DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LA ARMONÍA CLÁSICA

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Física

ISMAEL FERNANDO RODRÍGUEZ BALLESTEROS

Director
JUAN CARLÓS CASTILLO AYALA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO FÍSICA
LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: La enseñanza de la Física y la relación física-matemáticas
Bogotá-Colombia
2013

DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LA ARMONÍA CLÁSICA

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Física

ISMAEL FERNANDO RODRÍGUEZ BALLESTEROS

Director
JUAN CARLÓS CASTILLO AYALA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO FÍSICA
LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: La enseñanza de la Física y la relación física-matemáticas
Bogotá-Colombia
2013

Resumen Analítico

Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LA ARMONÍA L CLÁSICA
Autor(es)	Rodríguez Ballesteros, Ismael Fernando
Director	Castillo Ayala, Juan Carlos
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 77p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional De Colombia
Palabras Claves	Armónicos y modos normales de vibración, teoría musical, ondas sonoras, proporciones entre cuerdas, escalas musicales

1. Descripción

En la presente monografía se desarrolla una descripción, de forma analítica, de la relación existente entre los conceptos de la física y su relación con la teoría musical, para dar un aporte la enseñanza de la física en relación a otras áreas de conocimiento, en nuestro caso, la música, como estrategia integradora de saberes. Este trabajo se basa en la física de ondas y los conceptos relacionados con ondas estacionarias y os modos normales de vibración en cuerdas; además también se basa en el análisis de Fourier ara la descripción del timbre. Por otro lado, es importante mencionar que también el trabajo se fundamenta en la teoría musical y los principios de la armonía.

2. Fuentes

Adriana Rabino, P. C. (2006). OTRA COSA ES CON GUITARRA......AFINADA.

Ballesteros, I. R. (2013). Descripcion Fisca De la Armonia Musical, una propuesta para la enseñanza de las ondas sonoras. *Universidad Pedagogica Nacional*.

Bravo, S., & Pesa, M. y. (2009). REPRESENTACIONES DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS SOBRE PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS. *Investigación didáctica*.

French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas.* Barcelona: REVERTÉ.

Fuente, J. L. (s.f.). leyes fisicas de la acustica musical.

Helmholtz, H. (1954). *On the sensations of tone.* New York: Dover Publications .

Jessica Londoño, Ismael Rodriguez. (2013). LA ESTRATEGIA DE PENSAMIENTO DE LO SIMPLE PARA EXPLICAR LO COMPLEJO EN FI´SICA, A TRAVE´ S DE LAS NOCIONES DE MODOS NORMALES Y ESTADOS BASE. *Universidad Pedagogica Nacional*.

lex, T. C. (2002). *Who is Fourier* . Boston: Language Research foundation.

María Mercedes Ayala, F. M. (s.f.). *EL TENSOR DE ESFUERZOA: Un analisis epistemologico desde una perspectiva pedagogica.* Universidad Pedagogica Nacional.

Pacca, G. U.-J. (s.f.). ANALOGICAL REASONING AND MEANINGFUL LEARNING. A DISCUSSION ABOUT THE USE OF ANALOGIES IN TEACHING THE.

Sierpes, S. D. (s.f.). Relacion entre la fuerza de tension y afinacion, aplicada a una cuerda de guitarra.

Stolik, D. (2005). EL APORTE DE LOS FÍSICOS AL DESARROLLO DE LA MÚSICA. *REVISTA CUBANA DE FÍSICA.*

3. Contenidos

Este trabajo de grado consta de cuatro capítulos organizados de la siguiente manera:

- Introducción
- Capítulo 1: DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DEL SONIDO.
  En este capítulo realizamos una breve descripción de las bases teóricas de la mecánica ondulatoria del sonido; hablamos a cerca del significado de las ondas, las ondas sonoras y las cualidades del sonido: timbre, tono e intensidad.

- Capítulo 2: ORGANIZACIÓN DE LA ARMONÍA.
  En esta sección realizamos una introducción a los principios de la teoría musical en relación a la melodía y la armonía. Realizamos una breve explicación a cerca de las escalas, los intervalos y los acordes musicales.

- Capítulo 3: DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LA ARMONÍA MUSICAL.
  En este capítulo realizamos una descripción de la relación entre la física y la música a través de los modos normales de vibración de las cuerdas; describimos la evolución de la escala pitagórica y la escala de Zarlino a través de las proporciones de las frecuencias de vibración de las cuerdas; además explicamos la demostración matemática de la escala cromática temperada.

- Conclusiones del trabajo

4. Metodología

El presente trabajo se hizo a través de un análisis descriptivo de la relación física y música, desde la investigación de los diferentes documentos en relación a este tema. Dicha relación se abordó desde 3 aspectos: el primero tiene que ver en el estudio histórico del desarrollo de la música, y como a través del tiempo la física realizo aportes importantes a este desarrollo; el segundo aspecto es la aproximación de los conceptos de las ondas sonoras al estudio descriptivo de la música, como fenómeno ondulatorio; por último, se analizó la armonía musical desde los conceptos de la física ondulatoria.

5. Conclusiones

La intención de este documento es mostrar que es posible Integrar varias áreas del conocimiento, en este caso la física y la música, para evidenciar, que si bien todas ellas trabajan de forma independiente entre sí, el conocimiento no es fragmentado y es posible establecer relaciones entre ellas que posibiliten su comprensión.

La anterior conclusión nos lleva a pensar en la posibilidad de establecer estrategias que posibiliten la enseñanza de las ondas sonoras, tanto en la escuela como en cursos introductorias de física en la universidad, en donde se establezca relaciones entre la física y la música, ya que esta última hace parte esencial de los seres humanos en los diferentes contextos culturales.

La armonía musical, componente fundamental de toda la teoría musical, sienta sus bases en las relaciones aritméticas entre frecuencias y longitudes de una cuerda tensa; dichas relaciones son fracciones enteras, y de ellas nacen los intervalos musicales y las escalas musicales. Dicho trabajo propuesto por primera vez por Pitágoras[1].

La forma como el oído humano percibe las elaciones entre 2 o más sonidos es a través de las proporciones y no como una suma de sonidos; esto se evidencia en el hecho en que la relación entre dos sonidos de una escala, para el oído, son iguales si estos sonidos se les duplica su frecuencia, es decir, se interpretan dichos sonidos pero con una octava arriba.

La escala temperada, es una escala evolución de la escala de Zarlino y la escala Pitagórica. Esta evolución es consecuencia de los problemas de afinación de los instrumentos en la época del renacimiento. La escala temperada resuelves estos problemas de afinación a través de la concepción de los semitonos iguales. El valor del semitono en la escala temperada es $1{,}0594631$. La ecuación con la cual podemos calcular la frecuencia asociada a cualquier nota musical es:

$$f_{nota} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n}\ donde \quad -36 \leq\ n \leq 86$$

[1] Juan miguel Campanario: *Fundamentos físicos de la música*

Este trabajo puede servir como guía para posteriores trabajos que estén encaminados a la enseñanza de la física en relación a la música, o trabajos encaminados a relacionar estas dos áreas del conocimiento.

Elaborado por:	Ismael Fernando Rodríguez Ballesteros
Revisado por:	Castillo Ayala, Juan Carlos

Fecha de elaboración del Resumen:	12	11	2013

Agradezco

A mis padres Amparo Ballesteros Jaramillo e Ismael Rodríguez Murcia, por su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera.

Al Profesor Juan Carlos Castillo, mi asesor, por su infinita colaboración en la elaboración de este trabajo.

A mi hermana, Mónica Rodríguez, por el aporte de sus conocimientos y su apoyo constante.

A la profesora María Mercedes Ayala por el gran aporte de sus conocimientos.

Al profesor Juan Carlos Bustos por la ayuda en la elaboración de este documento.

A Jessica Londoño por sus aportes conceptuales y su constante apoyo en momentos difíciles.

A Edwin Mayorga López, por su gran apoyo y amistad.

A Darío Poveda Matallana, por su gran amistad.

A Yeimi García, por su gran amistad.

A todos mis amigos y a todos los profesores del departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

A todos Mil gracias

El maestro que intenta enseñar sin inspirar en el alumno el deseo de aprender está tratando de forjar un hierro frío.

Horace Mann (1796-1859)

Tabla de contenido

Introducción

El presente trabajo, denominado "**Descripción física de la armonía musical: una propuesta para la enseñanza de las ondas sonoras**", nace, en principio, del deseo de explorar, conocer y describir ese maravilloso campo del saber cómo lo es la música a través de la física. Dicho deseo se fundamenta en los saberes que tiene el autor en relación a los conceptos de la música y el vago conocimiento infundido por diferentes medios a cerca de las relaciones existentes entre estos dos saberes.

En un segundo momento, se hace evidente una preocupación acerca de la forma como se enseñan los contenidos en las distintas instituciones de educación, el cual está dado por la especialización disciplinar; este aspecto se ve reflejado en la organización de la maya curricular, la cual está dada desde áreas específicas de conocimiento; tal organización de los contenidos, promueve una visón fragmentada del conocimiento que no permite establecer articulaciones y relaciones entre distintas disciplinas.

En contraste con la fragmentación disciplinar que se suele presentar en la educación, se encuentra que la manera en que se ha constituido el conocimiento no se ha hecho desde la especialización disciplinar, sino desde una visión más holística. Por ejemplo, el aporte de los griegos a la cosmología los llevo a utilizar la trigonometría. Galileo implementó sus conocimientos sobre el compás musical para medir los tiempos que tarda una esfera en descender por un plano inclinado (Miller Hernandez y Sergio Diago, 2011); Leonardo Da Vinci utilizó sus conocimientos de las matemáticas y la geometría para realizar sus obras de arte, estudiar los fenómenos de la naturaleza, construir artefactos útiles para la humanidad en su momento, etc. En general, los griegos y los pensadores que surgieron desde el renacimiento hasta principios del siglo XX, eran diestros en diferentes áreas del conocimiento como la política, el arte, la ciencia, las matemáticas y la filosofía.

Es altamente conocido el papel que ha jugado la física en la comprensión del universo, los fenómenos naturales y el desarrollo de la tecnología. Sin embargo su influencia en el desarrollo de la cultura y el arte, incluyendo la música es menos conocida debido a la especialización disciplinar de los contenidos. Aun así, el desarrollo de la música se ha logrado gracias al interés que han tenido los físicos más reconocidos por explicar dicho fenómeno.

La humanidad, casi desde sus orígenes, ha estado altamente cautivada por la música debido al poder que tiene sobre nosotros. Para Darwin, la música es un don, ya que ni el gozo que produce, ni la capacidad de producir notas musicales son útiles al ser humano (Council, 2008). De esta manera, todos los seres humanos somos seres musicales, a todos nos gusta la música. Hoy en día, los jóvenes viven la música en todo momento, hablan de musca, piensan en música y su mundo está altamente influenciado por la música. Por tal motivo, a los estudiantes les sería altamente significativo que los conceptos físicos de las ondas se logren enseñar a partir de la música (Reinaldo, Welti, 2002).

Por todo lo anterior, este trabajo tiene la intención de hacer explicita la relación física-matemáticas y música, para mostrar como las disciplinas están relacionadas. De esta manera, se pueden dar elementos que aporten a la enseñanza de las ciencias, se facilite la comprensión de los conceptos físicos involucrados en la música y se genere motivación a los estudiantes por el estudio de las ciencias.

En la primera parte de este documento nos enfocamos a mostrar los aspectos más importantes de la física ondulatoria del sonido. En la segunda parte, nos encargamos de contextualizar al lector en los principios de la teoría musical en relación a la armonía y la melodía. Por último, nos dedicamos a describir como los principios de la teoría musical se construyen a partir de las relaciones entre frecuencias de los modos de vibración de un sistema unidimensional como lo es la cuerda tensa.

Capítulo 1: DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DEL SONIDO

1.1 Introducción:

El estudio de la mecánica se puede dividir en dos grandes ramas: la cinemática y la dinámica. Dos vertientes encaminadas a explicar el movimiento de los cuerpos y la interacción de esta con el medio circundante. La descripción dinámica de la materia se puede dividir en 2 esquemas: el estudio de la dinámica de los cuerpos en el espacio y el esquema de la dinámica de los medios continuos. En este último se encuentra el estudio de los fluidos, teoría de campos y las ondas.

El presente trabajo está fundamentado en la descripción del segundo esquema, en los medios continuos encaminado al estudio de las ondas. Para ser un poco más específicos, tendremos como base el estudio de la física de las ondas sonoras. Sin embargo es conveniente hablar sobre el significado de las ondas, su clasificación y sus características, de una forma breve y clara. Después hablaremos todo lo referente de la física de ondas sonoras.

1.2 ¿Qué son las ondas?

En el estudio de los fenómenos ondulatorios, a la hora de abordar las diferentes fuentes bibliográficas, nos damos cuenta de que existen dos perspectivas o visiones en la que se describen todos los fenómenos de este tipo: desde una visión de lo discreto en donde se considera que el cuerpo por dando se transporta la onda es un conjunto de partículas, o se considera a dicho cuerpo como un continuo, un solo cuerpo.

