confianza me brindó el apoyo necesario para alcanzar uno de mis sueños más esperados, obtener mi segundo título de posgrado. Además, por estar a mi lado en las adversidades en los momentos más difíciles de mi vida y en los triunfos que hemos logrado alcanzar juntos. Por ser la cómplice de mis ilusiones e impulsarme a seguir este camino. Siempre te sentirás orgullosa de mí.

Finalmente, doy gracias a quienes fueron mis profesores durante estos dos años, gracias a ellos por compartir su conocimiento y sabiduría conmigo. Especialmente, a la profesora María Nubia Soler mi más profundo agradecimiento y admiración por creer en mis capacidades para el desarrollo de este trabajo y por permitir convertirme en un profesional al estudiar a su lado.

Miller Palacio

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Clasificación de los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares
Autor(es)	ANTOLÍNEZ QUIJANO, Lucero; PALACIO NÚÑEZ, Miller.
Director	SOLER ÁLVAREZ, María Nubia.
Publicación	Bogotá, Universisdad Pedagogica Nacional, 2013. 109 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Maestría en Docencia de la Matemática.
Palabras Claves	Argumento, Proceso de generalización, Modelo de Toulmin, y Números 4-estelares.

2. Descripción
El documento presenta la clasificación de argumentos logrados por estudiantes de educación técnica durante los años 2011 y 2012 de una Fundación de Educación Superior de carácter privado de la ciudad de Bogotá, al resolver una tarea que involucra procesos de generalización con números 4-estelares. El propósito es mostrar evidencias de la ruta seguida en cada uno de los procedimientos, las fases que fueron necesarias para completar los elementos propuestos por el Modelo de Toulmin y la importancia de la argumentación en la solución de tareas que involucran

procesos de generalización.

En este sentido, el objetivo general del proyecto es: clasificar los argumentos logrados por estudiantes que ingresan a carreras técnicas en la Fundación de Educación Superior San José, al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. Este trabajo se desarrolló en tres etapas: en la primera, se realizó el diseño de los instrumentos para la recolección de la información; en la segunda etapa, se implementaron los instrumentos en cuatro fases y en la tercera etapa, se analizaron las transcripciones, los medios audiovisuales y los registros escritos realizados por los estudiantes.

3. Fuentes

Para comprender los tipos de razonamiento se estudiaron los siguientes documentos:

Peirce, C. S. (1901). *Reasoning*. Recuperado el día 20 de marzo de 2011 del sitio:http://www.unav.es/gep/Reasoning.html.

Santaella, L. (1998*). La evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción*. Recuperado el día 20 de marzo de 2011 del sitio:http://www.unav.es/gep/AN/Santaella.html.

En relación con la caracterización de los argumentos, se tuvo en cuenta el libro:

Toulmin, S. (2003). *The uses of Argument*. New York: Cambridge University Press.

En cuanto a las etapas para llegar a la generalización se estudiaron los siguientes documentos:

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1988). Rutas y raíces hacia el álgebra (Cecilia Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mora, L. & Soler, M. (2010, octubre). *Estudiar álgebra desde la generalización: ejemplos para la formación de profesores*. Ponencia presentada en el 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa “Aprendizaje y Evaluación en

Matemáticas", Bogotá, Colombia.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Para la revisión de los antecedentes se estudiaron las siguientes fuentes:

Cañadas, M., Castro, E.& Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM, 2*(3), 283-294.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias, 26*(3), 431-434.

Crespo, C. & Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Relime, 8*(3), 287-317.

Calderón, D. & León, O. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Relime, 4*(1), 5-21.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria.*UniversitatAutònoma de Barcelona, Bellaterra.

Durango, J., Parra, M., Toro, J. & Zapata, M. (2010). Contexto de descubrimiento y justificación de la clase de matemáticas. *Redalyc*(29), 1-16.

Kieran, C., & Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(3), 229-240.

Morera, L. & Planas, N. (2010). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Barcelona.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of

algebraic generalizations of patterns in different contexts. *Mathematics Education*, 1-14.

En cuanto al tipo de instrumentos utilizados para la recolección de la información:

Abad, M. (1997) *Investigación evaluativa en documentación.* España: Publicaciones Universidad de Valencia.

4. Contenidos

El documento se encuentra organizado en cinco capítulos. Planteamiento del problema, marco de referencia, metodología, análisis de la información y conclusiones.

En el capítulo 1 se reportan los antecedentes, la justificación del estudio, el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos del proyecto. En el segundo capítulo se exponen los elementos conceptuales que apoyan el desarrollo del trabajo: argumentación, generalización, modelo de Toulmin y números estelares. El tercer capítulo contiene los aspectos metodológicos y la descripción de los cuatro instrumentos utilizados para la recolección de la información. En el cuarto capítulo se muestran los procedimientos evidenciados en cada una de las fases de recolección de la información los cuales generan los diferentes argumentos producidos por los estudiantes, posteriormente se exponen las categorías que orientan el análisis y finalmente se clasifican los argumentos producidos por los estudiantes en el proceso de generalización. En el quinto capítulo se presentan los resultados y las conclusiones del trabajo.

5. Metodología

El estudio realizado en este trabajo es de tipo cualitativo y descriptivo, porque reúne parte de los datos mediante registros audiovisuales de las diferentes intervenciones para su posterior análisis donde se clasifican los argumentos logrados por estudiantes que ingresan a carreras técnicas en la Fundación de Educación Superior San José, al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. El trabajo se ejecutó en tres etapas: en la primera etapa se seleccionó la población objeto de estudio y se diseñaron los instrumentos de recolección de la información; en la segunda etapa, se aplicaron los instrumentos de recolección de la información durante cuatro fases y en la tercera etapa, se diseñaron las categorías y se realizó el análisis de la información recolectada.

6. Conclusiones

En este trabajo se presentan tres tipos de conclusiones: las generadas a partir de los objetivos específicos, las producidas por los argumentos y algunas conclusiones generales.

En relación con las conclusiones generadas a partir de los objetivos específicos, se da respuesta a la pregunta planteada en este trabajo, al clasificar los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. Los estudiantes al enfrentarse a la tarea sobre generalización, buscan relaciones entre las figuras, que a su vez les permiten detectar patrones, lo que en algunos casos, los lleva a generalizar. Al realizar la generalización, los estudiantes ven la necesidad de expresarla, de manera escrita. Allí aparece el proceso de argumentación, ya que para poder convencerse y convencer a sus demás compañeros deben presentar sus explicaciones y justificaciones.

Con relación a las conclusiones generadas por los argumentos producidos por los estudiantes, las hipótesis planteadas son de dos tipos, de tipo particular y de tipo general. Para dar legitimidad a las hipótesis, los estudiantes proponen garantes basados en los generados por el uso de patrones gráficos, las generalizaciones algebraicas, las experimentaciones con ayuda de ejemplos, las "observaciones" y las manipulaciones algebraicas producidas por los estudiantes.

Cuando las hipótesis son de tipo particular, los estudiantes las justifican con generalidades y con el número de puntos de las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar. Cuando las hipótesis son de tipo general, los estudiantes plantean garantes de validación utilizando las gráficas de los números 4-estelares y las generalidades. Con los garantes tratan de justificar el paso de los datos a la hipótesis. En particular los garantes utilizados por los estudiantes

les permitieron defender sus ideas y dotar de significado sus hipótesis. En cuanto a las conclusiones generales, se evidencia que las tareas que involucran procesos de generalización promueven la actividad argumentativa en la clase de matemáticas. Porque al presentar de forma gráfica los datos, en este caso las tres primeras figuras de un número 4-estelar, permitió también que los estudiantes reconozcan fácilmente regularidades, hechos y situaciones comunes.

Elaborado por:	Lucero Antolínez Quijano y Miller Palacio Núñez
Revisado por:	María Nubia Soler Alvarez

Fecha de elaboración del Resumen:	04	06	2013

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

Pág.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de investigación Argumentación y Prueba del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y tiene como propósito clasificar los argumentos logrados por estudiantes de carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. El problema que se aborda surge, por una parte, de los intereses de la línea de investigación mencionada, dentro de los cuales está estudiar aspectos relacionados con la argumentación en el aula de matemáticas y por otra parte, a partir de los resultados de varias investigaciones realizadas en relación con este tema (Calderón & León, Morera & Planas, entre otros).

Este proyecto de grado plantea una tarea a un grupo de estudiantes y desarrolla el proceso investigativo correspondiente para diseñarla, implementarla y evaluarla con el fin de favorecer la construcción de conceptos en el área de matemáticas.

El trabajo está conformado por cinco capítulos, en el primer capítulo se da a conocer la problemática, se presentan la pregunta de investigación, los objetivos y se hace una revisión de los antecedentes bibliográficos tenidos en cuenta, de acuerdo a los intereses temáticos que abarca el estudio.

El segundo capítulo describe el marco de referencia que sustenta este estudio. En este se tienen en cuenta los referentes teóricos en los que se basa el análisis de la información recolectada y aquellos que sustentan los aspectos matemáticos de dicha información. Estos referentes se centran en dos aspectos: la descripción del modelo de Toulmin y el concepto y algunos ejemplos de los números 4-estelares.

En el tercer capítulo se describe la metodología desarrollada para realizar el estudio que se reporta. El estudio se realizó en tres etapas: diseño de instrumentos y selección de la población, recolección y análisis de la información.

En el cuarto capítulo, se clasifican los argumentos logrados por los estudiantes al desarrollar los instrumentos propuestos y se exponen los patrones identificados en el proceso de generalización, así como las expresiones generales obtenidas por los estudiantes para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar.

Finalmente, en el quinto capítulo, se mencionan las conclusiones del estudio en relación con los objetivos planteados, los argumentos logrados por los estudiantes y algunas conclusiones generales sobre la incidencia del trabajo realizado en la formación personal y profesional que se pueden tener en cuenta en la realización de futuros estudios.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este apartado se puntualiza el planteamiento del problema, donde se describe el trabajo realizado por la línea de investigación argumentación y prueba del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional teniendo en cuenta la importancia de la competencia argumentativa, donde se pretende aportar a los desarrollos de la línea de investigación mencionada y a futuros trabajos en torno a la argumentación y la generalización en el campo de la Educación Matemática en el aula.

Luego, se justifica la realización de este trabajo de grado desde la experiencia docente y desde la normatividad nacional. En seguida se plantean los objetivos del trabajo y por último se describen algunas investigaciones relacionadas con el trabajo.

1.1 EL PROBLEMA

La actividad argumentativa en el aula de matemáticas se ha convertido en el centro de interés de numerosos estudios tanto en Matemáticas como en Educación Matemática por ser el fundamento del conocimiento matemático. Estas investigaciones, no solo estudian aspectos relacionados con la actividad argumentativa sino con la generalización como base del desarrollo de la argumentación (Morera et al., 2010).

Específicamente, la línea de investigación argumentación y prueba del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, centra su interés en primera instancia, en la descripción de diferentes tipos de razonamientos y argumentos presentados en clases de matemáticas: clases en las que se forman profesores y en clases de secundaria. En segunda instancia, la línea de investigación se centra en la caracterización de algunas tareas que promueven diferentes formas de razonar y argumentar en la clase de matemáticas. En relación con esta última, hemos podido encontrar en diferentes fuentes de información, que al parecer las tareas en las cuales se involucran procesos de generalización promueven diferentes formas de argumentación.

El problema que se aborda en este trabajo de grado pretende aportar a los desarrollos de la línea de argumentación y prueba de la Universidad Pedagógica Nacional y a futuros trabajos en torno a la argumentación y la generalización en el campo de la Educación

Matemática mediante el análisis y reflexión que surgió en la implementación de una tarea de generalización con números 4-estelares, la cual permitió identificar los tipos de argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas, en una institución.

La siguiente pregunta orienta los desarrollos de este trabajo de grado:

¿Cómo clasificar los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares?

1.2 JUSTIFICACIÓN

La realización de este trabajo de grado se justifica desde dos tipos de argumentos, el primero, la experiencia docente que tienen los autores en relación con la argumentación en la clase de matemáticas y el segundo, la importancia que desde la normatividad nacional se le da al desarrollo de habilidades argumentativas.

En la Fundación de Educación Superior San José (institución donde laboran los autores) las clases de matemáticas que se llevan a cabo en los primeros semestres de educación técnica, se desarrollan con el modelo tradicional de enseñanza como se evidencia en algunos estudios de Llanos, Otero & Banks (2007), los cuales manifiestan que la enseñanza tradicional de la matemática ha priorizado la repetición de ejercicios, haciendo que el trabajo del alumno se reduzca a copiar y replicar el conocimiento propuesto por el profesor dejando de lado procesos básicos y necesarios como el de la argumentación matemática. Por tanto no brindan espacios de discusión entre los estudiantes que les permitan desarrollar la práctica argumentativa para la construcción de su propio conocimiento matemático.

En nuestra práctica como docentes de educación superior, hemos evidenciado que los estudiantes presentan dificultades al realizar actividades asociadas a los procesos de razonar y argumentar como por ejemplo, al pasar de patrones o regularidades observadas en el estudio de algunos casos, a expresiones generales que los describen, como también se evidencia en la investigación de Cañadas et al. (2007).

Como profesionales de la Educación Matemática, hemos evidenciado la necesidad de utilizar estrategias que faciliten y estimulen diferentes procesos de pensamiento tales como inferir, formular hipótesis, abstraer y argumentar que estimulan el pensamiento lógico y la comprensión crítica por parte de los estudiantes. Para desarrollar la actividad matemática argumentativa en el aula, se reconoce la importancia que tienen las actividades que despierten el interés de los estudiantes, con el fin de reflexionar frente a diversas situaciones matemáticas partiendo de las tareas que desarrollan un proceso de generalización en el aula. Las tareas deben proyectar a los estudiantes que exploren, generalicen y comuniquen ideas que generen la oportunidad de interactuar con sus compañeros para construir su propio conocimiento.

Sin embargo, no es suficiente con proponer tareas que fomenten este tipo de reflexiones; es inevitable que el docente gestione, medie e interactúe en el proceso cuando se realiza actividad matemática en el aula para alcanzar esta construcción. Así mismo, al tener en cuenta nuestra experiencia docente y como estudiantes de educación matemática, consideramos que al realizar actividad matemática argumentativa se propicia el significado de conceptos y relaciones algebraicas por las intervenciones que hacen los estudiantes al descubrir, formular y argumentar una conjetura. Por este motivo, nuestro interés es propiciar la actividad matemática argumentativa en estudiantes de carreras técnicas.

Por otra parte teniendo en cuenta las directrices del MEN (2006), la contribución de la formación matemática a los fines generales de la educación corresponde entre otros aspectos, aportar a la formación en valores democráticos por medio del desarrollo de competencias argumentativas. Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad (p. 48).

Para formar ciudadanos críticos, reflexivos y capaces de razonar se hace necesario un aprendizaje en el que se desarrollen competencias argumentativas, que les ayuden a los estudiantes, entre otras cosas, a insertarse en un mundo laboral, en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones.

El desarrollo de competencias argumentativas guarda una estrecha relación con el concepto de competencia matemática. El MEN (2006), establece que uno de los procesos que se tienen en cuenta para definir qué es ser matemáticamente competente es: "Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración" (p. 51).

1.3 OBJETIVOS

Teniendo en cuenta la situación formulada en la sección anterior, se plantean los siguientes objetivos.

1.3.1 Objetivo general

Clasificar los argumentos logrados por estudiantes que ingresan a carreras técnicas en la Fundación de Educación Superior San José, al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares a partir del modelo de Toulmin.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Describir el procedimiento realizado por los estudiantes al realizar la tarea propuesta para establecer las diferentes generalidades obtenidas al encontrar la cantidad de puntos de cualquier número 4-estelar.
2. Identificar los argumentos producidos por los estudiantes en una tarea de generalización.
3. Generar unas categorías emergentes a partir de los argumentos logrados por los estudiantes.
4. Seleccionar las unidades de análisis que permiten sistematizar los argumentos producidos por los estudiantes a partir del modelo de Toulmin.

1.4 ANTECEDENTES

En este apartado se presentan los resultados y aportes de cinco investigaciones relacionadas con la argumentación y la generalización que contribuyen a este trabajo de grado. Estas investigaciones permitieron establecer referentes generales respecto a la investigación en el campo de la educación matemática desde la experiencia de la docencia en diferentes contextos educativos.

1.4.1. Enfocado a identificar los recursos matemáticos que se hicieron evidentes en el proceso argumentativo escrito

En el artículo *Validación y argumentación de lo matemático en el aula* realizado por Dora Calderón y Olga León, las autoras señalan que el propósito de su investigación fue identificar los recursos argumentativos para validar soluciones de problemas matemáticos en el aula y esto conllevó a reconocer la argumentación como un proceso complementario a la validación desde un contexto social y como la búsqueda de certezas en el conocimiento matemático (Calderón & León, 2001).

La población objeto de estudio fueron 12 estudiantes de primer semestre de pregrado y 12 estudiantes de primer semestre de especialización en Educación Matemática. Las observaciones se realizaron en un curso de pregrado denominado "Estilos de razonamiento en matemáticas" y en un curso de posgrado denominado "Lenguaje y matemáticas".

El instrumento utilizado para la recolección de la información fue un problema sobre la organización de ciertos números en filas y columnas tomado de las Olimpiadas Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño publicado el año 1993. Los estudiantes de pregrado fueron dispuestos en parejas y se optó por privilegiar el análisis de sus interacciones; mientras que en los estudiantes de postgrado se privilegió la solución escrita.

Para analizar los resultados obtenidos, las autoras tuvieron en cuenta dos tipos de categorías: los recursos discursivos que se manifestaron en el proceso argumentativo oral y los recursos matemáticos que se hicieron evidentes en el proceso argumentativo escrito. En ambos casos, cada recurso fue definido teniendo en cuenta el esquema premisa - explicación (garantía) – conclusión, propuesto por Toulmin (1979).

Para describir los resultados obtenidos en la investigación, fueron necesarias las secuencias argumentativas en las que se pudieron identificar argumentos iniciales, de transición y finales.

Los argumentos iniciales, fueron elaborados por los estudiantes en forma individual; los argumentos de transición se lograron durante el estudio de la solución en pareja y los argumentos finales se refieren a las conclusiones obtenidas a partir de los acuerdos en la pareja para presentar en plenaria general.

Algunos argumentos matemáticos iniciales logrados por los estudiantes presentaron la solución del problema pero no de manera efectiva, constituyéndolos en recursos débiles al tener que realizar una explicación en forma oral de la solución.

En los argumentos matemáticos de transición, debido a la interacción, se generaron más recursos argumentativos de tipo matemático que se complementaron con la gran variedad de recursos discursivos de validación o de refutación.

Finalmente, en los argumentos matemáticos finales se eliminaron algunos argumentos de tipo discursivo y se consolidó el argumento matemático más fuerte y convincente.