Desde el punto de vista de algunos autores (French A. , 1974) la descripción de las ondas es un e fenómeno en donde todas las partículas de un medio se mueven alrededor de un punto de equilibrio y hay una transferencia de energía entre las partículas del medio, de tal forma que todo el sistema se encuentra en constante vibración; esta visión muestra al medio como un conjunto de partículas, en donde la cantidad de estas es tan grande que casi no se puede distinguir en donde comienza una y termina la otra; esta definición puede generar confusiones sobre ello ya que muestra una visión discontinua de algo es continuo, el medio; sin embargo, como dijimos antes, estos autores hacen la aclaración de que una medio se considera continuo cuando el número de partículas tiende a infinito (**VER ANEXO 1**), pero se sigue persistiendo en la dicha idea

Otros autores son un poco más cuidadosos en afirmar que el medio no se puede considerar como un conjunto de partículas sino como un continuo, y que la transferencia de energía y de cambios se da entre las vecindades de las porciones del mismo cuerpo (podríamos considerar un $\boldsymbol{dm}$ y dividir el cuerpo en muchos $\boldsymbol{dm}$ y seguiríamos hablando de un solo cuerpo) como en el caso de una porción de cuerda en donde el cambio de estado de tensión que se genera entre las vecindades genera una perturbación en ella, pero seguimos hablando de la misma cuerda[2] **(figura 1)** .

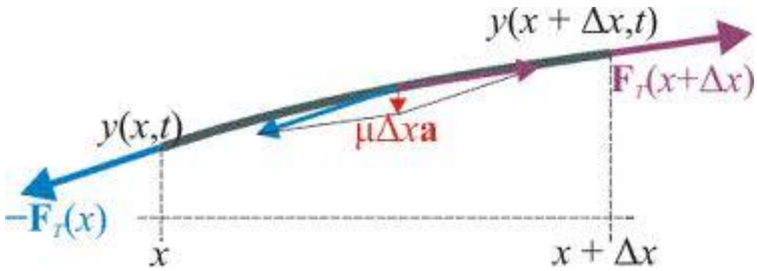


Figura 1: porción de una cuerda tensionada. Tomada de http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ecuaci%C3%B3n_para_las_ondas_en_una_cuerda_tensa

El lector puede quedarse con alguna de las dos, ya que en ambos casos se llega satisfactoriamente a la descripción de una onda, aunque en algún caso se puede generar confusión. En cualquier caso hay una transferencia de energía en todas las zonas del medio, y estas muestran periodicidad en el tiempo y en el espacio. Cualquiera que sea la definición, las ondas tienen características bien particulares Para nuestros fines, estaremos parados desde una perspectiva de lo continuo para describir los fenómenos ondulatorios.

Figura 2: ondas en el agua. Tomada de http://ondasfisica.galeon.com/

[2] Para una definición más amplia de las tenciones y deformaciones de medios continuos véase M, Ayala, F, Malagon, I, Garzon, J, Castillo, M, Garzon: EL TENSOR DE ESFUERZOS: un analisis epistemologicoa desde una perspectiva pedagogica. Alli se muestra un tratamiento generico de los medios elasticos desde la perspectiva de continuo y las relaciones entre esfuerzo y fuerza.

En las ondas se presenta una transferencia de variación de estados (estado puede ser posición, presión, tensión, densidad, etc.) dentro del medio, de forma que esta variación se presenta de forma periódica en el espacio y el tiempo; por ejemplo, consideremos nuevamente el caso de la cuerda por la cual viaja un pulso, la **figura 3** muestra el pulso en distintos momentos, haremos énfasis en los tiempos t_2 y t_3 marcados en las líneas 1 y 2 en la parte inferior respectivamente, las cuales representan las porciones de cuerda deformadas en dicho instante. El estado en este caso puede ser la forma del pulso viajero; cuando el pulso en t_2, denotado por la porción 1, vuelve a su posición de equilibrio, el pulso en t_3 denotado por la porción 2 se desequilibra completamente de la misma forma que el pulso en t_2, y el tiempo que tarda en deformarse es el mismo tiempo que tarda la porción 1 en volver a su estado de equilibrio, y, aún más interesante, la porción de cuerda que se deforma (un dl) es la misma cantidad de porción que se ha equilibrado en 1. En cualquier caso, se dice que hay una ***transfieren de energía y de cambio de estado*** entre una porción de la cuerda y su vecina**.**

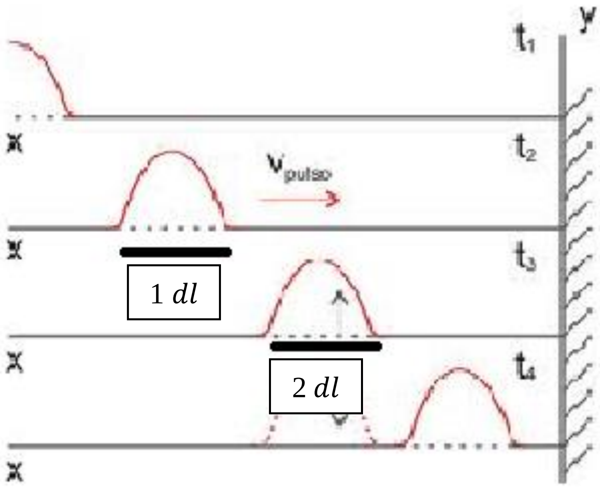


Figura 3: pulso viajero en una cuerda.

Las ondas se pueden clasificar en dos tipos: ondas electromagnéticas y ondas mecánicas. Las ondas electromagnéticas constituyen todo el campo de la luz y la óptica. Dentro de las ondas mecánicas se encuentran las ondas en las cuerdas y el agua, las olas, los sismos y los fenómenos acústicos. Este último, las ondas sonoras, serán nuestro referente en la descripción de la armonía musical a través de algunos conceptos físicos.

1.3 Ondas sonoras

Las ondas sonoras son cambios de estado de presión y densidad de medios continuos como gases y sólidos, en donde hay una transferencia de energía entre las secciones del medio. Existen tres tipos de ondas sonoras: ondas ***audibles,*** ondas ***ultrasónicas,*** y ondas

infra sónicas. Las ondas *audibles* son aquellas a las que el oído humano es sensible, su frecuencia de oscilación se encuentra entre 20 y 20000 Hz; las ondas *infra sónicas* tienen la frecuencia de oscilación por debajo del intervalo *audible*, los elefantes se comunican con este tipo de sonidos a grandes distancias; las ondas *ultrasónicas* tienen su frecuencia de oscilación por encima de la frecuencia de oscilación de las ondas *audibles.*
Es un hecho bien conocido, que el oído humano es el receptor de las ondas sonoras, y que el medio en donde se propagan dichas ondas es el aire circundante a nuestro alrededor. Sin embargo podríamos preguntar ¿Cómo se propagan estas ondas? ¿A qué nos referimos cuando las ondas sonoras son cambios de presión y densidad del medio? El modelo que se plantea, y con el cual estamos de acuerdo, es que cuando se genera un pulso sobre un gas confinado, las diferentes secciones de dicho medio oscilan en la misma dirección de la propagación del pulso, de forma que en un instante dado el gas en una parte se contraen y después se expanden como se muestra en la **figura 4** y en la **figura 5.**

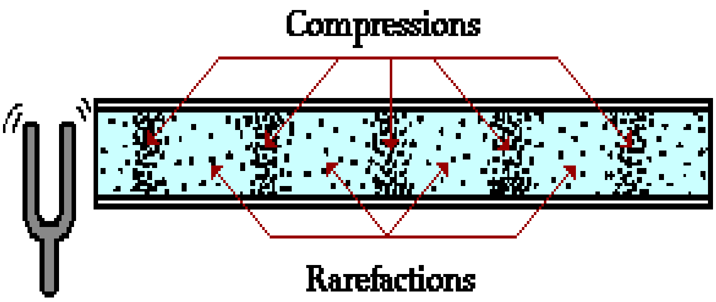


Figura 4: ondas en un gas. http://cienciasamericocastro.blogspot.com/2012/06/2-eso-ab-apuntes-sobre-ondas.html

Figura 5: modelo de la propagación de un pulso a través de un gas. Tomada de http://co.kalipedia.com/ciencias-vida/tema/diapason.html?x1=20070924klpcnafyq_359.Kes&x=20070924klpcnafyq_367.Kes

Estas compresiones y expansiones del medio generan cambios en la cantidad de gas en cada zona del medio, lo que genera que la densidad varíen con el tiempo y por tanto la presión. Es por eso que las ondas sonoras son ondas de presión, ya que esta variable de estado cambia a medida que nos movemos sobre el medio en el tiempo

Una de las principales características de las ondas sonoras es que son ondas **longitudinales.** La propagación del sonido se genera en todas las direcciones en forma radial teniendo como centro la fuente sonora. La ecuación general de onda está dada por:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Donde $\boldsymbol{\varphi}$ es la función de onda y depende de los parámetros espaciales y temporales, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{t}$ respectivamente. El parámetro $\boldsymbol{v}$ es la rapidez de propagación de la onda sonora; esta rapidez depende de las características elásticas e inerciales del medio como la densidad de masa $(\boldsymbol{\rho})$ y el modulo volumétrico de deformación $(\boldsymbol{\beta})$[3]. La rapidez de propagación viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \quad (2)$$

La función $\boldsymbol{\varphi}$**,** como dijimos anteriormente, representa la variable de estado del medio, la cual puede ser la presión y la densidad, por tanto la ecuación 1 se puede escribir en términos de estas variables:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$$

En donde $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{\rho}$ representa la presión y la densidad del medio respectivamente

Las funciones que satisface la ecuación de onda, son las funciones trigonométricas $\boldsymbol{seno}$ y $\boldsymbol{coseno}$. Si las ondas sonoras son ondas periódicas, entonces la función de onda y la función de variación de la presión del medio viene dada por:

$$\varphi(x,t) = \varphi_{max}cos(kx - \omega t)$$
$$\Delta P = \Delta P_{max}sen(kx - \omega t)$$

Otra característica de las ondas es la transferencia de energía de las partículas del medio. **La energía total de transferencia** de la onda sonora viene dada por la expresión:

$$E = \frac{1}{2}\rho A\varphi_{max}\omega^2\lambda \quad (3)$$

[3] El módulo de deformación es una propiedad de los cuerpos la cual nos dice la oposición que tiene un cuerpo al para dejarse deformar. El modulo volumétrico viene dado por la ecuación: $\frac{\Delta p V_i}{\Delta V}$ en donde p es la presión por unidad de área y V es el volumen del cuerpo a deformar.

En donde $\boldsymbol{\rho}$ es la densidad volumétrica de masa, $\boldsymbol{A}$ es el área de sección transversal a la dirección de propagación de la onda[4], $\boldsymbol{\omega}$ es la frecuencia angular y $\boldsymbol{\lambda}$ es la longitud de onda asociada a dicha onda.
A medida que la onda sonora se mueve a través del aire, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado durante un periodo de oscilación. Sea $\boldsymbol{T}$ el periodo de oscilación de la onda, por tanto **la potencia, o rapidez de transferencia de energía es**:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2}\rho A\varphi_{max}\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho A v\omega^2{\varphi^2}_{max} \qquad (4)$$

En donde v es la rapidez del sonido en el aire.

1.4 Cualidades del sonido

1.4.1 Introducción:

En este apartado hablaremos de 3 características importantes del sonido: el timbre, la intensidad y el tono. La primera, es la cualidad que permite diferenciar las fuentes sonoras sin importar que estas suenen a la misma frecuencia y a la misma intensidad; esta cualidad es bien importante en términos musicales, porque ella permite diferenciar cuando las fuentes sonoras emiten sonidos puros y cuando con mucho ruido, lo que es fundamental a la hora de escoger una fuente sonora para interpretar una pieza musical. La segunda característica, la intensidad, es aquella que permite diferenciar las fuentes sonoras en términos del volumen, que tan duro o que tan bajo suenan. Por último, el tono, permite diferenciar las fuentes sonoras en términos de la frecuencia; lo agudo o grave que suena, por ejemplo, un instrumento musical, permite distinguir las notas musicales que produce dicho instrumento.

1.4.2 El timbre

Esta cualidad permite distinguir los sonidos producidos por los diferentes instrumentos. Más concretamente, el timbre o forma de onda es la característica que nos permitirá

[4] El área transversal es la región superficial comprendida por las partículas que realizan la transferencia de energía. Imagine un gas contenido en un embolo, y al final del mismo un pistón. Cuando movemos el pistón hacia dentro del embolo, se genera una perturbación del gas, la transferencia de energía se da entre las partículas del medio que fueron perturbadas por el pistón la cual tenía una sección transversal de área **A.** Remítase a**Fuente especificada no válida.**.

distinguir una nota de la misma frecuencia e intensidad producida por instrumentos diferentes. La forma de onda viene determinada por los armónicos, que son una serie de vibraciones subsidiarias que acompañan a una vibración primaria o fundamental del movimiento ondulatorio (especialmente en los instrumentos musicales).