El aporte que hace este artículo a nuestro trabajo de grado es la forma en que se utiliza el modelo de Toulmin para identificar los argumentos y la importancia que tienen las actividades de generalización

1.4.2. Enfocado a la importancia que tienen las actividades de generalización para el desarrollo de actividades argumentativas

En el escrito *La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado* realizado por Laura Morera y Núria Planas, las autoras presentan reflexiones acerca de la argumentación en el contexto de la matemática escolar y sus intereses se basaron en: a) la noción matemática de argumentación, b) los procesos de transferencia de la matemática a la matemática escolar, y c) el papel de la interacción de la co-construcción de la argumentación en el aula de matemáticas; para lo cual fue necesario comprender lo que se entiende por argumentación matemática y competencia argumentativa (Morera & Planas, 2010).

En su artículo, las autoras mencionan la experiencia que cada una tuvo en su investigación, pero deciden compartirlas y reflexionar en torno a ellas.

En la investigación de Núria Planas, la población objeto de estudio fue una clase de primer curso de secundaria obligatoria conformado por niños de 12 y 13 años de edad y en la investigación de Laura Morera, la población fue una clase de tercer curso de secundaria obligatoria conformado por estudiantes entre 14 y 15 años de edad.

El instrumento utilizado para la recolección de la información del trabajo de Núria Planas fue el problema del sobre vacío y la balanza. Ver ilustración 1

PROBLEMA 1. Una familia está preparando ocho sobres para enviar postales de sus vacaciones a los amigos. Después de enganchar los sellos, escribir las direcciones y cerrar los sobres, la madre se da cuenta de que ha quedado una postal encima de la mesa. Para no tener que comprar más sobres, sellos y postales, deciden averiguar cuál es el sobre vacío. Si disponen de una balanza de platillos, ¿qué recomiendas que hagan?

Ilustración 1. Enunciado del problema del sobre vacio

Para el trabajo de Laura Morera fue el problema de la máquina de giro (ver ilustración 2) para el cual los estudiantes fueron dispuestos en parejas y lo resolvieron con ayuda del programa GeoGebra.

PROBLEMA 2. Hay una máquina que gira las piezas de un sitio a otro, como se muestra en la animación, pero la llevan a arreglar, y ahora que ya funciona perfectamente, no saben dónde la tienen que colocar para que siga transportando las piezas como lo hacía antes. Poned la máquina de giro en su sitio y argumentad cómo lo habéis hecho con la ayuda del Geogebra.

Ilustración 2. Enunciado del problema de la máquina de giro

Para analizar los resultados obtenidos en cada una de las investigaciones, Núria planas tuvo en cuenta la argumentación a partir de la interacción social en el aula de matemáticas y su influencia en los procesos de aprendizaje de los estudiantes; y Laura Morera dio prioridad al criterio de facilitación de las competencias argumentativas en matemáticas, entre las cuales se encuentran: describir, narrar, explicar, argumentar y justificar. En el caso de la argumentación, se tuvo en cuenta el esquema de Toulmin (1958) con sus cuatro elementos: los datos, la conclusión, la garantía y el respaldo o la refutación.

De ambas investigaciones, se puede resaltar que el concepto de generalización tiene un papel importante en el grado de competencia argumentativa en tanto que la búsqueda de generalizaciones parece estar en la base del desarrollo de varias argumentaciones. Los estudiantes hallan las soluciones resolviendo casos concretos, pero en ciertos momentos algunos se plantean qué pasaría para una situación genérica cuya resolución informara sobre todos los distintos casos. Y, en los dos trabajos, se están recogiendo y analizando datos de aula sobre procesos de argumentación en entornos de resolución de problemas. Para los respectivos análisis, se están haciendo distintas acciones, entre ellas la reconstrucción de los esquemas de Krummheuer (2007) sobre las relaciones entre argumentación e interacción social en el aula.

El aporte que hace este documento a nuestro trabajo de grado es la importancia que tienen las actividades de generalización como base para el desarrollo de habilidades argumentativas en el aula de matemáticas. En este caso contribuye para revisar y ampliar nuestra mirada al concepto de argumentación matemática y a su uso en el aula.

1.4.3. Enfocado al papel que desempeñan las argumentaciones en el aula de matemáticas

En el artículo *Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo*, realizado por Cecilia Crespo y Rosa María Farfán, las autoras señalan que el propósito de su investigación fue identificar el papel que desempeñan las argumentaciones en el aula de matemáticas y específicamente, las características de aquellas que se realizaron por reducción al absurdo, a fin de comprenderlas como un recurso de validación de resultados en matemáticas que se logró a través de una construcción sociocultural (Crespo & Farfán, 2005).

La población objeto de estudio estuvo conformada por tres grupos que corresponden a las dos fases del trabajo: La primera fase se encontró determinada por 12 estudiantes de la materia Fundamentos de la Matemática, correspondiente a la carrera de Profesor de Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González” de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos se encontraban terminando sus estudios del último año de la carrera mencionada, y en esta asignatura habían abordado temáticas como lógica proposicional y de predicados y sistemas formales durante el primer cuatrimestre, al igual que el análisis de algunos núcleos temáticos modulares en los fundamentos de la matemática, como la axiomática de Euclides y de Hilbert para la geometría, la fundamentación del análisis, las geometrías no euclidianas, las posiciones frente a la crisis de los fundamentos en el siglo XX, entre otras.

En la segunda fase, la población se encuentra determinada por tres grupos: inicialmente se tomó el mismo grupo de alumnos de la primera fase con los de un segundo grupo de 17 alumnos, proveniente del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico de la ciudad de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos involucrados cursaban el segundo año de la carrera de Profesorado en Informática, tenían algunas nociones de lógica en su formación, aunque en menor medida que el primer grupo, y su orientación fue distinta porque estudiaban una carrera informática. El tercer grupo que conformó la población consta de 17 alumnos que se encontraban terminando sus estudios de nivel medio, ya que cursaban el tercer año de nivel polimodal en un bachillerato con orientación en Ciencias Sociales y Humanidades. En este año, tenían una asignatura denominada Introducción al Conocimiento Científico, donde estudiaban ciertos conceptos básicos de lógica y sus aplicaciones a las ciencias y a la resolución de situaciones problemáticas, que correspondían a juegos de ingenio y estrategias lógicas de resolución.

Las investigadoras utilizaron dos tipos de instrumentos: en la primera fase el instrumento que utilizaron fue una secuencia de actividades retomada del texto de la demostración de la Proposición 2 del Libro III de los Elementos de Euclides, y en la segunda fase se realizó un cuestionario basado en la propuesta de estudio experimental conocida como “tarea de las cuatro tarjetas”, que combinaba vocales y consonantes con números pares o impares, según cierta consigna.

Las autoras realizaron la investigación en dos fases. La primera fue una fase de exploración, que se centró en determinar cuál es el papel que desempeñan las figuras de análisis en las demostraciones por reducción al absurdo; esta fase se diseñó a fin de poner en juego una de las hipótesis relacionadas con las argumentaciones por reducción al absurdo: las figuras de análisis dificultan la comprensión de los razonamientos cuando se utilizan argumentaciones por el absurdo.

La segunda fase se concentró en analizar si era posible reconocer a las argumentaciones por reducción al absurdo como una construcción sociocultural, es decir, con el análisis de la obra de Euclides se identificaban y utilizaban correctamente argumentaciones de este tipo en diferentes grupos que no tenían formación matemática como la del primer grupo.

Como resultado, de las dos fases de experimentación se lograron enunciar las siguientes conclusiones:

Los estudiantes con formación matemática reconocieron la argumentación por reducción al absurdo indicando características y dificultades, siendo capaces de explicar correctamente su fundamento lógico, mientras que los estudiantes con formación en informática prefirieron las argumentaciones en forma directa.

Ninguno de los alumnos del último año de la escuela media logró realizar argumentaciones por el contrarrecíproco, porque no tienen aún incorporada la idea de demostraciones generales que no impliquen razonar caso por caso.

Finalmente las autoras manifestaron que los estudiantes reconocen que la matemática escolar también está relacionada con otros dominios y concluyeron que las prácticas sociales son las productoras del conocimiento matemático.

El aporte que este documento le hizo a nuestro proyecto de grado, está relacionado con el reconocimiento de la reducción al absurdo como una forma de argumentación en el aula.

1.4.4. Enfocado a potencializar la competencia argumentativa en el aula

En el artículo *Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas* realizado por John Henry Durango, Mónica Parra, Jorge Toro y Mónica Zapata, los autores presentan algunos conceptos que caracterizan los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas, particularmente en Colombia con Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (Durango, Parra, Toro & Zapata, 2010).

En esta investigación de tipo cualitativo, se hizo una revisión bibliográfica sobre conceptos que caracterizan los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas, teniendo en cuenta la perspectiva del Ministerio de Educación Nacional de Colombia con puntos de vista de autores de diferentes países y aportes realizados por estos en cuanto al desarrollo de argumentos, conjeturas, pruebas, demostraciones y refutaciones por parte de los estudiantes en la clase de matemáticas, con el fin de discutir los diferentes momentos que caracterizan este tipo de situaciones en el contexto educativo. Cada una de estas formas de argumentar, se encuentra enmarcada en un contexto que propicia el desarrollo del razonamiento matemático.

De acuerdo con los autores, el **contexto de descubrimiento** en la clase de matemáticas corresponde a los espacios en los que el estudiante, utilizando el razonamiento matemático, construye enunciados de los que se desconoce su validez. En este contexto se encuentran los procesos de conjeturar y refutar.

En el **contexto de justificación** se hace referencia a las actividades y procesos en los que el estudiante emplea argumentos matemáticos para validar los enunciados. Aquí incluyen las pruebas y las demostraciones.

En este escrito, los autores también delimitan los procesos de conjetura, prueba, demostración y refutación para ser incorporados en las prácticas educativas docentes y así desarrollar el razonamiento matemático en los estudiantes.

En relación con las conjeturas, los autores manifiestan que pueden ser verdaderas o falsas, que son establecidas tras observaciones, identificación de regularidades y la identificación de argumentos.

En cuanto a las pruebas, expresan que son los primeros indicios que los estudiantes usan para dar cuenta de sus argumentos matemáticos, antes de dominar la demostración matemática formal.

Con respecto a las demostraciones, la asumen como una experiencia intelectual que revela una actividad cognitiva específica e implica procesos lógicos, heurísticos, pruebas mentales y reconocimiento de las funciones del lenguaje.

Por otro lado, manifiestan que las refutaciones se dan cuando el estudiante debate con razones o argumentos una proposición que se quiere probar y para ello debe exponer de una manera clara y precisa sus argumentos y las razones que lo apoyan.

En este artículo, se puede resaltar el estudiante como centro de su proceso en los contextos de descubrimiento y de justificación como sujeto social que explora, explica, verifica, conjetura, argumenta, justifica y refuta sus decisiones al intentar convencer a los demás de la veracidad de ellas, mostrando toda su creatividad y capacidad argumental al enfrentarse a situaciones problemas de demostración.

Finalmente, los autores formulan algunos procesos que tienen que ver con *Razonar en matemáticas*, dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar las estrategias y los procedimientos para dar solución a los problemas propuestos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Y para que los estudiantes logren potencializar su competencia demostrativa y argumentativa, es necesario un ambiente de clase en el cual se promuevan el razonamiento y la argumentación.

El aporte que este documento le hace a nuestro trabajo se basa en centrar al estudiante como sujeto de su proceso de aprendizaje mediante la interacción social con la puede potenciar su capacidad argumentativa.

1.4.5. Enfocado a otras formas de generalización

Cañadas, Castro y Castro (2008), describen los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la resolución del problema de las baldosas. Se enfocan en los tipos de patrones identificados, a la forma en que los estudiantes expresan la generalización y, mediante la descripción de las estrategias inductivas, presentan algunas características de la generalización referentes a los elementos y a los sistemas de representación utilizados. Estos autores encuentran que la mayor parte de los alumnos que generalizan trabajan previamente en el sistema de representación numérico. Las respuestas de los estudiantes ponen de manifiesto la relevancia de la identificación de patrones en el proceso de generalización en el problema de las baldosas. La generalización depende, tanto de la detección de un patrón, como de la identificación de un patrón adecuado. La mayoría de los patrones que identificaron los estudiantes, son patrones adecuados al problema planteado. En este trabajo también se encontró que predomina la generalización verbal, esto hace cobrar importancia a otras formas de expresar la generalización diferente a la algebraica. La investigación muestra que la generalización verbal es una forma más accesible para estos estudiantes que la algebraica.

El aporte que este documento le hizo a nuestro proyecto de grado, está relacionado con la importancia del lenguaje natural como una forma verbal de expresar la generalidad, ya que es diferente a la algebraica.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este apartado se presentan los referentes teóricos en los que se sustenta este trabajo de grado.

Inicialmente, se muestran algunas definiciones de autores que presentan diferentes formas de significar la argumentación. Posteriormente, se expone el modelo de Toulmin mediante el cual es posible caracterizar todos los argumentos. Luego se hace una descripción de algunos procesos de la actividad matemática que propician significativamente la argumentación en el aula y sirven como sustento para las tareas que se proponen a los estudiantes y finalmente, se describen los números estelares tomados como base para la elaboración de las tareas propuestas a los estudiantes.

2.1 ARGUMENTACION

A continuación se muestran algunas definiciones de autores tales como Duval, De Gamboa, Plantín, Rivadulla y Ferrater que presentan diferentes formas de significar la argumentación.

Duval (1999) define la argumentación como:

> "*aquel tipo de razonamiento que se halla intrínsecamente ligado al uso del lenguaje común. Y por esto pareciera ser la forma natural del razonamiento […] que se pone en movimiento de manera espontánea en todas las situaciones donde un parecer, afirmación, opinión o elección se pueden poner en duda y requieren de una justificación.*".

De acuerdo con este autor, la argumentación que se pone en acto, en matemáticas recibe el nombre de *argumentación heurística* porque está hecha para realizar avances en un problema a través de la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones, que sea de naturaleza deductiva y no solo de naturaleza semántica como es el caso de las argumentaciones retóricas.

De acuerdo con De Gamboa (2009) existen dos tipos de argumentaciones: las que cuentan con respaldo teórico y aquellas que no lo tienen. Las argumentaciones que no tienen respaldo teórico corresponden a las proposiciones que tienen valor por su contenido, mientras que las argumentaciones con respaldo teórico poseen un valor epistémico según su posición y el uso correcto que se haga con ella. Este último, es el caso de la argumentación en matemáticas, ya que dispone de una red de definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que permiten en los razonamientos mediante implicaciones.

Esta clasificación de las formas de argumentar se puede relacionar con la realizada por Duval (2009) en argumentaciones retóricas y argumentaciones heurísticas, es decir, que las argumentaciones retóricas podrían ser aquellas que no tienen un respaldo teórico y las argumentaciones heurísticas, aquellas que cuentan con un respaldo teórico, como en el caso de la argumentación en matemáticas.

Plantin (2001) ha estudiado la argumentación partiendo de los trabajos de Toulmin (1958) y Toulmin, Rieke & Janik (1979), quienes definen *argumento* como la cadena de razonamientos o secuencias interconectadas entre pretensiones y razones que establece el contenido y fuerza de la posición a partir de la que un hablante arguye, y *argumentación* como la actividad total de exponer pretensiones, desafiarlas, apoyarlas produciendo razones y nuevamente refutar esas razones. Desde esta perspectiva, el argumento es una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que parte de una *evidencia* o datos y llega al establecimiento de una *hipótesis* o conclusión. El movimiento de los datos a la hipótesis es la mayor prueba de que la línea argumental se ha realizado con efectividad. Este movimiento es realizado a través del *garante* que permite la conexión.

Un argumento es el razonamiento en el que se pretende apoyar una afirmación determinada con la intención de probar o convencer (Rivadulla, 1991 citado por Cañadas et. al 2002)

En este sentido, Ferrater (1988, citado por Cañadas et. al 2002) considera que un argumento es el razonamiento mediante el cual se intenta probar o refutar una tesis, convenciendo a alguien de la verdad o falsedad de la misma.

Al tener en cuenta las definiciones dadas anteriormente, en este trabajo se comprende por argumento: una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que parte de una *evidencia* o datos y llega al establecimiento de una *hipótesis* o conclusión. Este movimiento es realizado a través del *garante* que permite la conexión. La argumentación es la actividad que se realiza de los datos a la hipótesis produciendo razones que refuercen a favor o en contra la hipótesis planteada.

2.2 ARGUMENTACIÓN Y MODELO DE TOULMIN

Según Toulmin (2003) existe un modelo mediante el cual es posible caracterizar todos los argumentos. Este modelo plantea que cualquier argumento debe estar conformado por una conclusión, unos datos, un garante, un respaldo, cualificadores modales y reservas. En lo que sigue se describen cada uno de esos elementos:

La conclusión: Es una afirmación o aserción que se hace con base en unos hechos observados. Es la tesis que se va a defender, debatir, demostrar o sostener de manera oral o escrita. La conclusión enuncia el punto de vista que la persona dese expresar.

Los datos: Son la evidencia o el fundamento sobre el cual se basa la afirmación o conclusión, son la razón sobre la que se mantiene la aserción y generalmente están conformados por hechos o condiciones observadas. Sin los datos, la aserción se invalida o se refuta con facilidad.

El garante: Es el soporte legítimo que se ofrece para la transición de los datos a la conclusión justificando la importancia de los datos. En matemáticas, el garante puede ser una definición, teorema o patrón.

El respaldo: Es el apoyo que valida el garante y le da soporte a todo el argumento.

El cualificador modal: Es un adverbio que permite calificar la fuerza de las aserciones o conclusiones planteadas, como lo son: necesariamente o probablemente.

La reserva: Es una excepción que se hace bajo una condición extraordinaria.

El Modelo de Toulmin opera de la siguiente manera: a partir de unos datos se formula una aserción (conclusión), la garantía conecta estos datos con la conclusión y el respaldo ofrece un cimiento teórico al argumento, cuando el garante no es suficientemente convincente.

En la ilustración 3 se muestran todos los elementos que conforman un argumento:

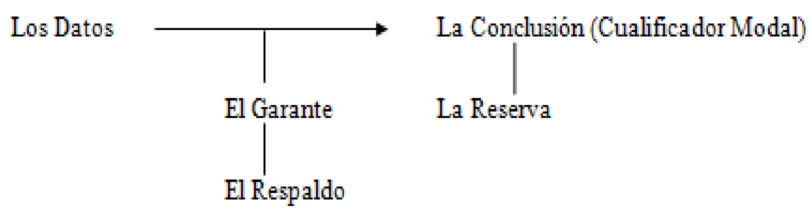


Ilustración 3. El modelo argumentativo de Toulmin

Para este trabajo de grado se va a tener en cuenta la unidad mínima de argumentación del Modelo de Toulmin, es decir, el que contiene solamente tres elementos: los datos, la conclusión y el garante.

En la ilustración 4 se presenta el Modelo de Toulmin como unidad mínima de argumentación, el cual se adoptará en todos los argumentos producidos por los estudiantes:

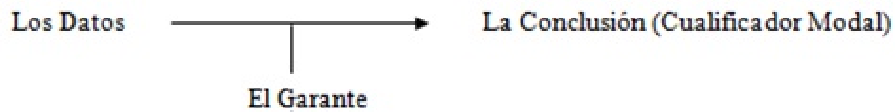


Ilustración 4. Modelo de Toulmin como unidad mínima de argumentación

De acuerdo con De Gamboa (2009) el paso de una premisa (los datos) a la conclusión solo se puede dar cuando se tienen razones que justifican este proceso, ya que estas son las que fundamentan la argumentación. Este paso de los datos a la conclusión mediante las razones, es considerado la unidad mínima de una argumentación.

En la ilustración 5 se presenta un ejemplo que involucra un proceso de generalización de acuerdo con el Modelo de Toulmin como unidad mínima de argumentación:

En el proceso de encontrar una expresión general que describa la siguiente sucesión:

$$1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{25}, \quad \frac{1}{36}, \ldots$$

Se presenta el siguiente argumento:

En la sucesión $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots$

El término *n*-ésimo está dado por $S_n = \frac{1}{n^2}$, el cual es válido para todos los números naturales excepto “el cero”

$$S_1 = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$S_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$S_5 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

Ilustración 5. Ejemplo de argumento expresado como unidad mínima de argumentación

2.3 ACTIVIDAD MATEMÁTICA

A continuación se describen dos procesos inherentes a la actividad matemática en los que se desarrolla de forma significativa la argumentación, desde la perspectiva de los autores que se citan a continuación.

2.3.1 Generalizar

Diferentes autores describen lo que es el proceso de generalizar. Sessa (2005, pp. 58) expresa que la generalización está en el corazón de la matemática y que: "Generalizar es encontrar características que unifican, reconocer tipos de objetos y de problemas, que permitan utilizar y adaptar lo hecho con ese problema a otros problemas del mismo tipo".

En este documento, la autora también resalta la importancia de la generalización como una herramienta que permite expresar la generalidad mediante la exploración, la formulación y la validación de conjeturas.

De acuerdo con Esquinas (2009), generalizar es la acción de extraer una idea de entre un conjunto de casos particulares que tienen algo en común. En su tesis doctoral, la autora menciona que en matemáticas, esta idea puede ser una propiedad común a un conjunto de objetos matemáticos o una relación que se repite entre distintos objetos matemáticos, la cual permite definir una ley general para el conjunto de objetos observados que debe ser verificada para darle certeza matemática.

Por otro lado, Kieran y Filloy (1989) en relación con el álgebra escolar, centran su intención en tres aspectos: el primero describe algunas contribuciones de la investigación a los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra de secundaria; el segundo, discute los intentos por desarrollar una teoría para la enseñanza/aprendizaje del álgebra, y el tercero menciona futuras tendencias en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar.

Con respecto a los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra, los autores expresan que la generalización es uno de ellos, que el álgebra no es solamente una generalización y que este proceso requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas para transformarlas en proposiciones más generales sobre los números y sus operaciones, es decir que:

> *"Generalizar es extender lo que era correcto en aritmética hacia el álgebra sin malinterpretar el sentido de los términos algebraicos… es expresar en términos literales y llegar a ser conscientes de las relaciones entre las operaciones y sus equivalencias" (Kieran & Filloy, 1989, p. 232)*

Para Radford (2008) la generalización es usada como una ruta hacia el álgebra que consiste en identificar las cosas que hay en común en un conjunto de datos, pero también notar lo que diferente en ellos. De acuerdo con este autor, existen tres tipos de generalizaciones:

- Las generalizaciones aritméticas: que expresan en lenguaje natural la generalización observada.
- Las generalizaciones Naïve: se basan en un razonamiento probable para producir una conclusión que va más allá de lo que está contenido en las premisas dadas.
- Las generalizaciones algebraicas: que hablan de la capacidad de identificar en un conjunto de datos algunos detalles que se extienden y son comunes a todos los términos posteriores, es decir: "Generalizar es ser capaz de utilizar el carácter común para proporcionar una expresión algebraica que permita calcular de manera directa cualquiera de los términos de la secuencia" (Radford, 2008, p. 10)

Mason, Graham, Pimm y Gowar (1988) establecen que para realizar un proceso de generalización se llevan a cabo cuatro etapas: ver un patrón, decir cuál es el patrón, registrar el patrón y validar el patrón. En lo que sigue se describen cada una de estas etapas.

Ver un patrón

Esta etapa hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación en los datos observados, los cuales se pueden presentar mediante diferentes registros, como las gráficas, las tablas, los números, entre otros.

Decir cuál es el patrón

En esta etapa se debe expresar con palabras el patrón observado en la etapa anterior, bien sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido.

Registrar el patrón

En esta etapa, se busca hacer visible el patrón o la relación encontrada en la primera etapa a través del lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos).

Validar el patrón

Esta etapa consiste en buscar argumentos o explicaciones que confirmen o rechacen el patrón hallado, esto mediante la búsqueda de relaciones entre las diferentes generalidades simbólicas, en caso de que existan.

2.3.2 Relación entre generalización y argumentación

Díaz (2011), afirma que en la construcción de una generalización aparece el reto de poder expresarla, ya sea de manera oral o escrita, utilizando un lenguaje cotidiano, gráficos y diagramas para poder convencer a otros y así mismo "de qué generalización se obtuvo y sobre todo cómo se obtuvo, recalcando de esta manera la importancia que debe tener (en matemáticas) el procedimiento y la argumentación que justifican una respuesta; y luego, empleando un lenguaje más especializado: el algebraico" (p. 4). Antes de hacerse pública la generalización, esta debe considerarse como una conjetura que debe ser sometida a prueba examinándola con varios casos particulares para verificar su cumplimiento, la cual proporcionará mayor entendimiento y confianza para explicar con claridad las razones que sustentan la generalización. De acuerdo con Zazkiz & Liljedahl (2002), cuando los estudiantes exploran patrones (que según Polya (1966), es una actividad esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar), se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas.

2.3.3 Conjeturar

Es el proceso en el cual los estudiantes elaboran conjeturas para dar solución a un problema propuesto (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Yevdokimov, 2008). En el artículo "*Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos*" los autores proponen los problemas abiertos para estimular la formulación de conjeturas y una posible clasificación de ellas teniendo en cuenta el tipo de problema propuesto y las estrategias que utilizan los estudiantes para su solución en: 1) inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, 2) inducción empírica a partir de casos dinámicos, 3) analogía, 4) abducción y 5) conjeturas basadas en la percepción.

Para llegar a estos diferentes tipos de conjeturas, los autores reconocen un proceso dividido en los siguientes pasos:

El estudio de los datos: se refiere a la observación y la organización de los casos. En esta etapa se buscan semejanzas entre los datos.

La identificación de patrones y regularidades: en esta etapa se busca un patrón y se hace una construcción mental de las semejanzas observadas en la etapa anterior.

La formulación de conjeturas: se plantea una conjetura con base en el patrón hallado en la etapa anterior, pero aún no se sabe si se aplica a los demás casos.

La verificación: en esta etapa se pone a prueba la conjetura en nuevos casos.

La validación de la conjetura: se lleva a cabo cuando se aprueba la conjetura y es llevada a una regla generalmente aceptada. En esta etapa no es suficiente estudiar algunos casos particulares, es necesario justificar la generalización.

En el documento, también se recomienda la resolución de problemas como una estrategia que promueve diferentes formas de razonamiento, entre ellas el razonamiento inductivo, el cual es definido como un proceso natural mediante el cual se formulan conjeturas.

2.3.4 Relación entre la generalización y la conjeturación

Entre los procesos de generalización y conjeturación se observan algunas relaciones. Inicialmente, la primera etapa de los dos procesos es similar. Tanto en el proceso de generalización como en el de conjeturación, inicialmente se debe realizar un estudio de los datos que se tienen y de ellos se deben extraer patrones y regularidades observadas. Luego, en ambos procesos se debe describir el patrón observado en la etapa inicial, y finalmente en los dos procesos se debe dejar un registro escrito de dicho patrón. Es importante resaltar, que también en los dos procesos se sugiere poner a prueba el patrón registrado para darle validez.

En este trabajo de grado, la hipótesis o conclusión producida por los estudiantes (de forma aritmética, algebraica o en "lenguaje natural") es lo que llamaremos conjetura.

2.4 NÚMEROS ESTELARES

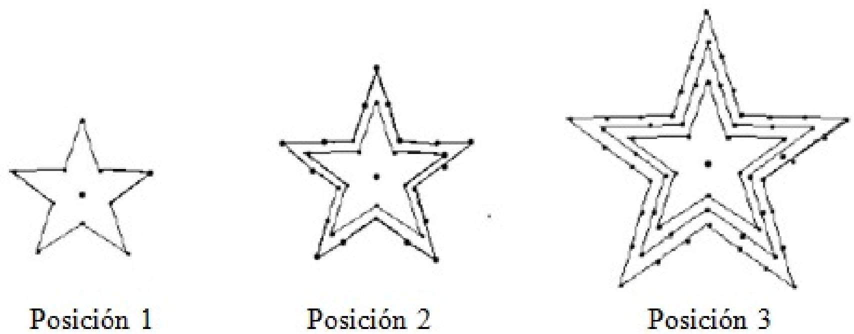
Un número *p*-estelar es la cantidad de puntos que contiene una estrella de *p-puntas*.

Se considera a un número p-estelar a una figura geométrica asociada a una estrella de p-puntas que lleva a ciertos números especiales. Los diagramas de este tipo de números muestran el diseño de una estrella de cuatro, cinco, seis o más puntas con puntos uniformemente espaciados. El número de puntos en cada diagrama representan números *p*–estelares de acuerdo al número de puntas de la estrella.

En la ilustración 6 se presentan números p-estelares en sus primeras tres posiciones cuando las estrellas tienen cuatro, cinco y seis puntas:

a)

b)



c)

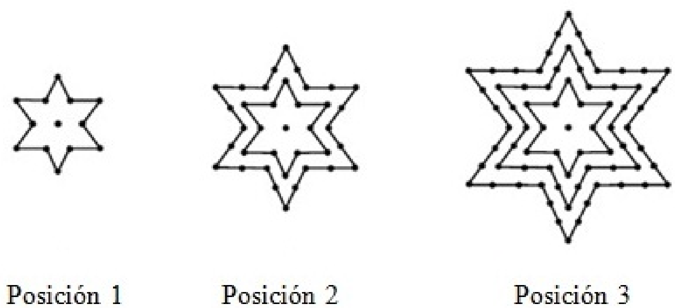


Ilustración 6. a) Números 4-estelares, b) Números 5-estelares c) Números 6-estelares

En este trabajo se consideran los números 4-estelares.

El número de puntos de cualquier número 4-estelar se puede obtener a partir de la expresión: $(2n+1)^2$

Es necesario aclarar que ésta no es la única forma de encontrar los números 4-estelares en cualquier posición.

Los números 4-estelares se pueden representar mediante una colección de puntos, donde cada punto representa una unidad, los cuales se pueden disponer formando una estrella de cuatro puntas. Estos, a su vez determinan una sucesión de números que contiene a la anterior.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para el desarrollo del presente trabajo de grado. Este trabajo se inscribe en un enfoque cualitativo de naturaleza descriptiva, puesto que se pretende clasificar los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. Los datos se recolectaron a través de medios audiovisuales y registros escritos de los estudiantes, posteriormente se realizó un análisis que permitió clasificar los argumentos logrados por los estudiantes durante el desarrollo de la tarea.

La propuesta de intervención se desarrolló en tres etapas: en la primera etapa se seleccionó la población objeto de estudio y se diseñaron los instrumentos de recolección de la información; en la segunda etapa, se aplicaron los instrumentos de recolección de la información en cuatro fases y en la tercera etapa, se diseñaron las categorías de análisis y se realizó el análisis de la información recolectada.

3.1 ETAPA 1

El presente estudio dio inicio en el segundo semestre del año 2011 en la Fundación de Educación Superior San José (Bogotá D.C.), con un grupo de 30 estudiantes, quienes se encontraban cursando primer semestre de Educación Técnica en Ingeniería Industrial de la jornada nocturna, pero la recolección de la información y el análisis de la misma se extendió hasta el primer semestre del año 2012. En el momento de dar inicio a la sistematización de la información, se reconoce que el proceso de generalización no se había completado para todos los patrones identificados por los estudiantes, debido a que algunos patrones eran más elaborados que otros. Esto conlleva a continuar la recolección de la información con un grupo de estudiantes más pequeño del grupo inicial para poder evidenciar los argumentos en el proceso de generalización. Es decir, cuando se recogió la primera tarea, se presentaron inconvenientes para completar la información del proceso que se había iniciado con el grupo, en consecuencia fue necesario realizar un nuevo documento de recolección de la información llamado el complemento de la tarea y además realizar dos entrevistas personalizadas que se aplicaron el siguiente semestre.

El rango de edades del grupo de estudiantes oscilaba entre los 17 y 35 años. Estos estudiantes estaban empezando sus estudios superiores porque las empresas donde laboran así se lo exigían. Tal exigencia no implicaba la falta de interés por parte de ellos en relación con su formación académica; más bien, se constituía en una oportunidad para formarse, prosperar en su calidad de vida e incluso postularse para ascender en la empresa. Además, el grupo se mostró dispuesto a realizar la tarea así esta no hubiera tenido una previa preparación al momento de aplicarla.

Uno de los aspectos característicos de este grupo de estudiantes fue la discontinuidad que presentaba en su experiencia escolar previa. Es decir, en la mayoría de los casos eran personas que habían dejado de estudiar formalmente por períodos de tiempo que oscilaban entre uno y quince años, pero habían ingresado a la institución en el semestre que se recogieron los datos. La institución en la cual se realizó la aplicación de la tarea está ubicada en la localidad de Chapinero en la ciudad de Bogotá y es de carácter privado.

Para aplicar la tarea se seleccionó un curso en donde uno de los autores de este trabajo impartía la asignatura de Matemática Básica, el grupo de estudiantes era organizado y de gran compromiso con la clase de matemáticas. El instrumento se aplicó al grupo de estudiantes de primer semestre que contribuirían al desarrollo de la tarea y a la recopilación de los datos para el trabajo. El curso fue dividido en grupos de tres estudiantes para efectuar el trabajo establecido; durante el transcurso de la aplicación de la tarea se conservaron los grupos. Es necesario aclarar que este grupo en ningún momento había elaborado actividades de este tipo en la clase de matemáticas, porque al indagar de manera informal sobre sus clases de matemáticas, los estudiantes respondieron que eran de forma tradicional.

3.1.1 Instrumentos para la recolección de la información

Para la recolección de la información, inicialmente se diseñó una tarea que involucra procesos de generalización con números 4-estelares, posteriormente se elaboró un complemento de la tarea y finalmente se realizaron dos entrevistas personalizadas para completar los argumentos iniciados en la tarea.

La entrevista personalizada es una herramienta utilizada en este trabajo en la que desde una lista de preguntas puntuales la parte entrevistada debe responder en el grado de libertad que considere pertinente y a su vez el entrevistador trata de recoger de manera literal la información que de allí se derive. Esta herramienta no posee un esquema de cuestionarios al que tenga que acogerse el entrevistado lo que permite contar con un espectro más amplio en la información sobre el tema que se esté abordando. (Abad, 1997)

Instrumento 1: Tarea

La tarea propuesta a los estudiantes se elabora en varios momentos importantes antes de su aplicación. Inicialmente la tarea fue tomada de la organización IB del bachillerato internacional (2009) la cual es ajustada y rediseñada teniendo en cuenta el modelo mínimo de argumentación de Toulmin como fue presentado en el marco de referencia.

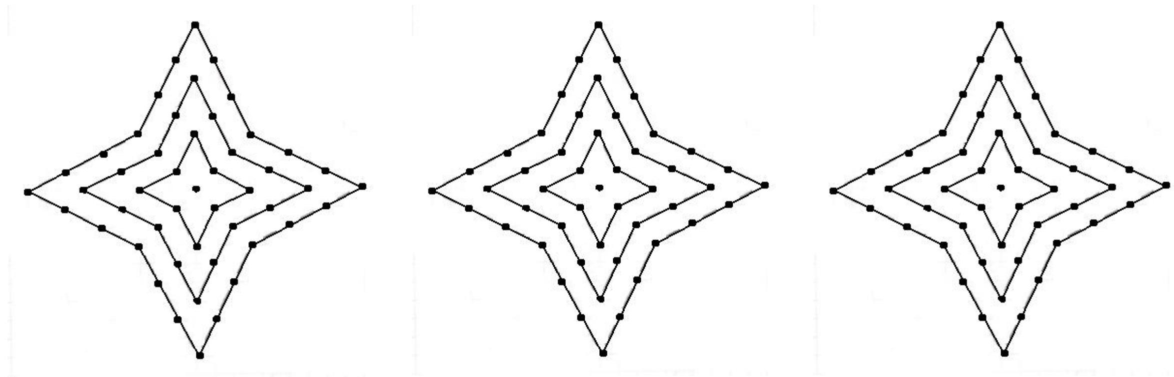
A continuación se describe el proceso de elaboración de la tarea de generalización, iniciando con los números 6-estelares, que tenía cinco preguntas en la que los estudiantes podían desplegar diferentes argumentos de acuerdo con el modelo de Toulmin, y en la que intervienen procesos de generalización, la cual presentó inconvenientes en el momento de su representación gráfica. Luego se realizó la tarea que fue aplicada con números 4-estelares que contenía la misma cantidad de preguntas cambiando las figuras que conforman la secuencia propuesta.

La siguiente es la tarea propuesta a los estudiantes:

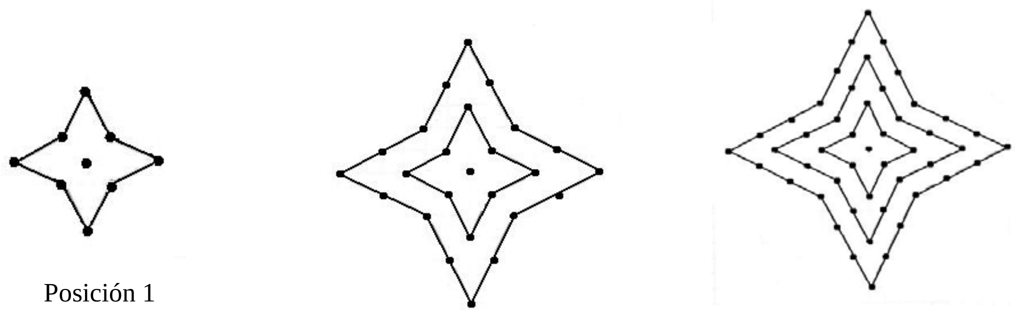
LA TAREA

Considere las figuras estelares (con forma de estrella) de 4 puntas, que llevan a los números 4-estelares.

1. Indica por lo menos tres métodos diferentes de contar la cantidad de puntos que tiene un número 4-estelar en la posición 3. Rota la figura para buscar más formas de contar los puntos.