Normalmente, al hacer vibrar un cuerpo, no obtenemos un sonido puro, sino un sonido compuesto de sonidos de diferentes frecuencias[5]. A estos se les llama armónicos. La frecuencia de los armónicos, siempre es un múltiplo de la frecuencia más baja llamada *frecuencia fundamental o primer armónico*. A medida que las frecuencias son más altas, los segmentos en vibración son más cortos y los tonos musicales están más próximos los unos de los otros **(figura 6)**.

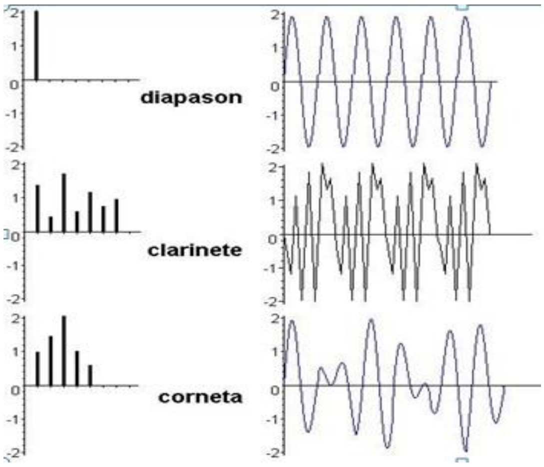


Figura 6: registro sonoro de 3 fuentes sonoras. Tomada de http://autoaudio.blog.com.es/

Si se toca el ***La*** situado sobre el ***Do*** central en un violín, un piano y un diapasón, con la misma intensidad en los tres casos, los sonidos son idénticos en frecuencia y amplitud, pero muy diferentes en timbre. De las tres fuentes, el diapasón es el que produce el tono más sencillo, que en este caso está formado casi exclusivamente por vibraciones con frecuencias de 440 Hz. Debido a las propiedades acústicas del oído y las propiedades de resonancia de su membrana vibrante, es dudoso que un tono puro llegue al mecanismo interno del oído sin sufrir cambios. La componente principal de la nota producida por el piano o el violín también tiene una frecuencia de 440 Hz. Sin embargo, esas notas también contienen componentes con frecuencias que son múltiplos exactos de 440 Hz, los llamados tonos secundarios, como 880, 1.320 o 1.760 Hz. Las intensidades

[5] Realmente, no es que un sonido este compuesto de varios sonidos, porque ya no sería un sonido; más bien creemos que la forma de representar un sonido no puro es a través de la superposición *matemática* de varios sonidos puros, es decir, representamos cualquier señal sonora en términos de la superposición de funciones simples SENOS y COSENOS (Teorema de Fourier). Esta es la forma en la cual, aquellos que estudian la acústica, han logrado describir el fenómeno del timbre, colocándolo en términos de la superposición de frecuencias simples. Es más, este concepto de superposición de cosas simples, ha sido uno de los métodos más utilizados para describir muchas situaciones físicas, como en los espacios vectoriales o en la mecánica cuántica cuando hablamos de estados cuánticos del sistema. Para ampliar un poco más esta idea, invito al lector a leer el **ANEXO 2**, en donde se desarrolla un poco más esta idea.

concretas de esas otras componentes, los llamados armónicos, determinan el timbre de la nota.

Los armónicos contribuyen a la percepción auditiva de la calidad de sonido o timbre. A continuación veremos algunos ejemplos de sonidos con formas de onda diferentes.
A continuación se muestra la descomposición espectral de algunos instrumentos musicales:

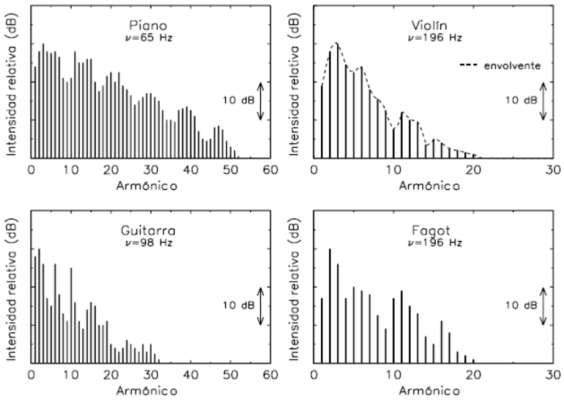


Figura 7: espectro de frecuencias de varios instrumentos musicales.

Para poder expresar, en términos matemáticos, los espectros sonoros de cada instrumento, o forma de onda, nos valemos de una herramienta matemática: las series de Fourier. Básicamente, la idea de las series de Fourier es la siguiente: *Toda función periódica, con periodo T, que tenga una forma complicada, se puede expresar como la superposición de funciones simples.* Las funciones simples a las cual se refiere esta definición, son las funciones trigonométricas SENO y COSENO. La ecuación se escribe de la siguiente forma:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos(n\omega t) + b_n Sen(n\omega t)$$

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n Sen\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad (4)$$

Siendo $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

De esta manera podemos expresar cualquier tipo de espectro sonoro en términos de sumas de cosenos y senos, cada uno de los cual está dado por lo que llamamos los armónicos, que son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental; ya que los espectros sonoros de las fuente sonoras, son funciones complicadas de describir, debido a que estos no emiten sonidos puros como los de un diapasón (**figura 6**).

Sin embargo, no hemos descrito como podemos realizar las trasformación de pasar el registro sonoro en el espacio del tiempo al espacio de las frecuencias; esto lo hacemos con una herramienta matemática que se llama la transformada de Fourier. En la siguiente tabla mostramos las ecuaciones que dan la transformada de Fourier (del espacio del tiempo al espacio de las frecuencias), y la transformada de Fourier inversa (del espacio de frecuencias al espacio del tiempo.

Transformada de Fourier	Transformada inversa de Fourier
$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$	$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{i2\pi f t}\, dt$

Tabla 1: transformada de Fourier.

De esta forma, podemos expresar la función complicada en términos de sus frecuencias, ya que ellos nos dan la información de las frecuencias que contribuyen en el espectro sonoro de cada instrumento.

Para ilustrar lo dicho anteriormente, mostramos una tabla en donde se realizó la transformada de Fourier para 4 instrumentos: Piano, Guitarra, Saxofón y trompeta.

ANÁLISIS ESPECTROS SONOROS DE VARIOS INSTRUMENTOS MUSICALES

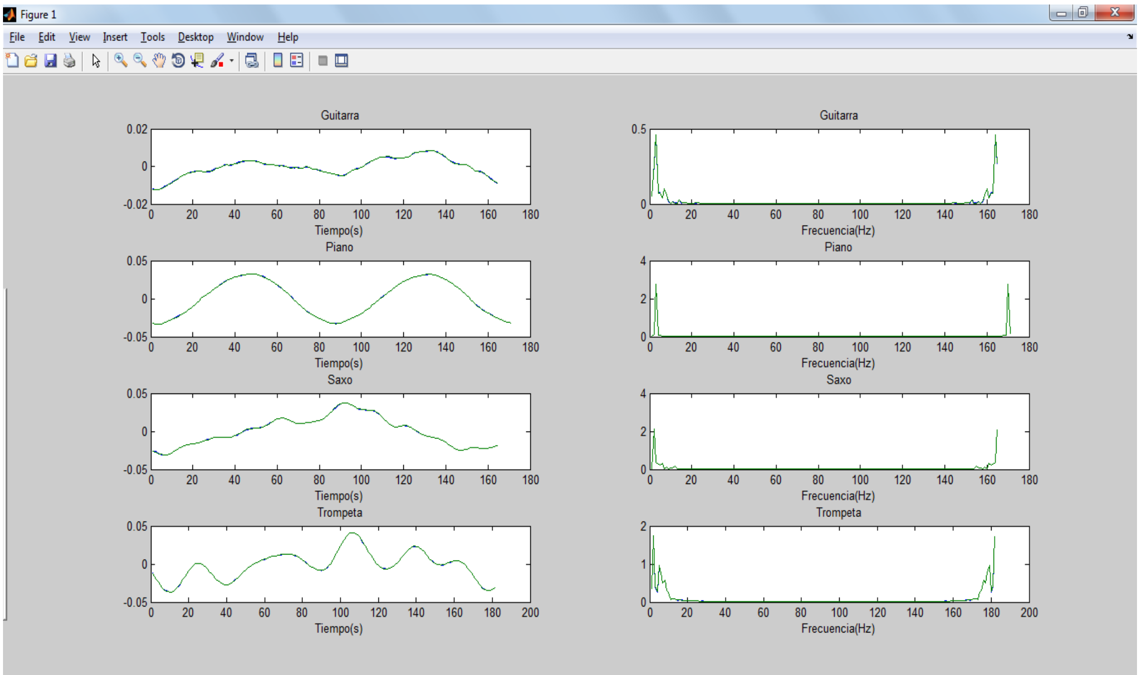


Figura 8: Espectros sonoros de 4 instrumentos musicales, tomados en MATLAB

En la **figura 8** se muestran los registros sonoros de la guitarra, piano, saxofón y trompeta, con sus respectivos espectros. Los gráficos del lado izquierdo muestran un patrón de todo el registro sonoro de los instrumentos, del lado derecho se muestra el espectro de frecuencias de cada patrón.

De los gráficos del lado izquierdo, se evidencia en una gran aproximación que todos coinciden en el tiempo de duración, lo que da cuenta de que todos tienen el mismo periodo fundamental; sin embargo se ve que la forma de cada grafico es diferente. El hecho que todos tienen el mismo periodo fundamental, hace que al sonar todos al tiempo, se perciba que suenen a la misma frecuencia. Sin embargo, esto no explica el hecho de que puedan diferenciarse (el timbre de cada instrumento)

Los gráficos del lado derecho muestran el espectro de frecuencias de cada instrumento, notemos como todos tienen un gran pico que está ubicado casi a la misma frecuencia; dicho pico muestra la frecuencia fundamental de todos los instrumentos. Sin embargo, se evidencia que unos gráficos tienen más picos que otros. Por ejemplo, el espectro de la guitarra y de la trompeta tiene 2 picos característicos, que se encuentran enseguida del pico más grande; este pico muestra la característica del timbre de estos dos instrumentos. En el espectro del piano, este es casi a una función sinusoidal, por tal motivo, solo se muestra un pico porque dicho espectro muestra un sonido puro.

1.4.3 Intensidad

Esta cualidad caracteriza a las fuentes sonoras por su volumen, es decir, aunque dos o más fuentes sonoras suenen a la misma frecuencia y tengan el mismo timbre, se pueden diferenciar en que una suena más fuerte que el otro. Sin embargo, es un hecho bien conocido que la intensidad o volumen de la fuente sonora, depende de que tan lejos se encuentre dicha fuente, del receptor, aunque la intensidad también depende de algunas propiedades del medio de propagación en términos de la absorción.

Para explicar es te hecho, vamos a suponer que le medio tiene las características apropiadas para que no haya perdida de energía por absorción, es decir, el medio es homogéneo. En capítulos anteriores, explicamos que la rapidez de transferencia de energía o potencia acústica, se definía como la cantidad de energía que pasaba por un punto del medio en un periodo **(ecuación 4)**:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{T}$$

La **intensidad de sonido** se define como la potencia acústica transferida por una onda sonora por unidad de área normal a la dirección de propagación, La unidad utilizada por el Sistema Internacional de Unidades es el vatio por metro cuadrado.

$$I = \frac{\mathcal{P}}{A} \quad (5)$$

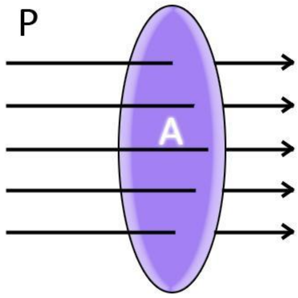


Figura 9: Flujo de potencia acústica que pasa a través de una superficie

El oído humano tiene la capacidad de escuchar sonidos a partir de una intensidad de 10^{-12} W/m². Esta intensidad se conoce como umbral de audición. Cuando la intensidad supera 1 W/m², la sensación se vuelve dolorosa.

Dado que en el rango de intensidades que el oído humano puede detectar sin dolor hay grandes diferencias en el número de cifras empleadas en una escala lineal, es habitual utilizar una escala logarítmica. Por convención, en dicha escala logarítmica se emplea como nivel de referencia el umbral de audición. La unidad más empleada en la escala logarítmica es el decibelio.

$$B_{db} = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad (5)$$

Donde B_{db} es el nivel de intensidad acústica en decibelios, I es la intensidad acústica en la escala lineal (W/m² en el SI) e I_0 es el umbral de la audición (10^{-12} W/m²).

1.4.4 Tono

Los sonidos musicales son producidos por algunos procesos físicos como por ejemplo, una cuerda vibrando, el aire en el interior de un instrumento de viento, etc. La característica más fundamental de esos sonidos es su "elevación" o "**altura**", o cantidad de veces que vibra por segundo, es decir, su frecuencia. La frecuencia se mide en **Hertz** (Hz) o número de oscilaciones o ciclos por segundo. Cuanto mayor sea su frecuencia, más aguda o "alta" será la nota musical. La altura es una propiedad subjetiva de un sonido por la que puede compararse con otro en términos de "alto o "bajo". Los sonidos de mayor o menor frecuencia se denominan respectivamente, agudos o graves; términos relativos, ya que entre los tonos diferentes uno de ellos será siempre más agudo que el otro y a la inversa.