A continuación se observan las tres primeras representaciones correspondientes a una estrella de cuatro puntas desde la posición 1 hasta la posición 3.



Posición 1 Posición 2 Posición 3

2. Si la secuencia de números 4 – estelares es como se indica en las figuras, dibuja la figura que sigue en la secuencia, es decir la posición 4 e indica cómo la construiste.

3. El número 4-estelar en cada etapa es el número total de puntos que contiene el diagrama. Halla el número 4-estelar de cada una de las posiciones utilizando los métodos descritos en el numeral 1 y describe en forma detallada la manera en que contaste los puntos de cada método.
4. ¿Es posible hallar el 4 – estelar en cualquier posición para cada uno de los métodos? Justifica tu respuesta.

5. ¿Cuál es el número de puntos del 4-estelar en la posición 18? Sin hacer el dibujo ¿cómo saber que ese número es correcto?

La tarea tenía la intención de evidenciar argumentos producidos por los estudiantes al realizar una tarea de generalización. Con el primer numeral se pretendía familiarizar a los estudiantes con los números 4-estelares; con el segundo numeral, se buscaba que identificaran la forma en que fue construida la estrella para que completaran la secuencia, ver el patrón desde la perspectiva de Mason (1988). El tercer numeral se refería a que los estudiantes aplicaran los patrones hallados a las diferentes posiciones dadas de la estrella, es decir, el patrón según Mason. En el cuarto numeral, la intención era que encontraran una generalidad para calcular un número 4-estelar en cualquier posición mediante registrar el patrón en cada uno de los métodos encontrados por los estudiantes para encontrar el número 4-estelar en cualquier posición. Con el quinto numeral, los estudiantes verificarán si la generalidad obtenida era válida.

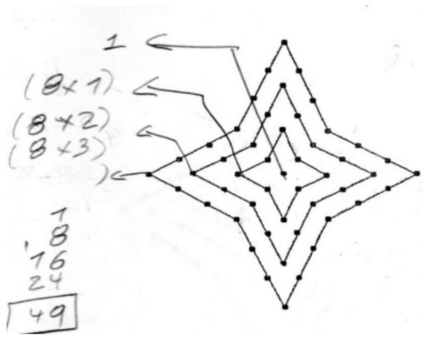
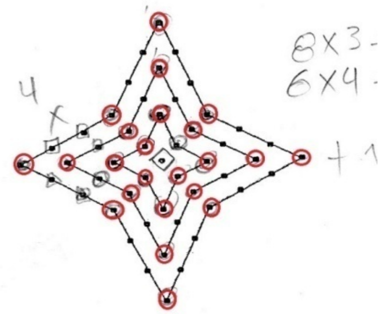
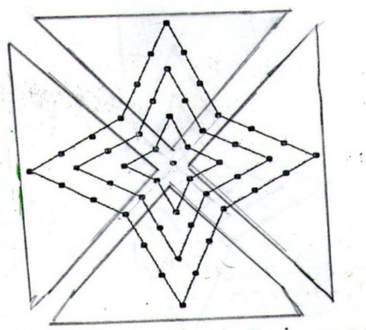
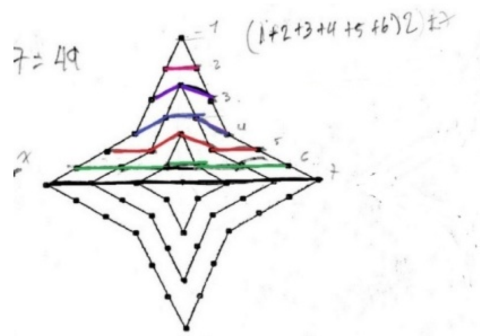
Instrumento 2: Complemento de la Tarea

Con el análisis de las respuestas producidas por parte de los estudiantes después de aplicar la tarea solamente se describe un argumento completo. Por este motivo, fue necesario elaborar el instrumento 2 denominado complemento de la tarea. Este instrumento se le aplicó solamente a cuatro parejas de estudiantes del mismo grupo en el siguiente semestre. Para la elaboración del complemento de la tarea, los autores de este trabajo habían revisado las respuestas consignadas por los estudiantes en la solución inicial de la tarea, y se plantearon nuevas preguntas para este instrumento teniendo en cuenta los patrones identificados por los estudiantes en la tarea y con el propósito de completar la tarea propuesta inicialmente.

El complemento de la tarea propuesto a los estudiantes es:

COMPLEMENTO DE LA TAREA

Observa las siguientes formas de contar los puntos de un número 4-estelar en la tercera posición (realizada por tus compañeros de clase).

<table>
<tr>
<td>Forma 1

</td>
<td>Forma 2

</td>
</tr>
<tr>
<td>Forma 3
</td>
<td>Forma 4

</td>
</tr>
</table>

1. **¿Estas formas de contar los puntos de la estrella sirven para cualquier posición?** Por ejemplo, ¿sirven para la posición 80?

2. ¿Cómo las expresarías para la posición x ?

3. Cada forma de contar brinda un enunciado o expresión, ¿Estos enunciados o generalidades aportan el mismo resultado?

El propósito del complemento de la tarea era evidenciar más argumentos producidos por los estudiantes durante la solución de la tarea inicial. Con el primer y segundo numeral se pretendía que los estudiantes encontraran diferentes generalidades que les permitieran describir la regularidad observada en cada patrón y con el tercer numeral, se buscaba que los estudiantes determinaran si las generalidades obtenidas con cada patrón eran equivalentes entre sí, buscando con esto que se desarrollaran otro tipo de pensamientos.

Instrumento 3: Entrevista personalizada 1

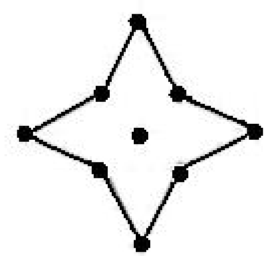
La entrevista personalizada 1 se realizó porque con el instrumento anterior los estudiantes no lograron encontrar una generalidad que describiera la regularidad observada en el patrón denominado "*Forma 4*".

Este instrumento de recolección de la información se le aplicó a una pareja de estudiantes del mismo grupo al cual se le aplicó la tarea y el complemento de la misma.

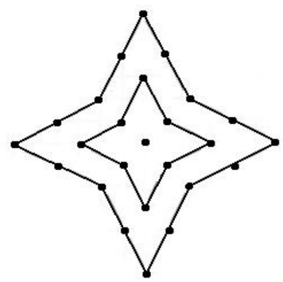
A continuación se presenta la entrevista personalizada 1 realizada a los estudiantes:

ENTREVISTA PERSONALIZADA 1

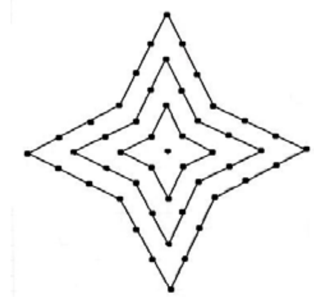
1. Aplica la forma 4 de conteo para las 8 primeras posiciones de un número 4-estelar.



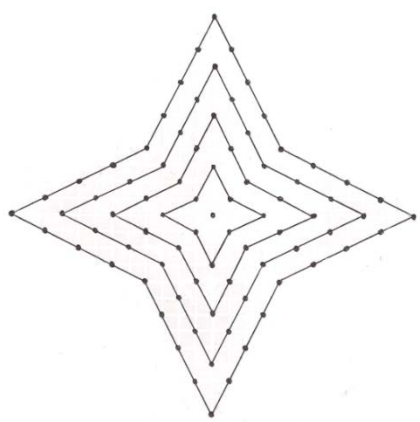
Posición 1



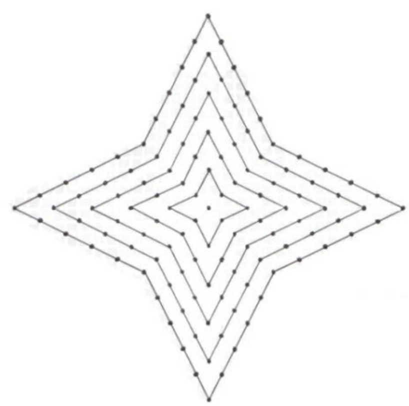
Posición 2



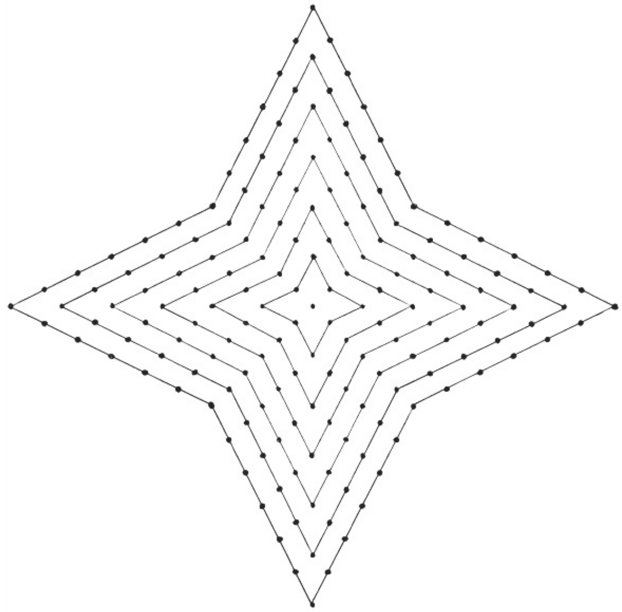
Posición 3



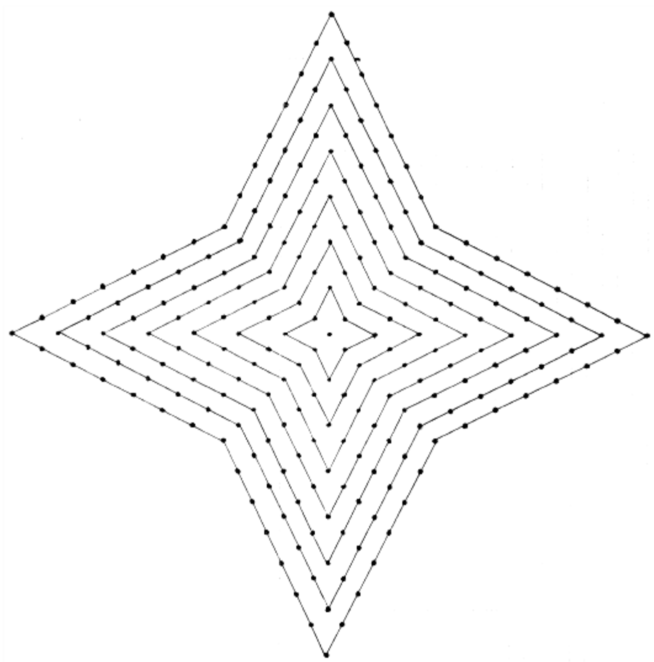
Posición 4



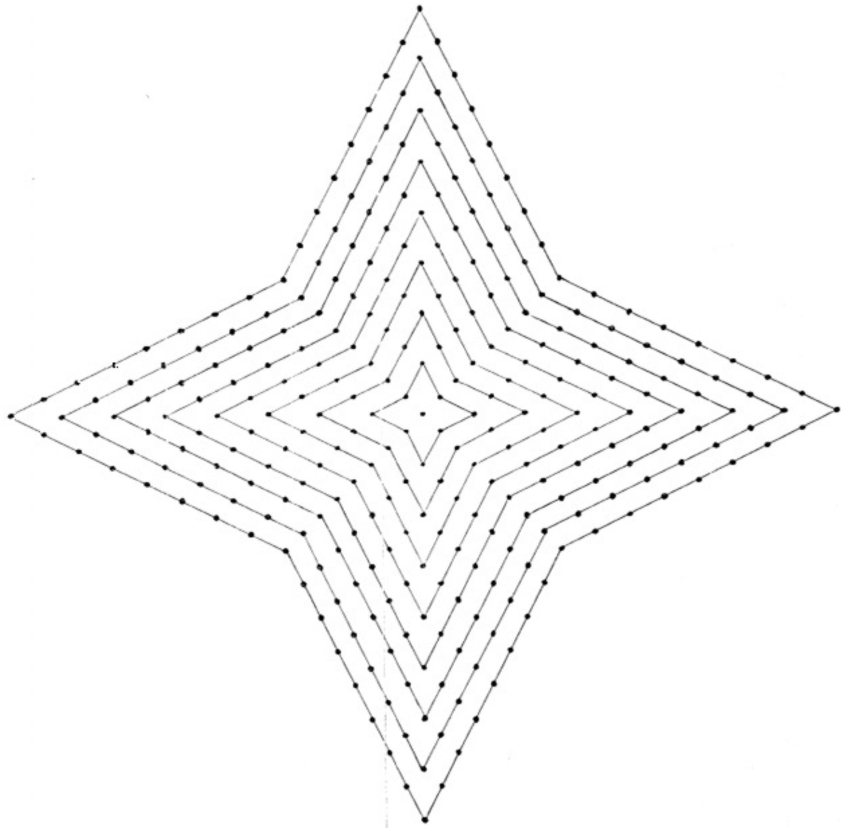
Posición 5



Posición 6



Posición 7



Posición 8

2. Describe la regularidad observada en esta forma de conteo.

3. Aplica la forma 4 de conteo a la posición 1000 de un número 4-estelar. ¿Cuántos puntos tiene la estrella en esta posición?

4. Encuentra una generalidad en términos de una variable como x que te permita calcular cualquier posición de un número 4-estelar.

El propósito de esta entrevista fue completar el argumento que había quedado inconcluso en la aplicación del instrumento anterior.

La entrevista está conformada por cuatro numerales. El primero tiene la intención de aplicar el patrón denominado "*Forma 4*" a las ocho primeras posiciones de un número 4 – estelar; el segundo numeral, busca describir la regularidad observada en este patrón (ver el patrón), el tercero busca aplicar el patrón a la posición 1000 de un número 4 – estelar (decir el patrón) y el cuarto numeral le presenta a los estudiantes la necesidad de llegar a una generalización para encontrar la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición (registrar el patrón), al intentar encontrar la cantidad de puntos en una posición considerable, como lo es la posición 1000.

Instrumento 4: Entrevista personalizada 2

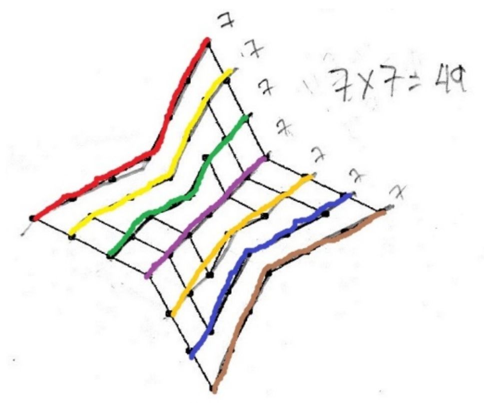
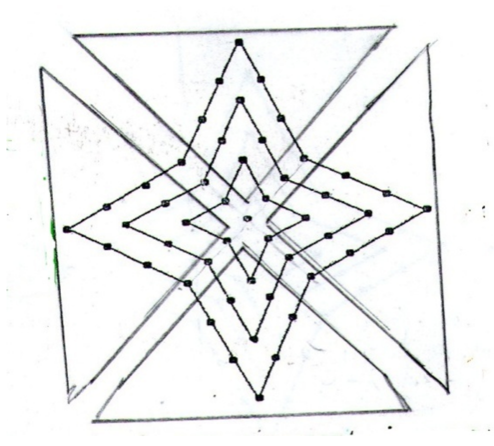
La entrevista personalizada 2 fue necesario hacerla porque con los instrumentos anteriores los estudiantes no evidenciaron una relación entre las generalidades encontradas para cada patrón.

Para la elaboración de esta entrevista se recogieron todas las generalidades obtenidas por los estudiantes en los instrumentos anteriores, pero fue la expresión $(2x+1)^2$ la que permitió conectar las demás generalidades obtenidas al realizar la simplificación de cada una de ellas.

Este instrumento de recolección de la información se le aplicó a la misma pareja de estudiantes seleccionada del grupo.

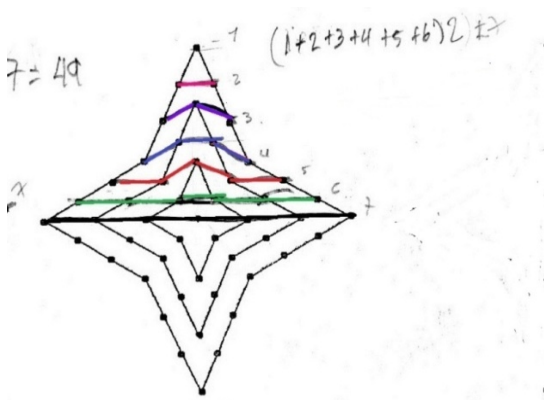
A continuación se presenta la entrevista personalizada 2 realizada a los estudiantes:

ENTREVISTA *PERSONALIZADA 2*

FORMA DE CONTEO	EXPRESIÓN GENERAL
FORMA 5 	$(2x + 1)^2$
FORMA 3 	$(x^2 \cdot 4) + (x \cdot 4) + 1$

<table>
<tr>
<td>

FORMA 4

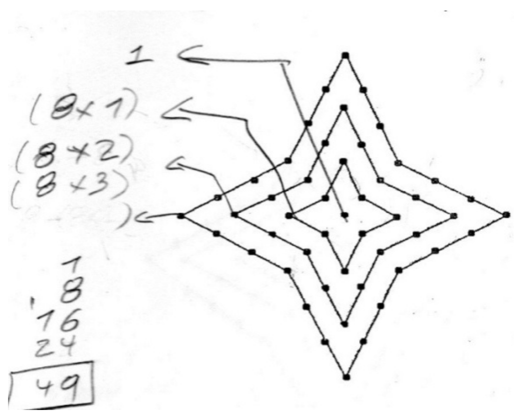


</td>
<td>

$$\left[\left(\frac{(x\cdot 2)(x\cdot 2+1)}{2}\right)*2\right]+(x\cdot 2+1)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

FORMA 1

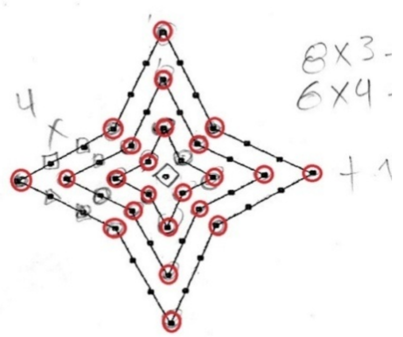


</td>
<td>

$$1+(8\times 1)+(8\times 2)+\cdots+(8\times x)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

FORMA 2



</td>
<td>

$$1+[8+(8\times 0)]+[8+(8\times 1)]+[8+(8\times 2)]+\cdots+[8+8(x-1)]$$

</td>
</tr>
</table>

1. Con cada una de las formas ¿se obtiene el mismo resultado en la posición 1500?
2. ¿Cómo se puede estar seguro de que con cualquiera de las formas de conteo se llega al mismo resultado?