Mientras que la frecuencia de un sonido, es una definición física cuantitativa, que se puede medir con aparatos sin una referencia auditiva, la elevación es nuestra evaluación subjetiva de la frecuencia del sonido. La percepción puede ser diferente en distintas situaciones, así para una frecuencia específica no siempre tendremos la misma elevación.

1.4.5 La duración

Aunque no vamos a profundizar en esta cualidad, cabe mencionarla ya que es de gran importancia en la música. Está en relación con el tiempo que permanece la vibración y se representaría gráficamente:

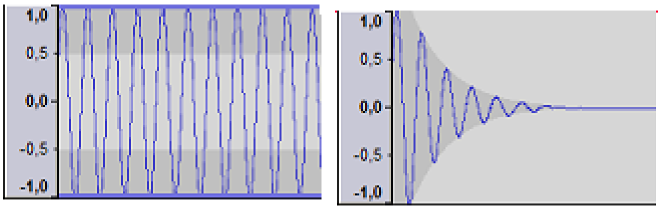


Figura 10: Representación de la duración del sonido; la figura de la izquierda representa un sonido de corta duración, y la figura de la derecha representa un sonido de larga duración.

El tiempo máximo de permanencia de la vibración está muchas veces limitado por las características de producción de sonido del instrumento musical. Naturalmente, los instrumentos electrónicos no tienen este tipo de limitaciones y, siempre que el timbre del instrumento que produzcan no tenga como característica una pronta extinción, la duración de los sonidos puede ser todo lo larga que deseemos.

También existe una duración mínima de los sonidos a partir de la cual, aunque un instrumento electrónico fuese capaz de generar sonidos tan breves y tan rápidos (si los hace consecutivamente), nuestro oído acabaría percibiéndolos como simultáneos.

En música la medición del tiempo de los sonidos no se realiza uno a uno, sino por comparación con los demás. Pero aún así, esta referencia relativa de duraciones necesita una referencia superior, para poder establecer su duración absoluta. Así tenemos la indicación metronómica, que se expresa en número de "golpes" por minuto (bpm: beats per minute). Cuanto mayor sea el número de la indicación metronómica, más rápido se interpretará la música y a la inversa.

Capítulo 2: ORGANIZACIÓN DE LA ARMONÍA

2.1 Introducción

La música es el arte de combinar los sonidos sucesiva y simultáneamente para transmitir o evocar sentimientos. Es un arte libre donde se representan los sentimientos con sonidos, bajo diferentes sistemas de composición. Cada sistema de composición va determinar un estilo diferente dentro de la música. Existen tres componen de estudio dentro de la teoría musical: la melodía, que es la forma de combinar los sonidos, pero sucesivamente, esta se especializa en el estudio de las escalas; la armonía, que es la forma de combinar sonidos simultáneamente, de acá salen los intervalos musicales, los acordes y las tonalidades; por último el ritmo que se encarga de estudiar el pulso o el tiempo a intervalos constantes y regulares para que una canción suene de forma rítmica.

En esta sección explicaremos, a groso modo, algunos conceptos de la teoría musical. Hablaremos un poco de la escala cromática, la cual contiene todas las notas musicales, la escala diatónica, la cual es la base de la construcción de la armonía, y la construcción de los acordes. Conocer estos conceptos será de gran utilidad para comprender un poco a cerca de las relaciones entre los conceptos físicos y los conceptos musicales.

2.2 Escala cromática

En la teoría musical, se dice que toda la música se hace con solo 12 sonidos, es decir, en la música solo existen 12 notas musicales; estos sonidos componen lo que se conoce como la escala cromática, los sonidos son: $Do,\ Do\#,\ Re,\ Re\#,\ Mi,\ Fa,\ Fa\#,\ Sol,$ $Sol\#,\ La,\ La\#, y\ Si$; para Volver a empezar en Do pero de la siguiente octava.

El símbolo #, se le llama sostenido, la razón de este símbolo es la siguiente: en música, la distancia que hay entre una nota y otra, por ejemplo entre Do y Re, es de un tono, pero entre estas dos notas existe una nota intermedia, la cual tiene una distancia de medio tono hacia arriba, por ejemplo entre $Do, y\ Do\#$ hay una distancia de medio tono, entonces el símbolo mencionado altera la nota a la que acompaña en medio tono hacia arriba. Otro símbolo que encontramos es el bemol (b), el cual tiene la misma función que el sostenido, pero lo que hace es alterar la nota medio tono hacia abajo, por ejemplo la distancia que hay entre Reb y Re es de medio tono; entonces, de la afirmación anterior llegamos a que $Do\# = Reb$, medio tono hacia arriba del Do es igual que media tono hacia abajo que el Re. El lector podrá notar que en la escala cromática hay dos notas musicales que no tienen sostenidos, las cuales son Mi y Si, esto es debido a que la distancia que hay entre Mi y Fa es de medio tono, al igual que entre Si y Do.

Con la afirmación anterior, podemos escribir la escala cromática en términos de los bemoles: $Do, Reb, Re, Mib, Mi, Fa, Solb, Sol,\ Lab, La, Sib, y\ Si$, esta escala es la misma que la que escribimos con el símbolo de sostenido (#). Estos dos símbolo se les denominan alteraciones, y las notas que tienen estos dos símbolos se les llama notas alteradas, así que las notas que no tienen estos símbolos se les denomina notas naturales, las cuales son; $Do, Re, Mi, Fa, Sol, La\ y\ Si$.

2.3 Escala Mayor

Como se mencionó, las notas sin alteraciones son las notas naturales, estas notas componen lo que conocemos como la escala mayor:

$$Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do$$

Esta escala se conoce como la escala mayor de Do, notemos como esta escala comienza y termina en la misma nota; todas las escalas mayores se componen de 8 notas, donde la octava nota es la misma que la primera. Si analizamos esta escala, vemos que ella se compone de 5 tonos y 2 semitonos distribuidos en la forma que se muestra en la **figura 10**:

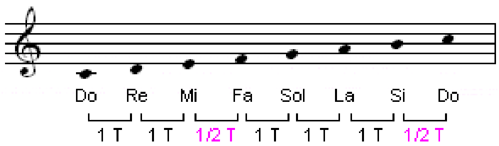


Figura 11: Escala mayor de DO. Distribución de los tonos y los semitonos. Tomada de http://blogs.upc.edu.pe/vu/grupos/post/la-escala-mayor

De esta forma se genera un patrón con el cual podemos construir todas las escalas mayores, **figura 10.** A si, por ejemplo la escala de SOL mayor seria: $Sol, La, Si, Do, Re, Mi, Fa\#, Sol$. **En la tabla 2** se muestran todas las escalas mayores.

Figura 12: Patrón para las escalas mayores. Tomado de http://blogs.upc.edu.pe/vu/blogs/guitarra-intermedia

A través de la escala mayor, y el patrón de la escala mayor (**figura 10),** se puede armonizar la escala mayor, es decir construir los acordes que componen dicha escala.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
Re	*Mi*	*Fa#*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do#*	*Re*
Mi	*Fa#*	*Sol#*	*La*	*Si*	*Do#*	*Re#*	*Mi*
Fa	*Sol*	*La*	*Sib*	*Do*	*Re*	*Mi*	*Fa*
Sol	*La*	*Si*	*Do*	*Re*	*Mi*	*Fa#*	*Sol*
La	*Si*	*Do#*	*Re*	*Mi*	*Fa#*	*Sol#*	*La*
Si	*Do#*	*Re#*	*Mi*	*Fa#*	*Sol#*	*La#*	*Si*
Fa#	*Sol#*	*La#*	*Si*	*Do#*	*Re#*	*Mi#*	*Fa#*
Do#	*Re#*	*Mi#*	*Fa#*	*Sol#*	*La#*	*Si#*	*Do#*
Sib	*Do*	*Re*	*Mib*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Sib*
Mib	*Fa*	*Sol*	*Lab*	*Sib*	*Do*	*Re*	*Mib*
Lab	*Sib*	*Do*	*Reb*	*Mib*	*Fa*	*Sol*	*Lab*
Reb	*Mib*	*Fa*	*Solb*	*Lab*	*Sib*	*Do*	*Reb*
Solb	*Lab*	*Sib*	*Dob*	*Reb*	*Mib*	*Fa*	*Solb*
Dob	*Reb*	*Mib*	*Fab*	*Solb*	*Lab*	*Sib*	*Dob*

Tabla 2: Escalas mayores

2.4 Armonización de la escala

Cuando hablamos de armonía, nos referimos a la rama de la música que se encarga de la ejecución de las notas musicales al mismo tiempo, de esta rama nacen los acordes musicales; un acorde es la ejecución simultánea de 3 o más notas musicales al tiempo, sin embargo, no podemos decir que cualquier combinación de sonidos compone un acorde. Armonizar la escala, significa colocar el acorde que le corresponde a cada nota de la escala, pero antes de entrar a explicar este concepto, hablaremos un poco de lo que significa el intervalo musical y como a partir de los intervalos se construyen los acordes.

En teoría musical se utiliza la palabra intervalo cuando hablamos sobre una diferencia de altura entre dos notas. Se le llama intervalo armónico cuando las dos notas suenan simultáneamente y melódicos cuando suenan sucesivamente. Existen varios tipos de intervalos, por ejemplo segunda menor, tercera mayor, quinta justa, etc. El numero dice la distancia en términos de tonos a la que esta una nota de la otra, por ejemplo entre Do y Mi hay una tercera, ya que se cuenta desde Do, pasando por Re y terminandoMi. Pero también hay el tipo, por ejemplo, puede ser tercera mayor o tercera menor. De esta forma se clasifican los intervalos, por la distancia tonal y el tipo.

2.4.1 Segundas

Las segundas son fáciles de reconocer: las dos notas que son vecinas en un pentagrama. Una nota está sobre una línea, y la otra está en el espacio justo encima o debajo. Una segunda menor es un intervalo de un semitono. Una segunda mayor comprende dos semitonos (es decir, un tono). Por ejemplo Do y Re comprende in intervalo de segunda mayor, y entre Do y $Re\#$ comprende un intervalo de segunda menor.

2.4.2 Terceras

Una tercera menor es una segunda menor y una segunda mayor, o sea, tres semitonos. Una tercera mayor son dos segundas mayores, o sea, cuatro semitonos. Por ejemplo, el intervalo entre Do y Mi es de tercera mayor, y el intervalo que hay entre Do y Mib es una tercera menor.

En la siguiente tabla se muestran todos los intervalos que existen en la teoria musical, tomando como ejemplo todos los intervalos en relacion a la nota Mi

Ejemplo	Distancia tonal	Nombre del intervalo
DO - DO	0	Unísono
DO - REb	1/2 Tono	Segunda menor
DO - RE	1 Tono	Segunda mayor
DO - MIb	1 + 1/2 Tonos	Tercera menor
DO - MI	2 Tonos	Tercera mayor
DO - FA	2 + 1/2 Tonos	Cuarta justa
DO - FA#	3 Tonos (tritono)	Cuarta aumentada
DO - SOL	3 + 1/2 Tonos	Quinta justa
DO - SOL#	4 Tonos	Quinta aumentada
DO - LAb	4 Tonos	Sexta menor
DO - LA	4 + 1/2 Tonos	Sexta mayor
DO - SIb	5 Tonos	Séptima menor
DO - SI	5 + 1/2 Tonos	Séptima mayor
DO - DO'	6 Tonos	Octava

Tabla 3: Intervalos musicales

2.5 Acordes Musicales

Conociendo un poco acerca de los intervalos musicales, ya podemos construir los acordes. Recordemos que un acorde se compone de 3 o más notas; los acordes más conocidos o fundamentales son: acordes mayores, acordes menores, acordes aumentados y acordes disminuidos. Los demás acordes son péquelas variaciones de los que acabamos de mencionar, por lo tanto, estos acordes se vuelven fundamentales para la teoría musical y por ello trabajaremos un poco con estos.

Los acordes mayores se componen de 2 intervalos de tercera, el primer intervalo es mayor y el otro menor[6]; Por ejemplo el acorde $\boldsymbol{Do - Mi - Sol}$, es un acorde mayor, ya que el intervalo entre $\boldsymbol{Do}$ y $\boldsymbol{Mi}$ es de tercera Mayor y el intervalo entre $\boldsymbol{Mi}$ y $\boldsymbol{Sol}$ es de tercera menor.