El propósito de esta entrevista era que los estudiantes reconocieran que las generalidades obtenidas con los patrones eran equivalentes. Por este motivo, se les propuso que encontraran la cantidad de puntos de una posición grande de un número 4 – estelar utilizando las cinco generalidades obtenidas en cada una de las etapas anteriores para la posición 1500 y así determinar si es posible obtener el mismo resultado con cualquiera de las cinco formas descubiertas.

Esta entrevista está conformada por dos numerales. El primero tiene la intención de de que el estudiante verifique si se obtiene la misma cantidad de puntos al calcular la posición 1500 de un número 4 – estelar con cualquiera de las generalidades enunciadas en el instrumento y el segundo numeral pretende que los estudiantes descubran la equivalencia que se puede establecer entre ellas.

3.2 ETAPA 2

Durante esta etapa se aplicaron cuatro instrumentos para la recolección de la información teniendo en cuenta las siguientes fases:

3.2.1 Fase 1

En esta fase se aplicó la tarea al grupo completo de 30 estudiantes. Este grupo no estaba familiarizado con este tipo de tareas ni con la actividad que se pretendía realizar en la solución de la tarea, porqué el desarrollo de las clases en la institución sigue un modelo tradicional.

Se hizo un registro audiovisual o filmación del desarrollo de la tarea en pequeños grupos de tres estudiantes. Sin embargo, la filmación se centró en dos o tres grupos inicialmente y luego en las dos socializaciones que se alcanzaron a realizar en esta primera fase, en la cual la tarea propició la búsqueda de los diferentes tipos de argumentos. Para la realización de la tarea se asumió que los grupos de tres estudiantes utilizarían una sesión de clase de 90 minutos. No obstante, en la actividad se empleó dicho tiempo, pero no todos los grupos lograron completar la tarea, lo cual obligó al diseño de un nuevo instrumento para completar el proceso de generalización.

3.2.2 Fase 2

En esta fase se citaron a cuatro parejas de estudiantes del grupo inicial y se les propuso el complemento de la tarea en un salón dispuesto para tal fin, esto con el propósito de realizar un registro audiovisual más completo de las interacciones de la pareja al intentar resolver el instrumento propuesto.

Como las parejas ya estaban familiarizadas con los números 4-estelares y el tipo de actividad, fue más sencillo dar a conocer el propósito del instrumento como complemento del anterior.

Se hizo una filmación de las interacciones entre las parejas y al final se recogieron los registros escritos de los estudiantes donde se presentaron las generalidades obtenidas para los patrones sugeridos.

Para la realización del complemento de la tarea se dispuso de una sesión de clase de 90 minutos. Sin embargo, ninguna pareja de estudiantes logró encontrar una generalidad para uno de los patrones dados, lo cual produjo el diseño de un nuevo instrumento para complementar la actividad propuesta.

3.2.3 Fase 3

Esta fase surgió por la necesidad de encontrar una generalidad para uno de los patrones hallados por los estudiantes en la primera fase y que no fue lograda por ellos en la fase anterior. Por este motivo se diseñó la entrevista personalizada 1.

Esta entrevista se llevó a cabo cuatro semanas después en un espacio diferente a la clase y solamente se le realizó a una pareja de estudiantes de las seleccionadas en la fase anterior, la cual fue seleccionada por mostrar mayor disposición y compromiso hacia las tareas propuestas.

La entrevista inicia cuando se entrega el instrumento a los estudiantes, luego se les da el tiempo suficiente para que la resuelvan, explicándoles la importancia de realizar el registro escrito detallado de cada una de las preguntas del instrumento y posteriormente, se hizo un registro audiovisual de los argumentos usados por los estudiantes para justificar las respuestas dadas.

3.2.4 Fase 4

Esta fase surgió por la necesidad de encontrar una relación entre las generalidades obtenidas en las fases anteriores.

Para esta fase se diseñó la segunda entrevista personalizada y se llevó a cabo dos semanas después, también en un espacio diferente al de la clase. Esta entrevista se le realizó a la misma pareja de estudiantes de la fase inmediatamente anterior.

Para el diseño de esta entrevista, los autores de este trabajo recopilaron las generalidades obtenidas por los estudiantes en las fases anteriores y realizaron dos nuevas preguntas encaminadas a establecer las relaciones entre dichas generalidades.

La entrevista inició cuando se entrega el instrumento a los estudiantes y se les brindó el tiempo suficiente para que resolvieran las preguntas, el tiempo para realizar la entrevista fue de 80 minutos. Al igual que en la entrevista anterior, también se les pidió a los estudiantes que realizaran el registro escrito de manera detallada de cada una de las justificaciones de las respuestas a las preguntas del instrumento.

Al final, se hizo un registro audiovisual del trabajo desarrollado por ellos. En los que se exponen las relaciones encontradas por los estudiantes entre las diferentes generalidades obtenidas y el uso de la herramienta Excel para verificar que con cualquier generalidad se puede calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar.

En la tabla 1, se especifican los medios utilizados para registrar la información de la actividad realizada por los estudiantes durante cada fase.

Fases	Medios utilizados	Tiempo
Fase 1: La tarea	Relatoría correspondiente a la sesión de clase por parte del docente observador, registro audiovisual, registros escritos y una transcripción en la que se exploran e identifican las conjeturas logradas durante el desarrollo de la tarea.	Una sesión de clase (90 min)
Fase 2: Complemento de la tarea	Registro audiovisual y transcripción de la sesión en que elaboran el complemento de la tarea.	Una sesión de clase (80 min)
	Entrevista realizada a las cuatro parejas de estudiantes con miras a justificar el proceso que siguieron para el desarrollo del complemento de la tarea.	Primera pareja (15 min) Segunda Pareja (7 min) Tercera pareja (no realizo la entrevista) Cuarta pareja (no realizo la entrevista)
	Registro escrito de las respuestas de los estudiantes a las preguntas formuladas con el fin de tener evidencias de su argumentación frente a la herramienta propuesta.	El trabajo extra clase de los estudiantes solo lo desarrollaron dos parejas.
Fase 3: Entrevista personalizada 1	Registro audiovisual y transcripción de la primera entrevista realizada a la pareja de	Tiempo estimado (120 min)

	estudiantes sobre las argumentaciones que utilizaron para hallar el término general para la Forma 4.	
	Registro escrito de las respuestas de los estudiantes a las preguntas planteadas.	Trabajo en clase de los estudiantes.
Fase 4: Entrevista personalizada 2	Registro audiovisual y transcripción de la segunda entrevista realizada a la pareja de estudiantes con el fin de identificar las argumentaciones que lograron para hallar la relación entre las generalidades algebraicas encontradas en cada una de las formas de conteo.	Tiempo estimado (80 min)
	Registro escrito en el que los estudiantes presentan tablas de Excel con la cantidad de puntos que tiene un número 4-estelar en las primeras 1500 posiciones.	Trabajo en clase de los estudiantes (40 min)

Tabla 1. Medios utilizados para registrar la información

3.3 ETAPA 3

Durante esta etapa se describe el proceso que se tuvo en cuenta para analizar la información. Inicialmente, se analizó el video y se hizo una relatoría de la clase en la que se aplicó el primer instrumento, es decir, la tarea. Luego, se hizo una transcripción de los momentos en los cuales los estudiantes expresaban sus argumentos cuando estaban distribuidos en pequeños grupos y en las dos socializaciones lo cual se describe a continuación:

Al tomar como apoyo el registro audiovisual, se realizó el análisis de la actividad. Para ello, inicialmente, se analizó el registro audiovisual para reconocer los instantes claves de la solución de la actividad en procesos utilizados por los estudiantes en términos argumentativos. A continuación se hizo una serie de relatorías de lo percibido en la sesión de clase, el complemento de la tarea, la entrevista personalizada 1 y la entrevista personalizada 2. Los registros audiovisuales fueron complementados por las transcripciones de las mediaciones, las discusiones realizadas por los estudiantes y la docente en la sesión de clase. La lectura de las transcripciones hechas llevo a los autores del trabajo a identificar la necesidad de realizar algunos ajustes con la finalidad de evidenciar en ellas una fiel reproducción de la actividad matemática realizada por los estudiantes en cada uno de los episodios del estudio. Por ello fue necesario:

- Completarlas con gráficas, capturadas de los registros audiovisuales, para registrara las producciones de los estudiantes.
- Realizar aclaraciones que describieran las acciones no verbales de los estudiantes y en algunas ocasiones de la profesora. Es conveniente clarificar que este hecho no se hizo con el ánimo de realizar alguna interpretación de la actividad de ninguno de los actores mencionados.

Los correspondientes ajustes hechos a la lectura de los registros de transcripción permitieron identificar y seleccionar los diferentes argumentos que se querían evidenciar en este trabajo.

Con ayuda de las relatorías se identificaron argumentos que se produjeron en el transcurso de la actividad. La identificación se hizo con ayuda del modelo de Toulmin sobre argumentación. De la totalidad de los argumentos encontrados, se realizó una ordenación de estos a partir de las categorías emergentes propuestas por los autores del trabajo.

La información que se obtuvo de las entrevistas permitió reconocer que la interpretación de los estudiantes es cualitativamente distinta a medida que se práctica e interioriza el concepto de los números 4 estelares. Este proceso se desarrollo en tres fases: Revisión de la información, análisis de la información adquirida y clasificación de hallazgos.

3.3.1 Revisión de la información

Después de terminar las tareas propuestas en cada una de las fases de recolección de la información, se procede a la revisión de los registros escritos realizados por los estudiantes, y las producciones hechas por ellos durante las dos socializaciones; las cuales son grabadas en forma audiovisual. Además, se realiza la transcripción de las dos entrevistas personalizadas registradas en audio y video. Los resultados obtenidos a partir de estos instrumentos arrojaron elementos significativos para reconocer las principales características de los argumentos que emergen de los estudiantes teniendo en cuenta al tipo de respuestas producidas por ellos frente a las preguntas propuestas en cada actividad. Como lo plantean Azcárate y Camacho (2003) cuando no referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que se destaca el proceso de abstracción que consiste en la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. Las diferentes respuestas de los estudiantes correspondieron al nivel de experiencia y conocimiento en el área lógico matemática lo que define aspectos generales de los procesos cognitivos acordes a las edades.

3.3.2 Análisis de la información adquirida

A partir de los datos obtenidos en los instrumentos de recolección se procedió a sistematizar los resultados mediante el análisis de los registros escritos y las correspondientes transcripciones de los registros audiovisuales. La información se analizó en forma integrada al tener en cuenta los registros escritos, los registros audiovisuales y las transcripciones realizadas. La revisión de los diferentes registros nos permitió complementar y evidenciar el proceso de generalización. De esta manera se hace posible ubicar cada una de las partes de los argumentos producidos por los estudiantes en la unidad mínima de argumentación. Es posible observar algunas cuestiones en torno a los distintos tipos de generalización que surgen en el desarrollo del proceso. Se puede notar que los estudiantes plantean diversas expresiones en forma algebraica, aritmética y en "lenguaje natural" para solucionar una misma pregunta.

El análisis de la información centra la atención en evidenciar los argumentos logrados por los estudiantes en sus producciones escritas durante el desarrollo de las actividades al completar el proceso de generalización y a la interpretación de los argumentos en los términos de la unidad mínima de argumentación.

3.3.3 Clasificación de hallazgos

Esta última fase se realiza la clasificación de los argumentos producidos por los estudiantes a partir del garante y las hipótesis utilizando la unidad mínima de argumentación. Al final, se evidencia el proceso de generalización de acuerdo Mason y otros expuesto en el marco teórico.

En los registros escritos y en las transcripciones de los registros audiovisuales se identificaron los patrones gráficos, las generalizaciones algebraicas, las experimentaciones con ayuda de ejemplos, las “observaciones” y las manipulaciones algebraicas producidas por los estudiantes las cuales se convirtieron en los garantes de cada uno de los argumentos. Así como las hipótesis (conjeturas) determinadas por ellos para cada uno de los argumentos que se produjeron en casos particulares o en casos generales.

En consecuencia, surgen unas categorías emergentes para el análisis de la información a partir de los argumentos producidos por los estudiantes al realizar un proceso de generalización. Las categorías y subcategorías sugeridas por los autores de este trabajo son planteadas a partir de las determinadas por Cañadas (2012) y Radford (2010). Estas categorías orientan el análisis de este trabajo como se expone en el siguiente capítulo.

4. ANÁLISIS

En este capítulo se presenta una descripción de los procedimientos desarrollados por los estudiantes al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares. Para ello, inicialmente se muestran los argumentos evidenciados por los estudiantes en cada una de las fases de recolección de la información, posteriormente se proponen las categorías que orientan el análisis y finalmente se clasifican los argumentos producidos por los estudiantes en el proceso de generalización.

4.1 ARGUMENTOS EVIDENCIADOS EN CADA FASE

Como se mencionó en el capítulo anterior, la recolección de la información se hizo en cuatro fases. En la **fase 1** se realizó la implementación de la tarea en la clase de matemáticas 1. Durante la **fase 2** se diseñó y aplicó el complemento de la tarea. Para la **fase 3** se realizó la primera entrevista personalizada, y en la **fase 4**, la segunda entrevista personalizada.

4.1.1 Fase 1

Para esta fase, se diseñó la tarea en la que los estudiantes debían identificar diferentes formas de contar los puntos de un número 4-estelar en la tercera posición, luego debían describir el patrón observado y finalmente encontrar una generalidad para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición.

En esta fase, se identificaron dos argumentos producidos por uso de un patrón gráfico, los cuales se muestran a continuación:

Argumento 1 producido por uso de patrón gráfico

Este argumento surge cuando los estudiantes intentan representar en las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar, el patrón descrito en la tercera posición. Los estudiantes realizan este procedimiento con ayuda de varias estrellas de las dos primeras posiciones de un número 4-estelar, permitiéndoles evidenciar que es posible representarlo en diferentes posiciones. La identificación de este patrón gráfico les permitió a los estudiantes representarlo en diferentes posiciones y así describir su proceso.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 7. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

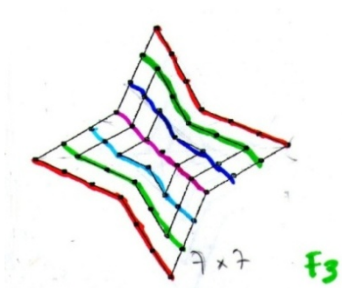
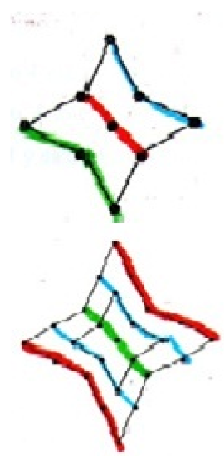
ARGUMENTO (1)		
DATOS 		**HIPÓTESIS (CONCLUSIÓN)** El patrón se ajusta a las primeras posiciones de un número 4-estelar.
	GARANTE 	

Ilustración 7. Argumento 1 producido por uso de patrón gráfico

Argumento 2 producido por uso de patrón gráfico

Inicialmente los estudiantes encontraron un patrón que describieron en la estrella que corresponde a la tercera posición de un número 4-estelar. El patrón consiste en conformar grupos que contengan la misma cantidad de puntos usando líneas, así como se muestra en la ilustración 8:

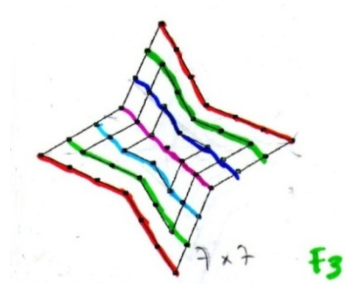


Ilustración 8. Patrón#1. Multiplicación de líneas por los puntos de cada línea a partir de la relación de los números 4 estelares

Luego, los estudiantes describen la expresión general obtenida en lenguaje natural y la expresan de la siguiente manera:

> "Se pueden sacar 7 líneas. Se pueden dibujar horizontales o verticales. En total hay 7 líneas de 7 puntos cada una, o sea que hay $7 \times 7 = 49$ puntos"

En la socialización, uno de los estudiantes del grupo hace el siguiente aporte:

> "De acuerdo a las formas de contar que encontramos aplicárselas a las estrellas más pequeñas. Por ejemplo la forma 1 que utilizamos fue la de contar lados, entonces mi primera estrella nos quedaría formando líneas de 3 en 3 (realizando el proceso en el tablero), y la segunda estrella formando líneas de 5 en 5".

Y finalmente, los estudiantes representaron la conjetura por medio del lenguaje algebraico, así:

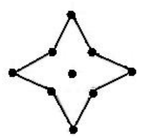
$$\text{Total de puntos de la estrella} = (2x+1)^2$$

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 9. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

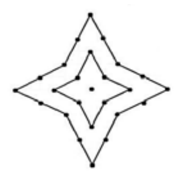
ARGUMENTO (2)

DATOS:

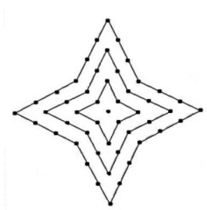
Gráficas de los números 4 – estelares



Posición 1



Posición 2



Posición 3

HIPÓTESIS (CONJETURAS):

El número 4-estelar en cualquier posición se puede encontrar con la siguiente expresión:

Total de puntos de la estrella= $(2x+1)^2$

GARANTES (PATRONES):

El patrón que se observa en cada una de las estrellas.

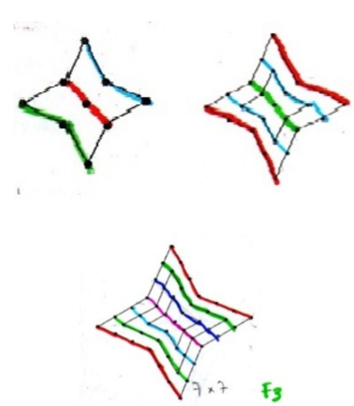


Ilustración 9. Argumento 2 producido por uso de patrón gráfico

En esta fase, los estudiantes lograron identificar varios patrones al contar la cantidad de puntos de un número 4-estelar, pero solo uno de ellos condujo a una generalidad. Sin embargo, estos patrones sirven como fundamento para el trabajo que se va a realizar en la siguiente fase.

4.1.2 Fase 2

Durante la fase 2, los estudiantes lograron tres argumentos producidos por el uso de un patrón gráfico. Para esta fase, se diseñó e implementó un complemento para la tarea inicial, con el fin de completar los elementos necesarios para los argumentos logrados por los estudiantes. En esta fase, los estudiantes debían calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en la posición 80 para las 4 formas de conteo propuestas, llevándolos a la búsqueda de una generalidad para cada una de ellas. De las cuatro parejas de estudiantes, solo dos lograron representar la generalización observada mediante una generalidad para 3 de las 4 formas de conteo dadas y los argumentos encontrados en esta fase son:

Argumento 3 producido por uso de patrón gráfico

Este argumento se inició en la fase 1, en la que los estudiantes identificaron el patrón para contar la cantidad de puntos de un número 4-estelar. El patrón consiste en dividir la estrella en sus cuatro puntas sin tomar los puntos que son comunes entre ellas, como se muestra en la Ilustración 10:

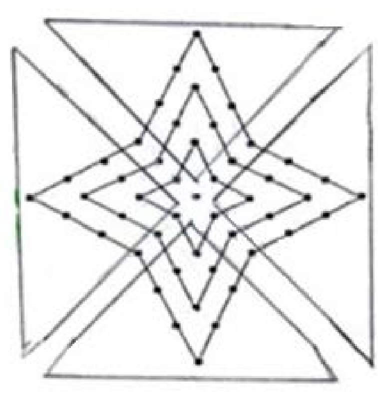


Ilustración 10. Patrón #2 divide la estrella por puntas a partir de la relación de los números 4 estelares

En esta fase, inicialmente los estudiantes formularon una conjetura para encontrar la cantidad de puntos de cualquier posición de un número 4-estelar a partir del patrón presentado. La expresión general obtenida se describe por medio del lenguaje natural y la expresan los estudiantes de la siguiente manera:

“Total de puntos = (puntos de la punta × número de puntas) + (número de puntos de la diagonal entre los triángulos × cuatro) + 1”

Luego, los estudiantes aplicaron el patrón presentado a las dos primeras posiciones de la estrella como se muestra en la Ilustración 11, lográndose con esto el razonamiento inductivo#2 producido por un patrón gráfico.

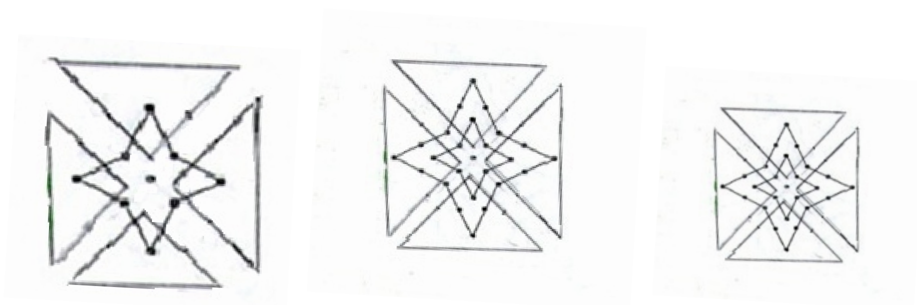


Ilustración 11. Patrón #2 aplicado en las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar a partir de la relación de los números 4 estelares

Finalmente, los estudiantes representaron la conjetura por medio del lenguaje algebraico, así:

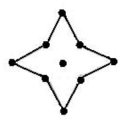
“Total de puntos de la estrella= $(x^2 \times 4) + (x \times 4) + 1$”

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 12. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

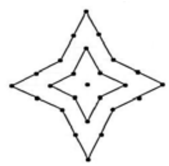
ARGUMENTO (3)

DATOS:

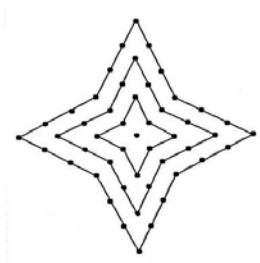
Gráficas de los números 4 – estelares



Posición 1



Posición 2



Posición 3

HIPÓTESIS (CONJETURA):

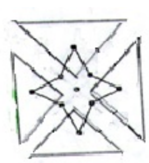
El número 4-estelar en cualquier posición se puede encontrar con la siguiente expresión:

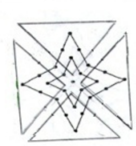
Total de puntos de la estrella =

$$(x^2 \times 4) + (x \times 4) + 1$$

GARANTES (PATRONES):

El patrón que se observa en cada una de las estrellas.





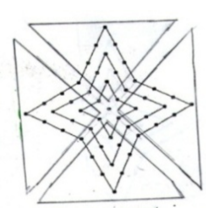


Ilustración 12. Argumento 3 producido por uso de patrón gráfico

Argumento 4 producido por uso de patrón gráfico

En esta misma fase, se completa otro argumento con un patrón identificado en la fase 1 y diferente al anterior.

El patrón identificado por los estudiantes consiste en realizar la descomposición de un número 4 estelar en la posición 3 por estrellas y expresar la cantidad de puntos de cada una como un número múltiplo de 8.El patrón se presenta en la Ilustración 13:

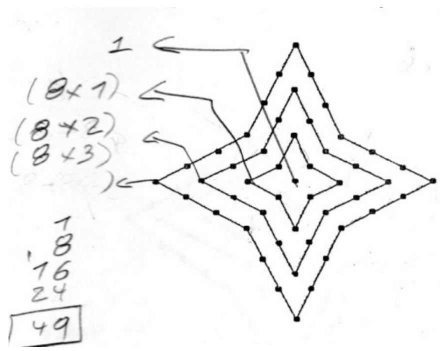


Ilustración 13. Patrón #3 Divide la figura en estrellas a partir de la relación de los números 4 estelares

En esta fase, inicialmente los estudiantes formularon una conjetura la cual es expresada por la pareja de estudiantes de la siguiente manera:

> "Adentro está el punto. Luego la primera estrella que tiene 8 puntos. Luego la segunda estrella que tiene 16 puntos. Y la última estrella que tiene 24 puntos, para encontrar cualquier posición de un número 4-estelar a partir del patrón hallado".

La generalidad obtenida se presenta con un polinomio aritmético y la enuncian los estudiantes así:

$$1+8\times1+8\times2+8\times3$$

$$1+8+16+24$$

$$49$$

Posteriormente, los estudiantes verifican la conjetura en las dos primeras posiciones de la estrella como se muestra en la Ilustración 14, lográndose con esto el argumento producido por uso de un patrón gráfico.

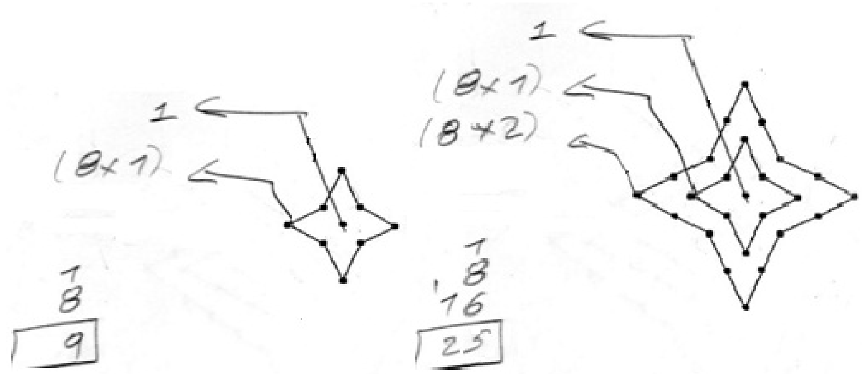


Ilustración 14. Patrón #3 en las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar a partir de la relación de los números 4 estelares

Finalmente, los estudiantes representaron la conjetura por medio del lenguaje algebraico, así:

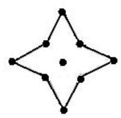
$$\text{Total de puntos de la estrella} = 1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + \cdots + (8 \times x)$$

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 15. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

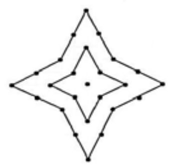
ARGUMENTO (4)

DATOS:

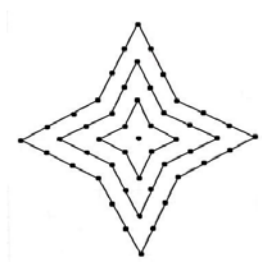
Gráficas de los números 4 – estelares



Posición 1



Posición 2



Posición 3

HIPÓTESIS (CONJETURA):

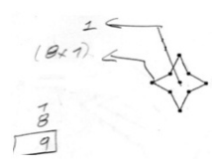
El número 4-estelar en cualquier posición se puede encontrar con la siguiente expresión:

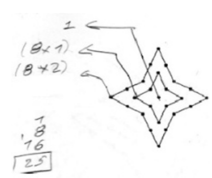
"Total de puntos de la estrella

$$= 1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + \dots + (8 \times x)"$$

GARANTES (PATRONES):

El patrón que se observa en cada una de las estrellas.





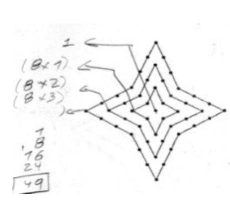


Ilustración 15. Argumento 4 producido por uso de patrón gráfico

Argumento 5 producido por uso de patrón gráfico

Este es el último argumento logrado por los estudiantes durante la fase 2, es decir, durante el complemento de la tarea. Al igual que los dos argumentos anteriores, éste también se inicia durante la fase 1 con la identificación del patrón que les permitió contar los puntos de la estrella en la posición 3. El patrón consiste en señalar los 8 puntos de la estrella que son como sus vértices [puntos rojos en la Ilustración 20] y los demás puntos como intermedios, agregando que en cada posición se aumenta de a un punto, empezando en cero. El patrón observado por los estudiantes se muestra en la Ilustración 16:

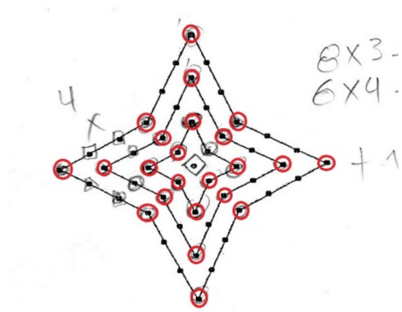


Ilustración 16. Patrón #4 Puntos vértices de la estrella y puntos intermedios a partir de la relación de los números 4 estelares

Durante la fase 2 los estudiantes formularon una conjetura a través del lenguaje natural, la cual es expresada por la pareja de estudiantes de la siguiente manera:

> "La posición que queremos encontrar menos uno, eso nos va a ayudar a encontrar los puntos libres (intermedios), y finalmente para encontrar los puntos en cualquier posición lo hacemos a través del total de puntos, que va a ser igual a los vértices más los lados por los puntos libres y ahí arroja el resultado para cualquier posición. En este sentido lo comprobamos para la posición número tres y nos da el resultado".

Luego, los estudiantes la expresan de la siguiente manera:

> "Para la segunda forma igual, tenemos a "*x*" el número de posiciones que empieza desde *a*, primero debemos encontrar los puntos intermedios acordémonos que este método es el de los puntos donde se marcan los vértices los cuales siempre van a ser ocho. Tenemos que previamente encontrar los puntos intermedios de "*x*", ya que cuando los tenemos, el total de puntos en posición "*x*" es de la siguiente forma:

Número de posición = “x”desde $a = 1$

PL (puntos libres o intermedios) $b = a - 1$

Total de puntos posición "a" $= 8 + 8(puntos\ intermedios$ "b")

. .

PL (puntos libres o intermedios) $y = x - 1$

Total de puntos posición "x" $= 8 + 8(puntos\ intermedios$ "y")

Posteriormente, los estudiantes verifican la conjetura en las dos primeras posiciones de la estrella como se observa en la Ilustración 17, lográndose con esto el razonamiento inductivo #4 producido por un patrón gráfico.

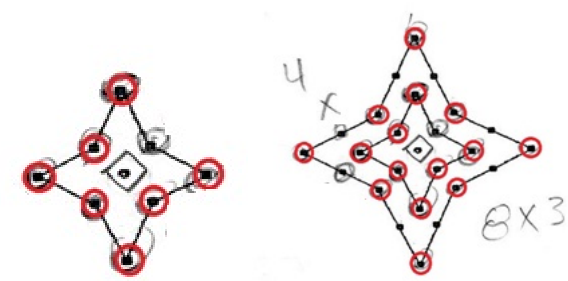


Ilustración 17. Patrón #4 en las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar

Y finalmente, los estudiantes representaron la conjetura por medio del lenguaje algebraico, de la siguiente manera:

Total de puntos de la estrella=

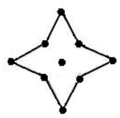
$$1 + [8 + (8 \times 0)] + [8 + (8 \times 1)] + [8 + (8 \times 2)] + \cdots + [8 + 8(x - 1)]$$

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 18. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

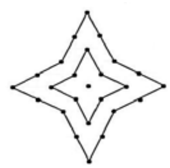
ARGUMENTO (5)

DATOS:

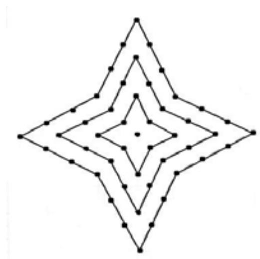
Gráficas de los números 4 – estelares



Posición 1



Posición 2



Posición 3

HIPÓTESIS (CONJETURA):

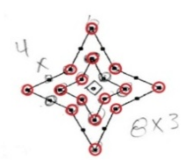
El número 4-estelar en cualquier posición se puede encontrar con la siguiente expresión:

“Total de puntos de la estrella =

$$1+[8+(8\times 0)]+[8+(8\times 1)]+[8+(8\times 2)]+\cdots+[8+8(x-1)]\text{”}$$

GARANTE (PATRONES):

El patrón que se observa en cada una de las estrellas.



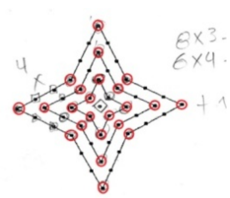


Ilustración 18. Argumento 5 producido por uso de patrón gráfico

4.1.3 Fase 3

Durante la fase 3, los estudiantes lograron tres argumentos, uno producido por "observación", uno generado por una contradicción y otro producido por uso de un patrón gráfico. Para esta fase, se diseñó la entrevista personalizada 1, con el fin de completar los elementos necesarios en el proceso de generalización asociado al último patrón identificado por los estudiantes en la fase 1. En esta fase, los estudiantes debían describir la regularidad observada en las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar, luego calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en la posición 1000 y finalmente encontrar una generalidad que se ajustara al patrón determinado. Los argumentos encontrados en esta fase son:

Argumento 6 producido por "observación"

Este argumento se genera cuando los estudiantes observan ciertas características comunes en los números que representan la cantidad de puntos de las primeras ocho posiciones de un número 4-estelar. Los datos corresponden a la cantidad de puntos de un número 4-estelar en las primeras ocho posiciones, la conclusión son las características comunes observadas por los estudiantes en estos números y el garante son los cálculos realizados por los estudiantes para verificar que cada número cumple con las características mencionadas.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 19. A continuación se muestra el argumento producido por "observación" expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (6)

DATOS:

Posición 1	$(T_1) = 9$
Posición 2	$(T_2) = 25$
Posición 3	$(T_3) = 49$
Posición 4	$(T_4) = 81$
. . .	
Posición 7	$(T_7) = 225$
Posición 8	$(T_8) = 289$

HIPÓTESIS (CONJETURA):

Todos los resultados arrojados tienen las siguientes características:
Los números son impares
Los números son positivos
Los números van creciendo
Los números son cuadrados

GARANTE:
Los cálculos realizados por los estudiantes.

Posición No.	Formula.	Resultado
1	$(3 \times 2) + 3.$	9
2	$(10 \times 2) + 5.$	25.
3	$(21 \times 2) + 7.$	49.
4.	$(36 \times 2) + 9.$	81.
5	$(55 \times 2) + 11$	121.
6.	$(78 \times 2) + 13$	169.
7	$(105 \times 2) + 15.$	225.
8.	$(136 \times 2) + 17.$	289.

Ilustración 19. Argumento 6 producido por "observación"

Argumento 7 generado por una contradicción

Este argumento surge cuando los estudiantes intentan encontrar una generalidad para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición utilizando el patrón presentado en la Ilustración 20:

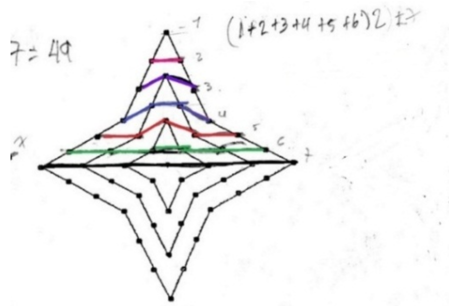


Ilustración 20. Patrón #5 Divide la estrella a la mitad formando trazos generalización a partir de la relación de los números 4 estelares

Usando este patrón, los estudiantes calcularon la cantidad de puntos de las estrellas que ocupan las primeras 8 posiciones, como se muestra en la Ilustración 21:

Posición No.	Formula.	Resultado
1	(3 x 2) + 3.	9
2	(10 x 2) + 5.	25.
3	(21 x 2) + 7.	49.
4.	(36 x 2) + 9.	81.
5	(55 x 2) + 11	121.
6.	(78 x 2) + 13.	169.
7	(105 x 2) + 15.	225.
8.	(136 x 2) + 17.	289.

Ilustración 21. Cantidad de puntos de las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar generalización a partir de la relación de los números 4 estelares

Teniendo en cuenta las características comunes logradas en el argumento producido por “observación” donde los estudiantes describen los números de la siguiente manera:

- ✓ Los números son impares
- ✓ Los números son positivos
- ✓ Los números van creciendo

- ✓ Los números son cuadrados.

Y para calcular la cantidad de puntos que tiene una estrella en la posición 1000, los estudiantes sugieren la siguiente expresión:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \times 2 + (2n+1)$$

Obteniendo como resultadoque la posición T_{1000} tiene 1.003.001 puntos.

Pero, el número1.003.001 no cumple con una de las características mencionas, ya que este número no tiene raíz cuadrada exacta $\sqrt{1.003.001} \cong 1001{,}499$ como fue verificado por los estudiantes.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 22. A continuación se muestra el argumento generado por una contradicción expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (7)		
DATOS: La posición T_{1000} tiene 1.003.001 punos		**HIPÓTESIS (CONJETURA):** Este número no corresponde a la cantidad de puntos del número 4 – estelar que se encuentra en la posición 1000.
	GARANTE: El número de puntos en la posición 1000 debe ser un cuadrado con base en los casos estudiados en las primeras 8 posiciones. $\sqrt{1.003.001} \cong 1001{,}499$	

Ilustración 22. Argumento 7 generado por una contradicción

Al darse cuenta que el resultado no corresponde a la cantidad de puntos de un número 4-estelar, los estudiantes deciden replantear la expresión general obtenida retomando el patrón y la cantidad de puntos que contienen los primeros números 4-estelares.

Este argumento no es posible clasificarlo en ninguna de las categorías de análisis propuestas por que el argumento encontrado corresponde a un caso particular de “contradicción” en el proceso del desarrollo del argumento.