Los acordes menores se componen, al igual que los acordes mayores, de 2 terceras, sin embargo la diferencia con los acordes anteriores radica en que el orden en que aparecen las terceras cambia, la primera tercera es menor, y la segunda tercera es mayor; por ejemplo el acorde de $\boldsymbol{Do}$ menor se compone de $\boldsymbol{Do - Mib - Sol}$, la primera tercera es menor ya que la distancia tonal que hay de $\boldsymbol{Do}$ a $\boldsymbol{Mib}$ es de tono y medio, y la segunda tercera, entre $\boldsymbol{Mib}$ y $\boldsymbol{Sol}$, tiene una distancia tonal de 2 tonos.

[6] El orden en el que aparecen los intervalos es de vital importancia, ya que estos definen el tipo de acorde, menor o mayor, por ejemplo el acorde DO-MI-SOL, es un acorde mayor, ya que primero aparece el intervalo de tercera mayor entre DO y MI, y después aparece el intervalo de tercera menor entre MI y SOL; en cambio el acorde LA-DO-MI es un acorde menor, ya que primero aparece in intervalo de tercera menor entre LA y DO, y después un intervalo de tercera mayor entre DO y MI.

Capítulo 3: DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LA ARMONÍA MUSICAL

3.1 Introducción

La escala musical, o también conocida como gama musical, es una sucesión de sonidos, es decir, los sonidos no se interpretan simultáneamente si no que lo hacen uno detrás del otro.
Generalmente el número de sonidos que compone una escala musical son 7, (aunque existen escalas constituidas por un numero diferente de sonidos, pero las escalas de 7 sonidos son la base de la armonía musical) y cuando se llega a la octava nota, esta nota es la repetición de la primera nota dela escala, y a partir de allí se vuelve a repetir la escala (esto tiene una razón de ser desde el punto de vista físico, el cual explicaremos más adelante)

De lo anterior nos surge una pregunta ¿Cuántas repeticiones existen de la escala musical? Pues bien, físicamente las notas musicales tiene asociado una frecuencia en particular para cada una, y sabemos el oído humano percibe ondas sonoras entre $20Hz$ y 20000 Hz, sin embargo, el oído promedio puede escuchar entre $20Hz$ y y 10000 Hz.

Sin embargo, la organización de sonidos que compone las escalas musicales no es aleatoria, y quien primero se dio cuenta de esto fue Pitágoras, cuando utilizaba cuerdas tensionadas y producía sonidos al perturbarlas. A través de las relaciones entre las longitudes de las cuerdas, Pitágoras establece la primera escala.

Cuentan algunos textos históricos (R & Rafel, 2010)que un día Pitágoras pasaba cerca de una herrería y escuchaba el sonar de martillos golpeando; noto que el tono de los golpes cambiaba conforme cambiaba el tamaño del martillo. Es posible que esta historia sea mentira, debido a la poca información que se encuentra de la época de Pitágoras (570-479 a.C.) pero lo que sí sabemos es que Pitágoras utilizo varias masas con el fin de crear tensión en cuerdas para hacerlas vibrar. Imaginemos una cuerda en posición horizontal respecto a la superficie de la tierra, sujeta en un extremo y en el otro se coloca un peso (**figura 10)**.

Figura 13

El peso genera una tensión sobre la cuerda. Pitágoras encontró que cuando una cuerda tensa se perturbaba emitía un sonido de frecuencia determinada (aunque en este tiempo no se hablaba de frecuencia), después con ayuda de una cuña empieza a reducir la longitud de la cuerda y obtiene sonidos con frecuencia más alta es decir sonidos agudos; poco después encuentra que cuando la longitud de la cuerda se reducía a la mitad, el sonido era el mismo que el de la cuerda sin variar pero con una frecuencia duplicada, encontró el intervalo de consonancia máxima conocido hoy en día, la octava.

Sin embargo su estudio no termina acá; Pitágoras sigue jugando a reducir la longitud de la cuerda y encuentra algo muy interesante, se da cuenta que cuando reduce la longitud de la cuerda en fracciones de la longitud inicial, los sonidos asociados a dichas variaciones suenan agradables cuando se tocan al mismo tiempo con la cuerda de longitud inicial. Por ejemplo cuando la reducción de la cuerda es de $\frac{2}{3}L$ siendo L la longitud de la cuerda inicial, obtenia el intervalo de quinta juata como se conoce hoy en día y es considerado el intervalo de consonancia mayor después de la octava; con este procedimiento Pitágoras logra encontrar las notas naturales, a saber *do, re, mi, fa, sol* y *la*, en ese entonces no se había descubierto el sí.

En el presente documento miraremos todos los aspectos mencionados anteriormente desde el punto de vista de la física: como se construye la escala musical a través de los armónicos de una cuerda y como el tono musical está relacionado con la frecuencia. Estos temas hacen parte de la física de ondas, y a si mostrar como la física contribuye a la teoría de la armonía musical.

3.2 Armónicos en cuerdas

Para la construcción de la escala musical, primero explicaremos la serie armónica tomando como fuente sonora una cuerda vibrante. A partir de esta construcción mostraremos la relación que existe entre los armónicos de una cuerda y la construcción de los intervalos y escalas musicales

Cuando tenemos una cuerda con sus extremos fijos y la perturbamos, se presentan ondas estacionarias. Las ondas estacionarios son perturbaciones en donde la onda que se genera no es una onda viajera, es decir, no se puede determinar en qué sentido viaja la onda. Esta condición de frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos llamados modos normales, cada uno con una frecuencia característica (**figura 13)**.

El primer modo normal tiene nodos en sus extremos y un antinodo en medio, en este modo la longitud de onda λ es igual al doble de la longitud de la cuerda: $\lambda = 2L$; en el segundo modo normal la longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda: $\lambda = L$; el tercer modo normal corresponde al caso en que $\lambda = \frac{2L}{3}$. En general las longitudes de onda de los modos normales en las cuerdas se puede expresar como:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad (6)$$

$$n = 1,2,3,4 \ldots$$

La frecuencia asociada a cada modo viene dada por la expresión:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \qquad (7)$$

Donde v es la velocidad de propagación de la onda en una cuerda, la cual depende de las propiedades elásticas y de la densidad de la cuerda, y se expresa de la siguiente manera:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donde T [7]es la tensión de la cuerda y μ es la densidad lineal.

[7] Aunque la velocidad de propagación dependa de la tensión de la cuerda, esta ecuación realmente esta descrita en términos de la deformación del medio, dada por la expresión $Y = T\frac{l_0}{dl}$ donde la expresión $\frac{l_0}{dl}$ dice cuánto se ha deformado y este valor es adimensional; sin embargo esta deformación es casi igual a la unidad, por ende se aproxima el módulo de Young a la tensión de la cuerda.

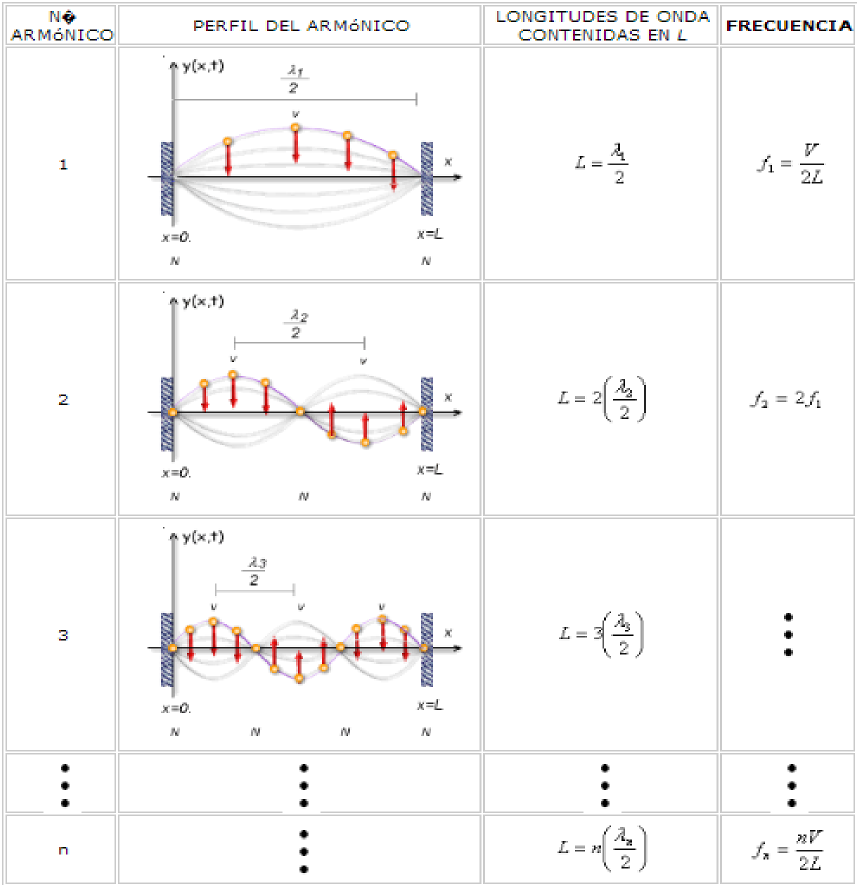


Figura 14: modos normales de vibración. Tomada de
http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_05_06/io2/public_html/

Así la frecuencia para cada modo normal quedaría determinada por la ecuación:

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8)$$

La ecuación 8 establece la relación que existe entre el modo normal y la frecuencia correspondiente a ese modo. Lo interesante de esta ecuación es que la variación de la frecuencia cuando pasa de un modo a otro, es de forma discreta; es decir, según la longitud de la cuerda y sus propiedades mecánicas, ella solo puede virar en ciertas frecuencias en donde aparecerá cada modo, debido a que $n = 1,2,3,4 \ldots$

La ecuación 8 establece la serie frecuencias, correspondientes a los modos normales de la cuerda, ésta es conocida como la serie armónica de la cuerda, o la serie de los armónicos de la cuerda.

En el siguiente cuadro se muestran las relaciones que definen los modos normales de vibración en cuerdas.

$\lambda = \frac{2L}{n}$ Longitud de onda	$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Frecuencia de vibración
$K = \frac{2\pi}{\lambda}$ Número de Onda para el primer modo $K_n = \frac{n\pi}{L}$ Numero de onda para el enésimo modo	$\omega = 2\pi f$ $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Frecuencia angular

Tabla 4

3.3 Construcción de la escala musical a través de los armónicos en la cuerda

Es un hecho bien conocido que al pulsar una cuerda tensa se obtiene un sonido; si se tienen varias cuerdas de igual densidad lineal sometidas a la misma tensión, el tono del sonido obtenido en cada cuerda depende de su longitud; de igual manera, una cuerda pulsada que se divide en porciones de longitud bien determinada, por ejemplo los trastes de una guitarra, emite sonidos de tonos diferentes, de acuerdo con la longitud de la cuerda que entre en vibración.

Consideremos una cuerda que se ha puesto a vibrar en su primero modo normal; a este modo le asociamos una frecuencia determinada y la podemos asociar una nota musical como por ejemplo Do. Cuando la cuerda se pone a vibrar en su segundo modo normal la frecuencia se duplica, y a esta frecuencia le asociamos la octava de Do, es decir Do'.

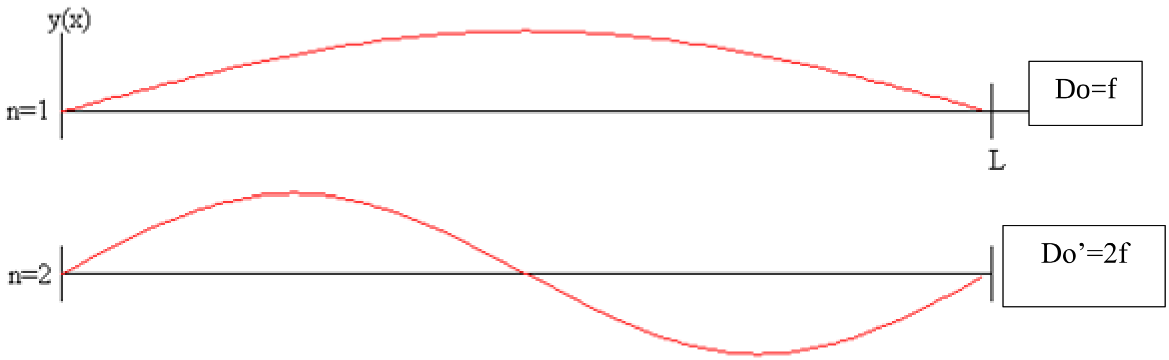


Figura 15

Este Do' hace parte, o es el comienzo, de una nueva escala que es la repetición de Do. Si pasamos al tercer modo de vibración, triplicamos la frecuencia y encontramos una nueva nota musical, Sol'; llamamos a esta nota Sol' y no Sol porque la frecuencia asociada a esta nota pertenece al conjunto de las notas musicales de la escala de Do'. En el cuarto modo normal de vibración, la frecuencia de oscilación es 4 veces mayor a la frecuencia inicial; a esta frecuencia le asociamos nuevamente la nota musical Do'', pero ahora pertenece a la segunda octava (**figura 15)**.