Argumento 8 producido por uso de patrón gráfico

Este argumento fue logrado por los estudiantes a través de las 3 fases y cada una aportó a la construcción del argumento que se logró finalmente. Durante la fase 1, es decir, durante la tarea, los estudiantes decidieron contar los puntos de la figura en la tercera posición dividiendo la estrella a la mitad formando trazos y señalando la línea central como se muestra en la Ilustración 23:

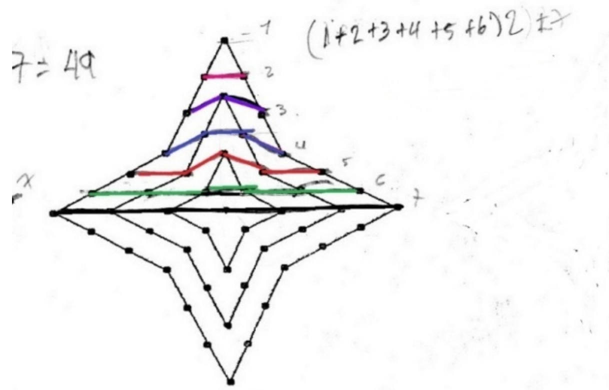


Ilustración 23. Patrón #5 Divide la estrella a la mitad formando trazos generalización a partir de la relación de los números 4 estelares

Durante la fase 2, los estudiantes formularon una conjetura (usando el lenguaje natural) para encontrar cualquier posición de un número 4-estelar a partir del patrón hallado. La expresión general obtenida fue descrita por los estudiantes como se muestra en tabla 2:

En el caso “par” de posiciones	En el caso “impar” de posiciones
Se suma la cantidad de puntos por línea y se multiplica por dos.	Se suma la cantidad de líneas por dos y se suma el número de puntos de la línea central.

Tabla 2. Expresión de la generalidad en lenguaje natural

En esta misma fase, los estudiantes le aplican el patrón a las dos primeras posiciones de un número 4-estelar como se muestra en la Ilustración 24, lográndose con esto el razonamiento inductivo #5 producido por un patrón gráfico.

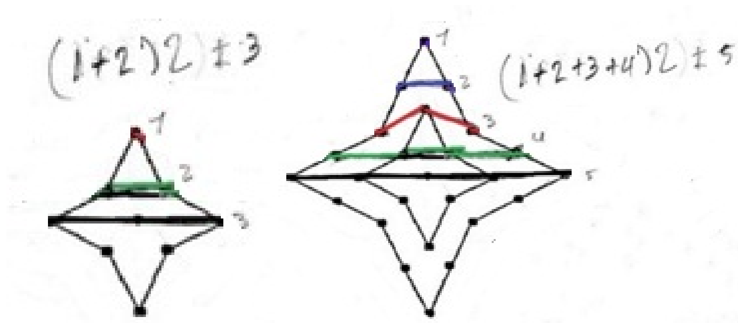


Ilustración 24. Patrón #5 Aplicado a las posiciones 1 y 2 de un número 4-estelar generalización a partir de la relación de los números 4 estelares

En la fase 3, una de las parejas de estudiantes seleccionada de la fase anterior, describe la regularidad observada, con ayuda de estrellas de los números 4-estelares hasta la posición 8, pero inmediatamente observaron que el número hallado no correspondía a un número cuadrado, por lo que fue necesario replantear la expresión y escribirla por medio del lenguaje algebraico, así:

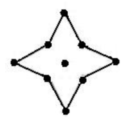
“Total de puntos de la estrella = $\left[\left(\frac{(x\cdot 2)(x\cdot 2+1)}{2}\right) * 2\right] + (x \cdot 2 + 1)$”

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 25. A continuación se muestra el argumento producido por el uso de un patrón gráfico expresado como unidad mínima de argumentación:

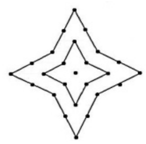
ARGUMENTO (8)

DATOS:

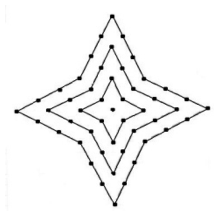
Gráficas de los números 4 – estelares



Posición 1



Posición 2



Posición 3

HIPÓTESIS (CONJETURA):

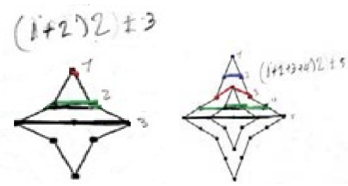
El número 4-estelar en cualquier posición se puede encontrar con la siguiente expresión:

Total de puntos de la estrella=

$$\left[\left(\frac{(x\cdot 2)(x\cdot 2+1)}{2}\right)*2\right]+(x\cdot 2+1)$$

GARANTE (PATRÓN):

El patrón que se observa en cada una de las estrellas.



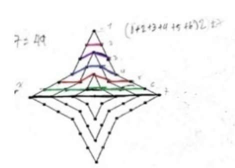


Ilustración 25. Argumento 8 producido por uso de patrón gráfico

4.1.4 Fase 4

Durante la fase 4, los estudiantes lograron siete argumentos, 1 producido por experimentación con ayuda de ejemplos, 5 argumentos producidos por manipulación algebraica y el último producido por generalización algebraica. Para esta fase, se diseñó la entrevista personalizada 2, con el fin de establecer las relaciones existentes entre las diferentes generalidades obtenidas en las fases anteriores. En esta fase, los estudiantes debían calcular la cantidad de puntos de la posición 1500 usando las diferentes generalidades y pasar de una generalidad a otra usando las propiedades básicas de la igualdad. Los argumentos encontrados en esta fase se describen a continuación:

Argumento 9 producido por experimentación con ayuda de ejemplos

Este argumento surge cuando los estudiantes desean verificar la cantidad de puntos que tienen las primeras 1500 posiciones de un número 4-estelar para una de las generalidades obtenidas. Los estudiantes realizan este procedimiento con la ayuda de la herramienta Excel, la cual les facilita los cálculos para todas las generalidades en especial la de la forma 2, permitiéndoles evidenciar que con cualquiera de ellas es posible calcular la cantidad de puntos de cualquier número 4-estelar.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 26. A continuación se muestra el argumento producido por experimentación con ayuda de ejemplos expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (9)

DATOS:

Generalidad utilizada para calcular la cantidad de puntos de la estrella =

$$1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + (8 \times 3) + \ldots + (8 \times x)$$

HIPÓTESIS (CONJETURA):

La expresión general obtenida sirve para calcular la cantidad de puntos de cualquier posición de un número 4-estelar.

GARANTE:

La forma 2 para los estudiantes correspondía a vértices de la estrella y puntos intermedios.

Opereación Forma 2		
Pocisión	Referente	Pocisión * Referente
1	8	8
2	8	16
3	8	24
4	8	32
5	8	40
6	8	48
7	8	56
8	8	64
9	8	72
10	8	80
11	8	88
1490	8	11920
1491	8	11928
1492	8	11936
1493	8	11944
1494	8	11952
1495	8	11960
1496	8	11968
1497	8	11976
1498	8	11984
1499	8	11992
1500	8	12000
		9.006.000

Ilustración 26. Argumento 9 producido por experimentación con ayuda de ejemplos

Argumento 10 producido por manipulación algebraica

En esta fase se les preguntaba a los estudiantes de qué manera podrían garantizar que siempre se obtuviera el mismo resultado al calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar usando cualquiera de las generalidades algebraicas y la forma que ellos la encontraron para verificar este hecho, fueron analizando los patrones gráficos de la tarea propuesta en varias posiciones con diferentes generalidades encontradas y posteriormente comprobar que las generalidades obtenidas están relacionadas entre sí.

A continuación se muestran en forma explícita la relación existente entre cada una de las generalidades encontradas y los razonamientos argumentos deductivos que se logran:

Para la "Forma 1" se muestran los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes con los cuales se determina la relación con la "Forma 5".

$1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + \cdots + (8 \times x)$	Se factoriza el número 8
$1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots . + x) =$	Se expresa la sumatoria de los números naturales en notación de serie.
$1 + 8\left(\sum_{1=1}^{x} i\right) =$	Se escribe el resultado de la sumatoria.
$1 + 8\left[\frac{x(x+1)}{2} =\right]$	Se simplifica la expresión algebraica.
$1 + 4\,[x(x+1)]$	Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
$1 + 4\,[x^2 + x] =$	Nuevamente se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
$1 + 4x^2 + 4x =$	Se organiza la expresión algebraica.
$4x^2 + 4x + 1 =$	Se factoriza la expresión algebraica.
$(2x + 1)^2$	

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 27. A continuación se muestra el argumento producido por manipulación algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (10)		
DATOS: Expresión encontrada por los estudiantes para la "Forma 1" $1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + \cdots + (8 \times x)$	$\Rightarrow$	**HIPÓTESIS (CONJETURA):** La expresión para la "Forma 1" se puede relacionar con la siguiente expresión para la "Forma 5": $(2x+1)^2$
	GARANTE: $1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots . + x) =$ $1 + 8\left(\sum_{1=1}^{x} i\right) =$ $1 + 8\left[\frac{x(x+1)}{2} =\right]$ $1 + 4\,[x(x+1)]$ $1 + 4\,[x^2 + x] =$ $1 + 4x^2 + 4x =$ $4x^2 + 4x + 1 =$	

Ilustración 27. Argumento 10 producido por manipulación algebraica

Argumento 11 producido por manipulación algebraica

Para la "Forma 2" se muestran los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes con los cuales se determina la relación con la "Forma 5".

$1 + [8 + (8 \times 0)] + [8 + (8 \times 1)] + [8 + (8 \times 2)] + \cdots + \left[8 + \left(8 \times (x - 1)\right)\right] =$	Se multiplican los números de los paréntesis.
$1 + [8] + [8 + 8] + [8 + 16] + \cdots + [8 + 8x - 8] =$	Se suman los resultados de los paréntesis.
$1 + [8] + [16] + [24] + \cdots + [8x] =$	Se factoriza el número 8
$1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots . + x) =$	Se expresa la sumatoria de los números naturales en notación de serie.
$1 + 8\left(\sum_{1=1}^{x} i\right) =$	Se escribe el resultado de la sumatoria.
$1 + 8\left[\frac{x(x + 1)}{2} =\right]$	Se simplifica la expresión algebraica.
$1 + 4\,[x(x + 1)]$	Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
$1 + 4\,[x^2 + x] =$	Nuevamente se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
$1 + 4x^2 + 4x =$	Se organiza la expresión algebraica.
$4x^2 + 4x + 1 =$	Se factoriza la expresión algebraica.
$(2x + 1)^2$	

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 28. A continuación se muestra el argumento producido por manipulación algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (11)		
DATOS: Expresión encontrada por los estudiantes para la “Forma 2” $1+[8+(8\times 0)]+[8+(8\times 1)]+[8+(8\times 2)]+\cdots+\left[8+\left(8\times (x-1)\right)\right]=$	$\Rightarrow$	**HIPÓTESIS (CONJETURA):** La expresión para la “Forma 2” se puede relacionar con la siguiente expresión para la “Forma 5”: $(2x+1)^2$
	GARANTE: $1+[8]+[8+8]+[8+16]+\cdots+[8+8x-8]=$ $1+[8]+[16]+[24]+\cdots+[8x]=$ $1+8(\ 1+2+3+4+\cdots.+x)=$ $1+8\left(\sum_{1=1}^{x} i\right)=$ $1+8\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]=$ $1+4\ [x(x+1)]=$ $1+4\ [x^2+x]=$ $1+4x^2+4x=$ $4x^2+4x+1$	

Ilustración 28. Argumento 11 producido por manipulación algebraica

Argumento 12 producido por manipulación algebraica

Para la “Forma 3” se muestran los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes con los cuales se determina la relación con la “Forma 5”.

$(x^2 4) + (x\ 4) + 1 =$ Se organiza la expresión algebraica.

$4x^2 + 4x + 1 =$ Se factoriza la expresión algebraica.

$(2x + 1)^2$

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 29. A continuación se muestra el argumento producido por manipulación algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTO (12)</th></tr>
<tr><td>DATOS:

Expresión encontrada por los estudiantes para la “Forma 3”
$(x^2 4) + (x\ 4) + 1$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>HIPÓTESIS (CONJETURA):

La expresión para la “Forma 3” se puede relacionar con la siguiente expresión para la “Forma 5”:
$(2x + 1)^2$</td></tr>
<tr><td></td><td>GARANTE:
$4x^2 + 4x + 1$</td><td></td></tr>
</table>

Ilustración 29. Argumento 12 producido por manipulación algebraica

Argumento 13 producido por manipulación algebraica

Para la “Forma 4” se muestran los procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes con los cuales se determina la relación con la “Forma 5”.

$\left[\frac{(x\,2)(x\,2+1)}{2}\right]2+(x\,2+1)=$	Se simplifica el 2 y se organiza la expresión algebraica.
$(x2\,)(2x+1)+(2x+1)=$	Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
$(4x^2+2x)+(2x+1)=$	Se suman términos semejantes.
$4x^2+4x+1=$	Se factoriza la expresión algebraica
$(2x+1)^2$	

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 30. A continuación se muestra el argumento producido por manipulación algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTO (13)</th></tr>
<tr><td>DATOS:
Expresión encontrada por los estudiantes para la “Forma 4”
$\left[\frac{(x\,2)(x\,2+1)}{2}\right]2+(x\,2+1)$</td><td></td><td>HIPÓTESIS (CONJETURA):
La expresión para la “Forma 4” se puede relacionar con la siguiente expresión para la “Forma 5”:
$(2x+1)^2$</td></tr>
<tr><td></td><td>GARANTE:
$(x2\,)(2x+1)+(2x+1)=$
$(4x^2+2x)+(2x+1)=$
$4x^2+4x+1$</td><td></td></tr>
</table>

Ilustración 30. Argumento 13 producido por manipulación algebraica

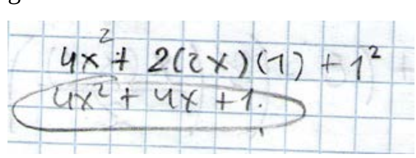
Argumento 14 producido por manipulación algebraica

La “Forma 5”

$(2x+1)^2$

Para este argumento, los datos son las generalidades obtenidas, la conclusión es que se puede calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar con cualquiera de las generalidades obtenidas y el garante corresponde a los procedimientos realizados por los estudiantes para comprobar su conjetura.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 31. A continuación se muestra el argumento producido por manipulación algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (14)		
DATOS: Las generalidades obtenidas: ➢ $(2x+1)^2$ ➢ $(x^2 \times 4) + (x \times 4) + 1$ ➢ $1 + (8 \times 1) + (8 \times 2) + \cdots + (8 \times x)$ ➢ $1 + [8 + (8 \times 0)] + [8 + (8 \times 1)] + [8 + (8 \times 2)] + \cdots + [8 + 8(x-1)]$ ➢ $\left[\left(\frac{(x \cdot 2)(x \cdot 2+1)}{2}\right) * 2\right] + (x \cdot 2 + 1)$	⇨	**HIPÓTESIS (CONJETURA):** Es probable que al momento de usar cualquier generalidad, es posible calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en alguna posición. .
	GARANTE: Las equivalencias entre las generalidades encontradas. 	

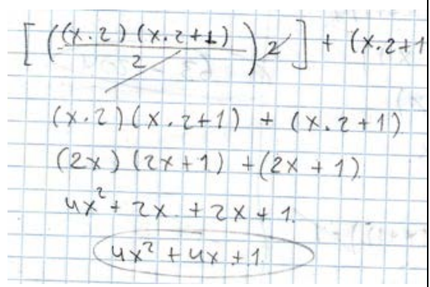


Ilustración 31. Argumento 14 producido por manipulación algebraica

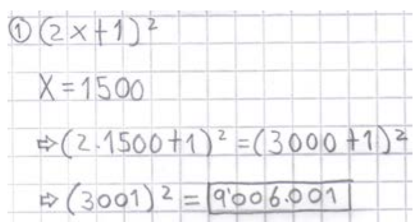
Argumento 15 producido por generalización algebraica

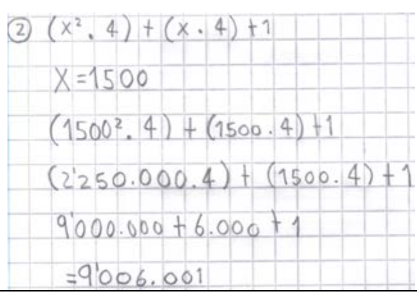
Este argumento se genera cuando los estudiantes intentan calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en la posición 1500 usando algunas de las generalidades obtenidas. En este argumento, los datos son las generalidades obtenidas en las fases anteriores, la conclusión es que sí es posible calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición utilizando cualquiera de las generalidades obtenidas por ello corresponde a la aplicación de una regla general a un caso particular y el garante serían los cálculos realizados por los estudiantes para verificar su conjetura.

Este procedimiento induce un argumento el cual se representa en la ilustración 32. A continuación se muestra el argumento producido por generalización algebraica expresado como unidad mínima de argumentación:

ARGUMENTO (15)

DATOS		HIPÓTESIS (CONJETURA)
DATOS: Las generalidades obtenidas: ➢ $(2x+1)^2$ ➢ $(x^2 \times 4) + (x \times 4) + 1$ ➢ $\left[\left(\frac{(x \cdot 2)(x \cdot 2+1)}{2}\right) * 2\right] + (\ x \cdot 2 + 1)$		**HIPÓTESIS (CONJETURA):** La cantidad de puntos en la posición 1500 es 9006001 .
	GARANTE: Se utilizan las generalidades halladas para calcular el número de puntos en una posición cualquiera a partir de las generalidades obtenidas. Y se aplican para el caso particular de la posición 1500.	





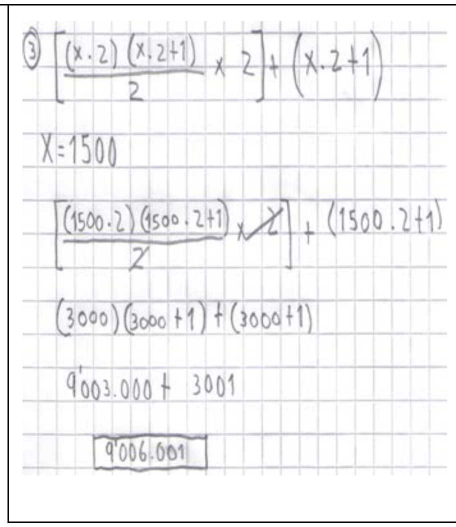


Ilustración 32. Argumento 15 producido por generalización algebraica

4.2 CATEGORÍAS EMERGENTES DE ANALISÍS

Para definir las categorías de análisis de la información es necesario previamente detallar las clases de hipótesis y de garantes que aparecen en los argumentos propuestos por los estudiantes.