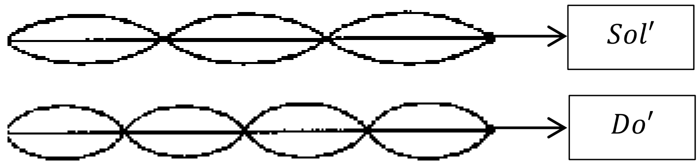


Figura 16: Tercer y cuarto modo normal de vibración

De esta forma: $fSol' = 3fDo$

Pero si queremos ver la relación entre Do y Sol simplemente hay que dividir por dos, ya que Sol' es la octava superior del Sol. En el quinto modo normal, encontramos que la frecuencia se ha incrementado en 5 a la frecuencia inicial; a esta frecuencia le asociamos la nota musical Mi'', de modo que $fMi'' = 5fDo$. Con este procedimiento encontramos todas las notas musicales naturales que todos conocemos: $Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si$. (Para ver mejor el desarrollo de como aparecen las notas musicales a partir de los monos normales de vibración, invitamos al lector a que revise el **ANEXO 3**)

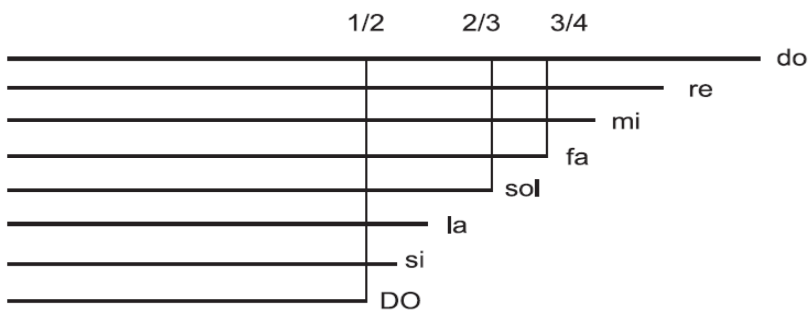


Figura 17: Cuerda que se ha dividido en fracciones enteras

La figura 16 muestra como se ha dividido la cuerda. La primera, en la parte superior de la imagen, hace referencia a la cuerda completa, en donde se ha establecido que dicho cuerda es la nota musical Do. Acto seguido, se muestra en que porción se debe dividir la cuerda para encontrar las otras notas: Re, Mi, Fa, Sol, La, Si.

Esto tiene estrecha relación con los modos normales de vibración de una cuerda. Por ejemplo, la nota Sol surge de tomar $\frac{2}{3}$ de la longitud de la cuerda, si la frecuencia de la nota Do viene dada por la ecuación 3, entonces la frecuencia de la nota Sol viene dada por:

$$f_{sol} = \frac{n}{2\frac{2L}{3}}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{3n}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{3}{2}f_{Do}$$

Si dividimos la cuerda en la mitad, obtenemos el siguiente Do; su frecuencia viene dada por:

$$f_{D\prime o} = \frac{n}{2\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2f_{Do}$$

En general, se encuentran dos tipos de relaciones existentes entre la división de la longitud de una cuerda en porciones bien definidas y la frecuencia de vibración asociada a cada división:

- Si $L_n = \frac{L}{n}$, donde L es la longitud total de la cuerda y $n = 1,2,3,4$ ..., entonces la frecuencia asociada será de $f_n = nf$, siendo f la frecuencia fundamental; la relación entre estas 2 cantidades físicas es $f_n \alpha \frac{1}{L_n}$.
- Si $L_{n,b} = \frac{bL}{n}$, donde $n = 1,2,3,4 \ldots$ y $b = 1,2,3,4 \ldots$ y $n > b$, la frecuencia asociada a cada división será $f_{n,b} = \frac{nf}{b}$, siendo f la frecuencia fundamental; la relación entre estas 2 cantidades físicas es $f_{n,b} \alpha \frac{1}{L_{n,b}}$.

En la figura 16 se muestra como se relaciona los modos normales y la variación de la longitud de la cuerda.

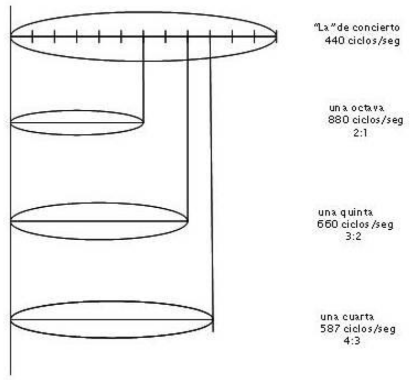


Figura 18: Relación de la variación de la longitud de la cuerda y los modos normales

La siguiente es una tabla en donde se muestra la frecuencia correspondiente a cada sonido.

Nota musical	Frecuencia en Hertz
Do	261
Re	293
Mi	329
Fa	349
Sol	391,1
La	440
Si	492,7
D0’	522

Tabla 5: frecuencias de las notas musicales

3.4 Intervalos

El intervalo es la relación que existe entre 2 sonidos cuando se tocan simultáneamente; este estudio es basado en la sensación sonora que produce al oído humano la interpretación simultánea entre 2 sonidos: consonante o disonante.

Los intervalos consonantes son aquellos que son agradables al oído humano, los intervalo disonante son aquellos que producen desagrado; la construcción de la teoría de las escalas se he hecho s través del estudio de los intervalos y como estos producen diversas sensaciones en los seres humanos.

Sin embargo esta sensación no depende del valor absoluto de las frecuencias de los sonidos sino de la relación entre estos valores. Consideremos tres sonidos consecutivos $S_{1,}$ S_2 y S_3 (podrían ser las notas musicales Do, Re, Mi); musicalmente, la distancia sonora que existe entre el primer sonido y el segundo sonido es de un tono; es decir, la distancia mínima entre dos notas consecutivas es de un tono. Por consiguiente la distancia que habría entre $S_{1,}$ y S_3, desde el punto de vista musical, es de 2 tonos.

S_1 S_2 S_3

$$1\ tono + 1\ tono = 2\ tonos$$

Ahora consideremos otros tres sonidos S_1', S_2' y S_3', que son las octavas correspondientes a los primeros 3 sonidos; es decir, cada sonidos primado tiene el doble de la frecuencia de los sonidos no primados. Sin importar esta condición, el oído percibe la misma distancia tonal:

S_1' S_2' S_3'

$$1\ tono + 1\ tono = 2\ tonos$$

Si traducimos esto en frecuencias diríamos que pasa lo mismo, sin embargo no es así; como dijimos, supongamos que $S_{1,}$ S_2 y S_3 son Do, Re y Mi respectivamente, y S_1', S_2' y S_3' son Do', Re' y Mi' respectivamente (las octavas de las notas Do, Re y Mi respectivamente). Tomando los datos de la tabla 1 hacemos la diferencia de las frecuencias entre la nota Do y la nota Re obtenemos:

$$f_{Mi} - f_{Do} \cong 69Hz$$

Ahora, miremos la diferencia entre las frecuencias de las octavas:

$$f'_{Mi} - f'_{Do} \cong 138Hz$$

Al comparar los dos resultados notamos claramente que no son iguales, uno es el doble del otro.

Otra forma de ilustrar lo anterior es mirando las octavas. El oído humano percibe la distancia entre octavas como iguales, independiente de la octava en la que estemos; tomemos como referencia la nota La de frecuencia 110Hz y sus dos octavas, de 220Hz y 440Hz. Musicalmente diríamos que la distancia entre de las dos seria la misma, es decir, si de La_1 a La_2 hay 110Hz de diferencia, por ende entre La_2 y La_3 debería ser igual y la frecuencia de La_3 debería ser de 330Hz, sin embargo esa proporción aumento el doble.

De los 2 ejemplos anteriores notamos que real mente el oído no percibe la relación entre los sonidos de forma aditiva, si no que percibe las relaciones de proporcionalidad de las frecuencias de dichas notas, estas proporciones son las mismas independiente de la octava en la que nos encontremos. Si queremos conocer la relación que hay entre $S_{1,}$ y S_3 entonces tenemos:

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} * \frac{f_2}{f_1}$$

Por ejemplo la relación entre Do y Mi es:

$$\frac{f_{Mi}}{f_{Do}} = \frac{330Hz}{261Hz} \cong \frac{5}{4}$$

Y la relación entre Do' y Mi' es:

$$\frac{f_{Mi'}}{f_{Do'}} = \frac{660Hz}{322Hz} \cong \frac{5}{4}$$

Evidente este resultado si es coherente con lo que hemos dicho antes sobre la percepción del oído.

La construcción de las escalas que se conocen hoy en la teoría musical se hicieron con base en el estudio de los intervalos y las consonancias iniciadas por Pitágoras; sin embargo para llegar a lo que conocemos, las escalas musicales tuvieron varios cambios a través del tiempo debido a inconvenientes de sonoridad y de malestar auditiva a la hora de componer obras musicales.
Los tipos de escalas que se conocen y que fueron modificadas a través del tiempo son: la escala pitagórica, la escala pentatónica, la escala natural o diatónica y la escala cromática. Todas ellas construidas con base en el concepto de las proporciones matemáticas y la consonancia.

Todas las anteriores escalas se construyeron a partir del estudio de los armónicos en una cuerda que dan lugar a la escala pentatónica. Al hacer resonar una cuerda se perciben claramente cinco sonidos resultantes y simpáticos cuando hallamos los armónicos de la cuerda las cuales son llamadas consonancias elementales.

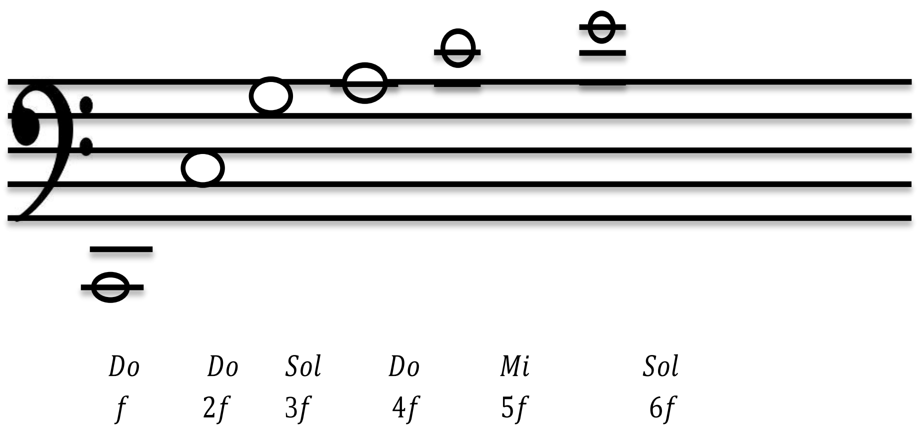


Figura 19: pentagrama

A partir de las notas anteriores se construye la escala natural conocida por todos, los demás sonidos que faltan son intermedios entre éstos y se obtienen a partir de las razones entre las frecuencias de las notas anteriores; en el próximo apartado mostraremos como se obtienen las demás notas.

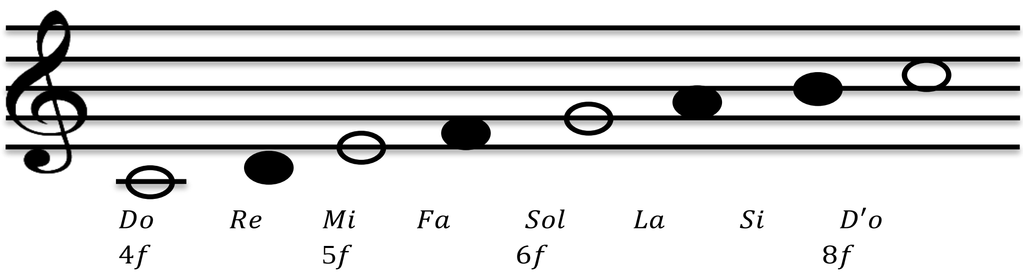


Figura 20: Pentagrama

$$\frac{f_{Sol}}{f_{Do}} = \frac{3}{2} \text{ Llamado Intervalo de quinta justa}$$

$$\frac{f_{Mi}}{f_{Do}} = \frac{5}{4} \text{ Llamado Intervalo de tercera mayor}$$

$$\frac{f_{D'o}}{f_{Do}} = 2 \text{ Llamado Intervalo de octava}$$

Los anteriores cocientes dan como resultado fracciones enteras, a estos intervalos se les denomina consonancias máximas, llamados así porque para el oído humano, cuando tocamos al tiempo las dos notas de cualquier intervalo de estos, son los que más agradable suenan al oído.

En la siguiente tabla se muestran los tipos de intervalos que existen y la proporción que hay en frecuencias en cada intervalo.