4.2.1 La hipótesis

De acuerdo con Toulmin (2003), la hipótesis o conclusión corresponde a una afirmación que se hace con base en unos hechos observados. Para el análisis de los argumentos producidos por los estudiantes, en este trabajo se consideran las hipótesis o conclusiones desde dos tipos de casos: el particular y el general.

a. Caso particular

En esta clase incluimos las producciones de los estudiantes en las que su hipótesis hace referencia a un caso particular. Por ejemplo cuando el alumno responde con una afirmación que se refiere al número de puntos de un número 4-estelar en particular.

b. Caso general

Consideramos en esta clase las producciones de los estudiantes en las que la hipótesis se refiere a un caso general. La hipótesis ha de ser en este caso una generalización algebraica desde el punto de vista de Radford (2010). En este trabajo en particular la generalización algebraica puede ser expresada de dos maneras: con una expresión alfanumérica (que puede incluir letras y números) o con una expresión verbal siempre y cuando exprese la generalidad.

4.2.2 El garante

De acuerdo con Tolumin (2003), el garante corresponde a las proposiciones que permiten el paso de los datos a la hipótesis. Para el análisis de los argumentos producidos por los estudiantes en este trabajo, se consideran los siguientes garantes: el uso de patrón gráfico, el producido por una generalización algebraica, el producido por experimentación con ayuda de ejemplos, el producido por "observación" y el producido por manipulación algebraica.

a. **Uso de patrón gráfico**

En este trabajo se entiende por patrón, aquello que es común y se repite en diferentes casos y que puede volver a repetirse sin necesidad de llegar a convertirse en una generalización, es decir sin que se tenga la plena certeza de que los hechos o situaciones comunes puedan volver a repetirse para todos los casos.

En esta clase incluimos los argumentos en los que los garantes están conformados por el uso de un patrón gráfico descrito por los estudiantes en las posiciones 1 y 2 que permiten el paso de los datos a la hipótesis. Además, la conclusión es la confirmación que el patrón gráfico también se ajusta a la tercera posición de un número 4-estelar, en este tipo de argumentos se hace referencia a un caso general.

b. Producido por una generalización algebraica

Se consideran en esta clase los garantes que manifiestan una generalidad: una expresión alfanumérica (que puede incluir letras y números) o una expresión verbal. Los garantes de este tipo se utilizan para pasar de las gráficas de las tres primeras posiciones de un número 4-estelar a una generalidad que sirve para calcular la cantidad de puntos de cualquier número 4-estelar en una posición determinada.

c. **Producido por experimentación con ayuda de ejemplos**

Se consideran en esta clase, las producciones de los estudiantes en las que el garante corresponde a todas las pruebas y cálculos que fueron utilizados por ellos para verificar que una hipótesis obtenida es probablemente válida donde se hace referencia a un caso general mediante ejemplos con casos particulares.

d. **Producido por "observación"**

Se consideran en esta clase, las producciones que los estudiantes hacen cuando observan ciertas características sobre los datos e intentan formular una hipótesis que se valida con el garante al realizar los cálculos aritméticos, cuya solidez de este se encuentra en los cálculos realizados por los estudiantes. Este argumento surge de otra información diferente a las gráficas de las primeras posiciones de un número 4-estelar en este tipo de argumentos se hace referencia a un caso particular.

e. Producido por manipulación algebraica

Se consideran en esta clase, las producciones de los estudiantes en las que el garante corresponde a todos los procedimientos matemáticos realizados para verificar que cualquiera de las generalidades están relacionadas con la hipótesis propuesta, en este argumento se hace referencia a un caso general.

4.3 CLASIFICACIÓN DE LOS ARGUMENTOS

De acuerdo con las clasificaciones establecidas anteriormente para las diferentes formas de representar los argumentos, se presentan cinco categorías de análisis.

a. **Modelo de argumento I**

En esta clasificación se encuentran los argumentos donde los datos corresponden a las gráficas de los números 4-estelares en sus posiciones uno, dos y tres, la hipótesis hace referencia a un caso general y su garante al uso de un patrón gráfico, el cual se representa en la ilustración 33:

DATOS Gráficas de los números 4-estelares en sus posiciones uno, dos y tres.		**HIPÓTESIS** Hace referencia a un caso general.
	GARANTE Uso de un patrón gráfico	

Ilustración 33. Modelo de argumento I expresado como unidad mínima de argumentación

Los argumentos que se ajustan a esta clasificación son los llamados argumento 1, argumento 2, argumento 3, argumento 4, argumento 5 y argumento 8

b. Modelo de argumento II

En esta clasificación se encuentran los argumentos donde los datos corresponden a una generalidad, la hipótesis hace referencia a un caso particular y su garante a una generalización algebraica, el cual se representa en la ilustración 34:

DATOS Generalidades		**HIPÓTESIS** Hace referencia a un caso particular.
	GARANTE Generalización algebraica.	

Ilustración 34. Modelo de argumento II expresado como unidad mínima de argumentación

El argumento que se ajusta a esta clasificación es el llamado argumento 15.

c. Modelo de argumento III

En esta clasificación se encuentran los argumentos donde los datos corresponden a una generalidad, la hipótesis hace referencia a un caso general y su garante a una experimentación con ayuda de ejemplos, el cual se representa en la ilustración 35:

DATOS Generalidades	⇨	**HIPÓTESIS** Hace referencia a un caso general.
	GARANTE Experimentación con ayuda de ejemplos	

Ilustración 35. Modelo de argumento III expresado como unidad mínima de argumentación

El argumento que se ajusta a esta clasificación es el llamado argumento 9.

d. Modelo de argumento IV

En esta clasificación se encuentran los argumentos donde los datos corresponden a el número de puntos de las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar, la hipótesis hace referencia a un caso particular y su garante a los cálculos realizados por los estudiantes, el cual se representa en la ilustración 36:

DATOS El número de puntos de las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar		**HIPÓTESIS** Hace referencia a un caso particular.
	GARANTE Cálculos realizados por los estudiantes	

Ilustración 36. Modelo de argumento IV expresado como unidad mínima de argumentación

El argumento que se ajusta a esta clasificación es el llamado argumento 6.

e. Modelo de argumento V

En esta clasificación se encuentran los argumentos donde los datos corresponden a una generalidad ó generalidades, la hipótesis hace referencia a un caso general y su garante corresponde a una manipulación algebraica realizada por los estudiantes, el cual se representa en la ilustración 37:

DATOS Generalidad ó generalidades		**HIPÓTESIS** Hace referencia a un caso general.
	GARANTE Manipulación algebraica	

Ilustración 37. Modelo de argumento V expresado como unidad mínima de argumentación

Los argumentos que se ajustan a esta clasificación son los llamados argumento 10, argumento 11, argumento 12, argumento 13 y argumento 14.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan tres tipos de conclusiones: las generadas a partir de los objetivos específicos, las producidas por los argumentos y algunas conclusiones generales.

5.1 CONCLUSIONES A PARTIR DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

Para responder a la pregunta de investigación, en este trabajo se plantearon cuatro objetivos específicos.

Con relación al primer objetivo propuesto, fue posible describir todo el proceso realizado por los estudiantes hasta que encontraron la generalidad para cada uno de los patrones hallados por ellos. Sin embargo, el proceso para llegar a cada argumento es diferente, porque los argumentos fueron logrados por los estudiantes durante las cuatro fases en que se aplicaron los instrumentos de recolección de la información.

Por ejemplo, el primer argumento producido por el uso de un patrón gráfico fue logrado durante la aplicación del primer instrumento, es decir, que los estudiantes llegaron a la generalidad solamente con la observación de las primeras posiciones de un número 4-estelar y la identificación del patrón; mientras que la mayoría de los argumentos producidos por manipulación algebraica se lograron durante la aplicación del cuarto instrumento, es decir, que estos argumentos son más elaborados porque necesitaron más gráficas de las posiciones 1 hasta la 8 de un número 4-estelar y las diferentes generalidades obtenidas para cada uno de los patrones identificados.

Con respecto al segundo objetivo propuesto, se identificaron 15 argumentos logrados por los estudiantes durante las cuatro fases de aplicación de los diferentes instrumentos de recolección de la información. En la fase 1, se obtuvieron **2** argumentos y los dos fueron producidos por el uso de un patrón gráfico. En la fase 2, se obtuvieron **3** argumentos y los tres fueron producidos por el uso de un patrón gráfico. En la fase 3, se obtuvieron **3** argumentos; uno producido por observación, otro generado por una contradicción y otro producido por el uso de un patrón gráfico. Y en la fase 4, se obtuvieron **7** argumentos, uno producido por una experimentación con ayuda de ejemplos, cinco producidos por manipulación algebraica y otro producido por generalización algebraica.

Con respecto al tercer objetivo propuesto, del análisis se generaron 6 categorías para organizar la información recolectada. Las categorías emergentes a partir de los argumentos logrados son:

- Argumentos producidos por el uso de un patrón gráfico
- Argumentos producidos por observación
- Argumentos producidos por una contradicción
- Argumentos producidos por la experimentación con ayuda de ejemplos
- Argumentos producidos por manipulación algebraica
- Argumentos producidos por una generalización algebraica

En total se encontraron 15 argumentos, de los cuales 6 son producidos por el uso de un patrón gráfico y 5 son producidos por manipulación algebraica.

De los 6 argumentos producidos por el uso de un patrón gráfico, 5 de ellos se generaron con las gráficas de las tres primeras posiciones de un número 4-estelar, mientras que el otro argumento necesitó las primeras ocho posiciones de un número 4-estelar.

El argumento producido por una experimentación con ayuda de ejemplos, resultó cuando los estudiantes calcularon bastantes posiciones de un número 4-estelar con la herramienta Excel.

Los 5 argumentos producidos por el uso de un patrón fueron clasificados de acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes como: *figuras geométricas*, *puntos* y *líneas*.

En el patrón de *figuras geométricas* se observa una descomposición de la figura en figuras más pequeñas como triángulos, rombos y estrellas; en el patrón de *puntos* se evidencia una descomposición de la figura en dos tipos de puntos, los puntos vértices y los puntos intermedios; y en el patrón de *líneas* se hace uso de líneas rectas principalmente para organizar los puntos de la estrella.

En relación con la clasificación de los patrones como *figuras geométricas*, se obtuvieron dos formas generales diferentes. En la descomposición de la estrella por triángulos, los estudiantes encontraron una expresión algebraica cuadrática y, en la descomposición de la figura por estrellas, la expresión es representada en forma de recurrencia mediante a una serie.

En la clasificación de los patrones por medio de *líneas,* se obtuvieron dos generalidades diferentes. En la descomposición de la estrella por grupos de 7 puntos, los estudiantes obtuvieron la expresión general más simplificada $(2x+1)^2$ para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar y, en la descomposición de la figura por trazos, donde se divide la estrella a la mitad, los estudiantes obtuvieron la expresión $\left[\left(\frac{(x\cdot 2)(x\cdot 2+1)}{2}\right)*2\right]+(x\cdot 2+1)$que es más elaborada que la anterior.

Y con relación al cuarto objetivo propuesto, para clasificar los argumentos, se tuvieron en cuenta dos elementos: el garante y la hipótesis (conclusión). A partir del garante se consideraron: el uso de un patrón gráfico, el producido por una generalización algebraica, el producido por producido por experimentación con ayuda de ejemplos, el producido por “observación” y el producido por manipulación algebraica. Y con respecto a la hipótesis o conclusión se tuvieron en cuenta dos subcategorías desde dos tipos de casos: el particular y el general. Estas categorías y subcategorías permiten clasificar los argumentos y ubicar los datos, los garantes y las hipótesis o conclusiones obtenidas para interpretar la información.

El desarrollo de los objetivos específicos y en especial el objetivo relacionado con las categorías de análisis nos permitieron organizar toda la información obtenida para lograr el objetivo general.

5.2 CONCLUSIONES A PARTIR DE LOS ARGUMENTOS

Durante el proceso de generalización se lograron identificar cinco tipos de argumentos producidos por los estudiantes los cuales fueron clasificados a partir del garante y la hipótesis. Los argumentos fueron ordenados a partir de los producidos por el uso de un patrón gráfico, el producido por generalización algebraica, producido por experimentación con ayuda de ejemplos, el producido por observación y los producidos por manipulación algebraica.

5.2.1 Argumentos producidos por el uso de un patrón gráfico

En estos argumentos, se observan los mismos datos y las conclusiones son equivalentes, lo que varía es el garante. Este garante corresponde a los diferentes patrones identificados por los estudiantes. En relación con este tipo de argumentos, el patrón está basado en líneas horizontales o verticales trazadas sobre los puntos centrales, diagonales o laterales de la estrella, los estudiantes elaboran la conclusión usando la forma más simple de expresar un número impar al cuadrado, es decir $(2x+1)^2$.

Cuando el patrón identificado está basado en líneas que se trazan sobre puntos con diferente ubicación o figuras geométricas, la conclusión que construyen los estudiantes es más elaborada aunque equivalente a la anterior.

5.2.2 Argumentos producidos por generalización algebraica

En estos argumentos, se observa que los datos corresponden a las generalidades, la conclusión se refiere a un caso particular y el garante corresponde a calcular el número de puntos en una posición cualquiera a partir de las generalidades obtenidas. El argumento de este tipo es generado por la aplicación de un caso a una generalización algebraica, se produce cuando los estudiantes desean calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en la posición 1500 y aplican la generalidad para verificar el caso particular. Cuando se producen este tipo de argumentos se verifica la relación existente entre las generalidades encontradas a partir de la verificación de un caso particular.

5.2.3 Argumentos producidos por experimentación con ayuda de ejemplos

En estos argumentos, se observa que los datos corresponden a la generalidad, la conclusión se refiere a un caso general y el garante a la experimentación realizada con ayuda de ejemplos. Este argumento surge cuando los estudiantes desean verificar su conjetura (expresión general para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar) a través de la experimentación en muchas posiciones diferentes a las dadas inicialmente. Este argumento se logró por una prueba realizada con la herramienta Excel en las primeras 1500 posiciones de un número 4-estelar para verificar su hipótesis. Este argumento se produce cuando no se encuentra una relación algebraica directa con las otras generalidades, por lo tanto es necesaria la experimentación con bastantes ejemplos para determinar su posible relación.

5.2.4 Argumentos producidos por "observación"

En estos argumentos, se observa que los datos corresponden al número de puntos de las primeras 8 posiciones de un número 4-estelar, la conclusión se refiere a un caso particular y el garante corresponde a los cálculos realizados por los estudiantes. Este tipo de argumento resulta cuando los estudiantes observan características comunes en los datos presentados e intentan formular una hipótesis cuyo garante encuentra solidez en los cálculos realizados. Este argumento se produce cuando no se encuentra la generalidad con el cálculo aritmético en las primeras posiciones de un número 4-estelar y es necesario realizar el cálculo en posiciones subsiguientes.

5.2.5 Argumentos producidos por manipulación algebraica

En estos argumentos, se observan los mismos datos y las conclusiones son equivalentes, lo que varía es el garante. Este garante corresponde a los diferentes procedimientos matemáticos realizados por los estudiantes para verificar que cualquiera de las generalidades están relacionadas con la hipótesis propuesta. Este tipo de argumentos se lograron por manipulación algebraica cuando los estudiantes realizan el paso de una generalidad a otra para evidenciar las equivalencias entre las generalidades obtenidas. Cuando realizan los procedimientos matemáticos los estudiantes verificaron la relación existente entre todas las generalidades encontradas en el proceso de generalización.

CONCLUSIONES GENERALES

Los instrumentos aplicados permitieron desarrollar actividad argumentativa en la clase y mejorar los canales de comunicación usados por los estudiantes de forma oral y escrita.

Las tareas que involucran procesos de generalización permiten desarrollar la actividad argumentativa de los estudiantes en la clase de matemáticas, porque contienen preguntas abiertas y evidencian la necesidad de justificar los procedimientos y las relaciones observadas.

El papel del docente es fundamental en el proceso de la generalización, ya que debe orientar a los estudiantes en este proceso y generar las preguntas que les permitan mejorar los registros de representación y expresar la generalidad.

Es necesario que el docente evidencie la necesidad de llegar a la generalidad porque a los estudiantes no les surge de forma natural llegar a ella. Otro aspecto importante, en relación con la generalización, es que cuando los estudiantes obtenían una generalidad para calcular la cantidad de puntos de un número 4-estelar en cualquier posición, no les surgía la necesidad de verificarla.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abad, M. (1997) *Investigación evaluativa en documentación.* España: Publicaciones Universidad de Valencia.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Barrena, S. (2001). *Razonamiento.* Recuperado el día 30 de abril de 2011 del sitio: http://www.unav.es/gep/cv-barrena.html

Boero, P. (2000). Approaching Mathematical Theories in Junior High School. Retrieved from Proceedings of Ninth International Congress on Mathematical Education ICME-9 website: http//academic.sun.ac.za/mathed/ICME/Boero.htm

Calderón, D., & León, O. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Relime, 4*(1), 5-21.

Cañadas, M. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica. *Enseñanza de las ciencias, 26*(3), 431-434.

Cañadas, M. C., Castro, E., & Barrera, V. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria al resolver un problema.* Trabajo de investigación tutelada, Universidad de Granada, España

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, 2*(3), 283-294.

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME,152(3*), 561-573.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias, 26*(3), 431-434.

Crespo, C., & Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Relime, 8*(3), 287-317.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria.* Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

Díaz, M. (2011).Cursillo: comunicación y Pensamiento Visual en la clase de Matemáticas. *Primer encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática XXII Jornada de Matemáticas y Estadística.* Tunja UPTC

Durango, J., Parra, M., Toro, J., & Zapata, M. (2010). Contexto de descubrimiento y justificación de la clase de matemáticas. *Redalyc*(29), 1-16.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica

Herrero, A. (1998). *La iconicidad anargramática.* Recuperado el día 26 de julio de 2011 del sitio: http://bib.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/12593207572363734198846/p0000003.htm#14

Kieran, C., & Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(3), 229-240.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el álgebra* (Cecilia Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Mora, L. & Soler, M. (2010, octubre). *Estudiar álgebra desde la generalización: ejemplos para la formación de profesores*. Ponencia presentada en el 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa "Aprendizaje y Evaluación en Matemáticas", Bogotá, Colombia.

Morera, L., & Planas, N. (2010). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Barcelona.

Peirce, C. S. (1901). *Reasoning*. Recuperado el día 20 de marzo de 2011 del sitio: http://www.unav.es/gep/Reasoning.html.

Plantin, C. (2001). *La argumentación*. Barcelona: Ariel, 2a. Edición.

Polya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *Mathematics Education*, 1-14.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activies.*PNA*,4(2), 37-62.

Santaella, L. (1998). *La evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción*. Recuperado el día 20 de marzo de 2011 del sitio: http://unav.es/gep/Santaella.html

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Toulmin, S., Rieke, R. y Janik, A. (1979). *An introduction to reasoning*. New York: Macmillan.

Toulmin, S. (2003). *The uses of Argument*. New York: Cambridge University Press

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379-402..

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Clasificación de los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares.** Presentado por los estudiantes:

Lucero Antolínez Quijano – 2011185038
Miller Palacio Núñez- 2011185057

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **40** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 02 días del mes de septiembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *MARIA NUBIA SOLER*

Jurados:

Profesor(a) *LYDA CONSTANZA MORA*

Profesor (a) *JAIME FONSECA*