Intervalo	**Relación de frecuencias**	**Numero de semitonos**	**Ejemplo sobre la tónica (Do_4 de la escala)**
Octava justa	2/1	12	Do(522)/Do(261)
Quinta mayor	3/2	7	Sol(391)/Do(261)
Cuarta menor	4/3	5	Fa(349)/Do(261)
Tercera mayor	5/4	4	Mi(329)/Do(261)
Sexta mayor	5/3	9	La(440)/Do(261)
Tercera menor	6/5	3	Mib(311,1)/Do(261)
Sexta menor	8/5	8	Sib(466)/Do(261)

Tabla 6

3.5 Construcción de las escalas a partir de las relaciones aritméticas entre sus frecuencias

3.5.1 Escala de Zarlino

También llamada la escala de Aristógenes, escala de los físicos y escala de la justa entonación. Esta escala se construye a partir de las relaciones entre las frecuencias vistas anteriormente y de las consonancias máximas. Consideremos los siguientes pentagramas **(figuras 20 y 21).**

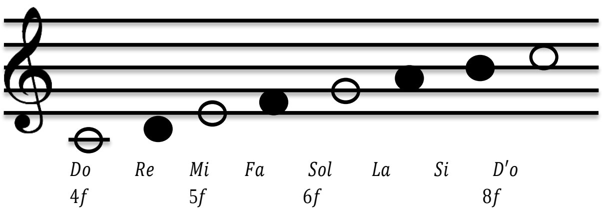


Figura 22

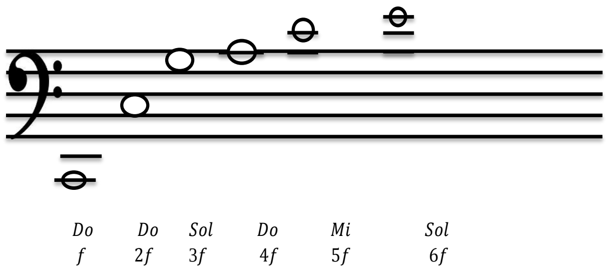


Figura 21

De la figura 21, tomamos al Do el cual le corresponde una frecuencia de $4f$ a partir del primer Do que se ve en la figura 7, y lo denominaremos como Do_3. Recordemos algunas de las relaciones entre las frecuencias de las notas musicales que vimos anteriormente:

$$Do_3 - Mi_3 = \frac{5f}{4f} = \frac{5}{4} \quad tercera\ mayor, \ \ 2\ tonos$$

$$Do_3 - Sol_3 = \frac{6f}{4f} = \frac{3}{2} \quad quinta\ justa, \qquad 3\frac{1}{2}\ tonos$$

$$Sol_3 - Do_4 = \frac{8f}{6f} = \frac{4}{3} \ \ cuarta\ justa, \qquad 2\frac{1}{2} tonos$$

$$Mi_3 - Sol_3 = \frac{6f}{5f} = \frac{6}{5} \ \ tercera\ menor, \qquad 1\frac{1}{2} tonos$$

$$Do_3 - Do_4 = \frac{8f}{4f} = 2 \ \ octava, \quad 6\ tonos$$

Estas relaciones son las que encontramos en la tabla 2; una vez más queremos hacer notar que este tipo de relaciones dan como resultado números semi-enteros. La idea es que a partir de estas relaciones podamos definir las que faltan en el pentagrama de la figura 21, y así completar la escala. Por ejemplo, podemos notar como la relación de las frecuencias entre Do_3 y Fa_3 es la misma que la que hay entre Sol_3 y Do_4 ya que el número de tonos que los separa es igual para la 2 relaciones; por lo tanto:

$$Do_3 - Fa_3 = \frac{4}{3} \ \ cuarta\ justa$$

Los restantes intervalos se pueden deducir fácilmente, teniendo en cuenta que los intervalos se pueden considerar como la suma de otros dos. Así:

$$Do_3 - Re_4 = Do_3 - Sl_3 + Sol_3 - Re_4$$

$$\frac{Re_4 f}{Do_3 f} = \frac{Sol_3 f}{Do_3 f} \times \frac{Re_4 f}{Sol_3 f} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

El 3/2 correspondiente a la relación entre la frecuencia de la nota Re_4 y la nota Sol_3 es porque ellas cumplen la misma relación de la quinta justa. Al igual que Sol_3 y Do_3. Todavía nos falta establecer la relación entre $Do_3 - Re_3$, lo único que hace falta es dividir el resultado en 2, ya $Re_4 f = 2Re_3 f$, por lo tanto

$$Do_3 - Re_4 = \frac{9}{8}$$

De forma análoga podemos establecer las otras relaciones, así, la relación entre Do_3 y La_3 es:

$$Do_3 - La_3 = Do_3 - Mi_3 + Mi_3 - La_3$$

$$\frac{La_3 f}{Do_3 f} = \frac{Mi_3 f}{Do_3 f} \times \frac{Mi_3 f}{La_3 f} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

El lector puede encontrar la última relación entre la nota Do_3 y la nota Si_3 de la misma forma que hicimos con los anteriores intervalos. En el siguiente pentagrama se representan los valores de los intervalos según el método empleado que forman todas las notas con la nota Do_3.

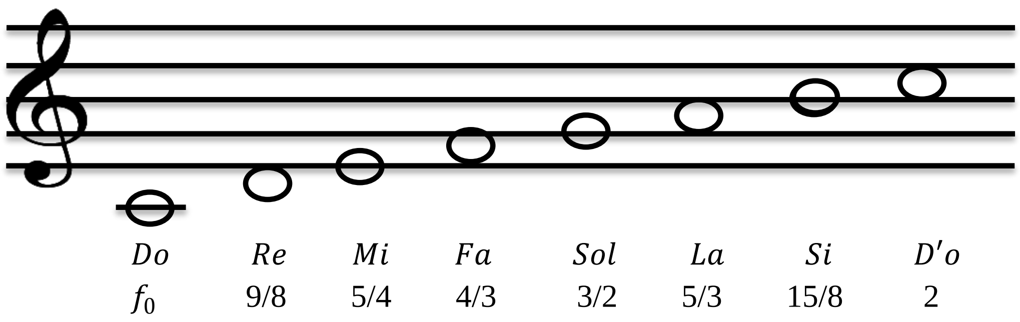


Figura 23: Intervalos establecidos a partir del método de Zarlino

Podemos establecer además, la relación que guarda cada nota con la anterior, por ejemplo:

$$\frac{Mi_3 f}{Re_3 f} = \frac{Mi_3 f / Do_3 f}{Re_3 f / Do_3 f} = \frac{5/4}{9/8} = \frac{10}{9}$$

Procediendo de igual manera se obtienen los intervalos restantes.

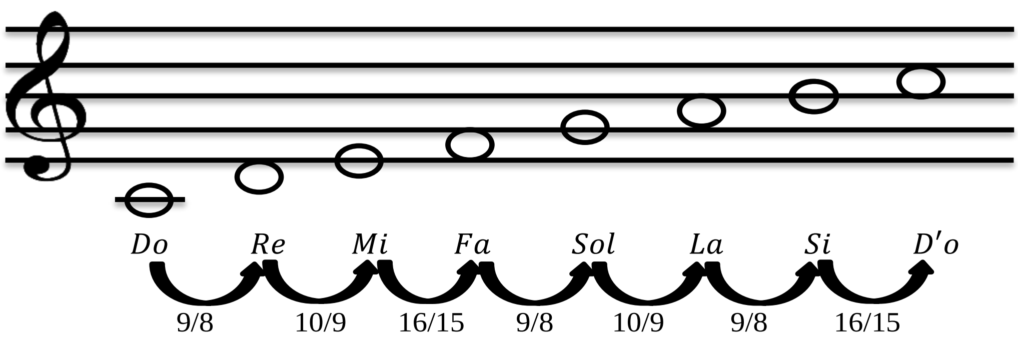


Figura 24

Los intervalos que son de 1 semitono, como $Mi - Fa$ o $Si - Do$, cumplen la misma relación; sin embargo todos los otros intervalos de 1 tono no son iguales, como lo vemos en el hecho de que unos cumplen una relación de 9/8 y los otros una relación de 10/9, esto causo muchos problemas de afinación en la edad media y parte del renacimiento, hasta que la escala temperada soluciono estos inconvenientes de afinación, más adelante hablaremos de esta escala.

3.5.2 Escala Pitagórica

La construcción de la escala pitagórica, o afinación pitagórica, se basa en los intervalos de quinta justa, ya que tradicionalmente este intervalo es el más consonante, después del intervalo de octava. Recordemos que el intervalo de quinta cumple la relación de 3/2; por ejemplo, el intervalo entre Do_4 y Sol_4 es un intervalo de quinta justa, así:

$$\frac{fSol_4}{fDo_4} = \frac{3}{2}$$

Esta relación se cumple para cualquier intervalo de quinta, ya sea que las notas varíen, por ejemplo el intervalo Sol_4 y Re_5 cumplen la misma relación de 3/2.

De están forma podemos obtener la relación, o le intervalo entre Do_4 y Re_4:

$$\frac{fRe_5}{fDo_4} = \frac{fSol_4}{fDo_4} \times \frac{fRe_5}{fSol_4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Ahora dividimos entre 2 para obtener la relación entre Do_4 y Re_4:

$$\frac{fRe_4}{fDo_4} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Con el valor obtenido, y el método de quintas, podemos proceder de igual manera para obtener la relación o intervalo entre Do_4 y cualquier otra nota, por ejemplo Do_4 y La_4:

$$\frac{fLa_4}{fDo_4} = \frac{fLa_4}{fRe_4} \times \frac{fRe_4}{fDo_4} = \frac{3}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$$

En la **figura 24** se muestran las relaciones, o intervalos, de la frecuencia de la nota Do_4 con las demás notas musicales, deducidas a partir del método del ciclo de las quintas justas.

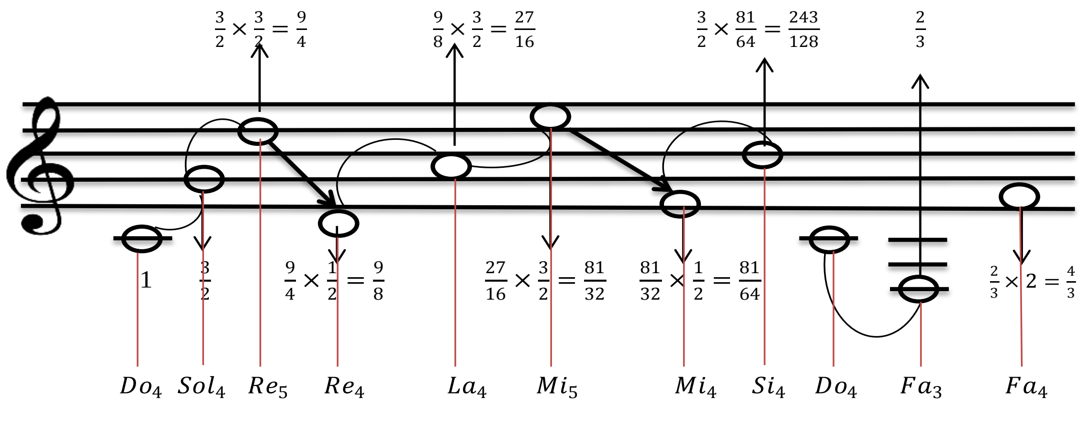


Figura 25

Ordenando los sonidos obtenemos la escala pitagórica, mostrando los valores que resultan de los intervalos entre Do_4 y las demás notas musicales **(figura 25).**

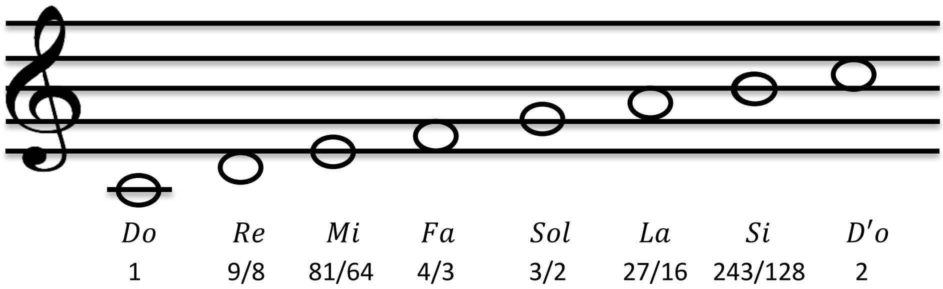


Figura 26

Ahora procedemos a determinar el valor de los intervalos entre notas vecinas:

$$Do_4 - Re_4 = \frac{9}{8}$$

$$Re_4 - Mi_4 = \frac{fMi_4}{fDo_4} \times \frac{fDo_4}{fRe_4} = \frac{81}{64} \times \frac{8}{9} = \frac{9}{8}$$

De la misma forma se obtiene los intervalos entre notas musicales vecinas.

Intervalo	**Relación**
$Do - Re$	9/8
$Re - Mi$	9/8
$Mi - Fa$	256/243
$Fa - Sol$	9/8
$Sol - La$	9/8
$La - Si$	9/8
$Si - Do$	256/243

Tabla 7

El intervalo de 9/8 so conoce como el tono pitagórico, y el intervalo 243/256 se conoce como el semitono pitagórico. Para finalizar mostramos un cuadro comparativo de valores obtenidos para los distintos intervalos, según ambas escalas.

Denominación de los intervalos		Intervalo formado con la tónica		Intervalo formado con la nota anterior	
	Nota	**Aristógenes**	**Pitágoras**	**Aristógenes**	**Pitágoras**
Tónica	DO	1	1	-	-
$\mathbf{2^a}$ **ascendente**	RE	9/8	9/8	9/8	9/8
$\mathbf{3^a}$ **ascendente**	MI	5/4	81/64	10/9	9/8
$\mathbf{4^a}$ **ascendente**	FA	4/3	4/3	16/15	256/243
$\mathbf{5^a}$ **ascendente**	SOL	3/2	3/2	9/8	9/8
$\mathbf{6^a}$ **ascendente**	LA	5/3	27/16	10/9	9/8
$\mathbf{7^a}$ **ascendente**	SI	15/8	243/128	9/8	9/8
$\mathbf{8^a}$ **ascendente**	DO	2	2	16/15	256/243

Tabla 8

Si aceptamos el valor de la frecuencia de La_4 como 440Hz, podemos obtener los valores para las frecuencias de cada nota según cada escala.

Por ejemplo, para la escala de Aristógenes, el intervalo $Do_4 - La_4$ es:

$$\frac{fLa_4}{fDo_4} = \frac{5}{3}$$

Entonces tenemos:

$$fDo_4 = fLa_4 \frac{3}{5} = 440Hz \frac{3}{5} = 264Hz$$

La frecuencia de Do_4 para la escala de Aristógenes es de 264Hz. De igual forma procedemos para obtener el valor de Do_4 en la escala pitagórica:

$$\frac{fLa_4}{fDo_4} = \frac{27}{16}$$

$$fDo_4 = fLa_4 \frac{16}{27} = 440Hz \frac{16}{27} = 260{,}740Hz$$

La frecuencia de Do_4 para la escala Pitagórica es de 260,740Hz. En la siguiente tabla mostramos los valores de las frecuencias asociadas a cada nota según la escala en la que estemos, de Aristógenes (también llamada escala de Zarlino), o pitagórica.

Nota	Aristógenes (Hz)	Pitagórica (Hz)
$\boldsymbol{Do_4}$	264	260,74
$\boldsymbol{Re_4}$	297	293.33
$\boldsymbol{Mi_4}$	330	330
$\boldsymbol{Fa_4}$	352	347,65
$\boldsymbol{Sol_4}$	396	391,11
$\boldsymbol{La_4}$	440	440
$\boldsymbol{Si_4}$	495	495
$\boldsymbol{Do_5}$	528	521,48

Tabla 9

Cabe aclarar que estos valores de frecuencia son para una octava en especial, a saber la escala central del piano, que es indicada el sufijo 4. Sin embargo, el lector puede preguntarse sobre las frecuencias de las notas de otras octavas, por ejemplo Do_3 o Re_2, es fácil obtener el valor de las notas de cualquier octava que queramos, simplemente con multiplicar el valor de la nota musical, que aparece en la tabla 5, por dos para pasar a la octava de arriba, o dividir por dos para pasar a la octava de abajo. Por ejemplo, si queremos conocer el valor de Do_3 en la escala de Aristógenes, simplemente dividimos el valor de Do_4 entre dos el cual nos da como resultado 132Hz.

Las dos escalas mencionadas fueron la base fundamental para la afinación de instrumentos en la edad media y parte del renacimiento. Sin embargo, ellas presentaban problemas de afinación en muchos instrumentos, además, eran inadecuadas a la hora de interpretar obras musicales ya que cuando se ascendía y descendía en alguna melodía, no se llegaba a la misma nota en que se inició, lo cual daba una percepción de desafinación y generaba malestar en los intérpretes (Tomasini M. C., 2010). Después de varios años, se logró resolver este inconveniente con la aparición de la escala *temperada*, la cual explicaremos a continuación.

3.6 Escala cromática bien temperada o diatónica

Construida por el alemán ERNEST CHALDNI y finalizada y a probada por el gran músico alemán JOHANN SEBASTIAN BACH en el siglo XVIII. Esta escala nace con el propósito de arreglar las dificultades de afinación que proporcionaban las escalas pitagóricas y de Aristógenes (también llamada la escala de Zarlino) en los diferentes instrumentos musicales y, además, permite escribir una obra o pieza musical en cualquier tonalidad sin ningún problema de afinación.

Esta escala está constituida por intervalo constante que es el semitono, que constituye la unidad mínima de la escala cromática temperada. Recordemos que el semitono es la distancia que hay (hablando en términos musicales) entre una nota y su alteración, es decir, entre la nota su vecina inmediata, por ejemplo el semitono constituido entre Do y

$Do\#$. Recordemos que el nombre de semitono viene del hecho de que entre Do y Re, por ejemplo (o entre dos notas que tengan la distancia de un tono) hay una nota musical intermedia que es $Do\#$ (o también llamada Reb).

El valor de todos los semitonos es siempre el mismo y es $\boldsymbol{\sqrt[12]{2}}$**,** el cual se suele denominar con el símbolo $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa). Esta escala no contiene los intervalos perfectos que aparecen en la escala Pitagórica o de Zarlino, sin embargo, los valores obtenidos son muy cercanos a estos intervalos. A continuación mostraremos la demostración matemática para obtener el valor $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\sqrt[12]{2}}$)**;** también mostraremos como con este valor podemos obtener los valores de las frecuencias asociadas a cada nota musical en cualquier escala.

Primero debemos tener dos consideraciones, que ya mencionamos antes: la escala cromática temperada tiene 12 notas musicales y por ende 12 semitonos, y el valor de los doce semitonos es el mismo, por lo tanto

$$\frac{fDo}{fDo\#}=\frac{fDo\#}{fRe}=\frac{fRe}{fRe\#}=\frac{fRe\#}{fMi}=\frac{fMi}{fFa}=\frac{fFa}{fFa\#}=\frac{fFa\#}{fSol}=\frac{fSol}{fSol\#}=\frac{fSol\#}{fLa}=\frac{fLa}{fLa\#}=\frac{fLa\#}{fSi}=\frac{fSi}{fDo_1}$$

Donde $fDo, f\ Do\#, fRe, \ldots$ representa la frecuencia a la que suena cada nota, y Do_1 es la nota en donde comienza la siguiente octava o escala, por lo tanto

$$\frac{fDo}{fDo_1}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{fDo\#}=\frac{fDo\#}{fRe}=\frac{fRe}{fRe\#}=\frac{fRe\#}{fMi}=\frac{fMi}{fFa}=\frac{fFa}{fFa\#}=\frac{fFa\#}{fSol}=\frac{fSol}{fSol\#}=\frac{fSol\#}{fLa}=\frac{fLa}{fLa\#}=\frac{fLa\#}{fSi}=\frac{fSi}{2}$$

Tomamos el primer y segundo término de la ecuación anterior

$$\frac{1}{fDo\#}=\frac{fDo\#}{fRe}\rightarrow\ fRe=fDo\#^2$$

Remplazamos es el tercer término e igualamos nuevamente al primero

$$\frac{1}{fDo\#}=\frac{fRe}{fRe\#}=\frac{fDo\#^2}{fRe\#}\rightarrow fRe\#=fDo\#^3$$

Remplazamos este valor en el cuarto término y nuevamente igualamos al primero

$$\frac{1}{fDo\#} = \frac{fRe\#}{fMi} = \frac{fDo\#^3}{fMi} \rightarrow \ fMi = fDo\#^4$$

Repetimos este proceso hasta llegar al último término,

$$fSi = fDo\#^{11}$$

Ahora consideramos el primer y último término

$$\frac{fDo}{fDo\#} = \frac{fSi}{fDo_1}$$

$$\frac{1}{fDo\#} = \frac{fSi}{2} \rightarrow \frac{1}{fDo\#} = \frac{fDo\#^{11}}{2}$$

De esta forma llegamos a

$$fDo\#^{12} = 2 \rightarrow \ fDo\# = \sqrt[12]{2} \cong 1{,}0594631$$

Por tanto el valor del intervalo de semitono es:

$$\frac{1}{fDo\#} = \frac{1}{\boldsymbol{\sqrt[12]{2}}}$$

Con este valor podemos obtener el valor de la frecuencia asociado cada nota en cualquier escala. Por ejemplo, si tomamos el valor de la frecuencia de la nota La_4 de referencia, que es de 440Hz tenemos:

$$\frac{fLa_4}{fLa\#} = \frac{1}{\boldsymbol{\sqrt[12]{2}}}$$

Recordando que el valor del intervalo semitono es igual para todos

$$fLa\#_4 = fla_4 \boldsymbol{\sqrt[12]{2}} = 440Hz \cdot \sqrt[12]{2} \cong 466{,}16Hz$$

Ahora calculemos fSi_4

$$\frac{fLa\#_4}{fSi_4} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Teniendo en cuenta la solución para $fLa\#_4$ tenemos

$$\frac{fLa\#_4}{fSi_4} = \frac{fla_4 \sqrt[12]{2}}{fSi_4} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

$$fSi_4 = \ fla_4 \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} = fla_4\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,2} \cong 493{,}88Hz$$

Ahora calculemos la frecuencia de notas musicales que se encuentran debajo de La_4, por ejemplo $fSol\#_4$

$$\frac{fSol\#_4}{fLa_4} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

$$fSol\#_4 = fLa_4\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-1} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-1} \cong 415{,}30Hz$$

Ahora calculamos $fSol_4$

$$\frac{fSol_4}{fSol\#_4} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \rightarrow fSol_4 = fSol\#_4\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-2} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-2} \cong 392{,}00Hz$$

En resumen, si tomamos como referencia a fLa_4 y continuamos con este proceso obtenemos cualquier nota musical de la siguiente forma: tomamos como referencia $fLa_4 = 440Hz$ de este modo $fLa_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,0} = 440Hz$; para calcular notas con superiores, o con frecuencia mayor, a fLa_4 se hará con la siguiente formula

$$f_{nota} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,n}$$

Donde $n = 1{,}2{,}3{,}4$ ... es decir $n \in Z\ positivos$

A si, por ejemplo

$$fSi_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,2}$$

$$fDo_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,3}$$

$$fRe_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,5}$$

Para calcular la frecuencia de notas musicales que se encuentran por debajo de fLa_4 se procede a solucionar la siguiente ecuación

$$f_{nota} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-n}$$

A si por ejemplo

$$fSol_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-2}$$

$$fFa_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-4}$$

$$fMi_4 = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\,-5}$$

Podemos generalizar un poco más las ecuaciones anteriores y dejar una sola ecuación

$$f_{nota} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n} \, donde \quad -36 \leq \; n \leq 86$$

El intervalo $-36 \leq \; n \leq 86$ es debido al rango de frecuencias que el ser humano puede escuchar. En la siguiente tabla mostramos algunos valores de frecuencias de las notas musicales correspondientes a la escala central del piano y como se obtienen aplicando la ecuación anterior.

Nota	Frecuencia (Hz)	
$\boldsymbol{Do_4}$	261,63	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-9}$
$\boldsymbol{Do\#_4}$	277,18	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-8}$
$\boldsymbol{Re_4}$	293,66	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7}$
$\boldsymbol{Re\#_4}$	311,13	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-6}$
$\boldsymbol{Mi_4}$	329,63	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-5}$
$\boldsymbol{Fa_4}$	349,23	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-4}$
$\boldsymbol{Fa\#_4}$	369,99	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3}$
$\boldsymbol{Sol_4}$	392,00	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-2}$
$\boldsymbol{Sol\#_4}$	415,3	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-1}$
$\boldsymbol{La_4}$	440,00	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{0}$
$\boldsymbol{La\#_4}$	466,16	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{1}$
$\boldsymbol{Si_4}$	493,88	$440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}$

Tabla 10

Es un hecho notable el que las matemáticas y la física, en especial los conceptos de los modos normales de vibración de las cuerdas, contribuyan de gran manera a la construcción y constitución de las bases de la teoría musical. Esto es debido a la falta de interdisciplinaridad entre las áreas del conocimiento en la actualidad, lo que hace pensar que dos áreas del conocimiento, como la física y la música, no tenga que ver entre si. Lo expuesto anteriormente nos muestra una contradicción en torno a esa visión fragmentada que se tiene en torno a la forma como se piensa la construcción conocimiento, por el contrario, nos muestra como unos conceptos desarrollados por un saber en particular, en nuestro caso la física, contribuyan a la construcción y comprensión de otra área del saber, que aunque parezcan que una no tiene que ver con la otra, realmente están muy relacionadas.

Conclusiones

La intención de este documento es mostrar que es posible Integrar varias áreas del conocimiento, en este caso la física y la música, para evidenciar, que si bien todas ellas trabajan de forma independiente entre sí, el conocimiento no es fragmentado y es posible establecer relaciones entre ellas que posibiliten su comprensión.

La anterior conclusión nos lleva a pensar en la posibilidad de establecer estrategias que posibiliten la enseñanza de las ondas sonoras, tanto en la escuela como en cursos introductorias de física en la universidad, en donde se establezca relaciones entre la física y la música, ya que esta última hace parte esencial de los seres humanos en los diferentes contextos culturales.

La armonía musical, componente fundamental de toda la teoría musical, sienta sus bases en las relaciones aritméticas entre frecuencias y longitudes de una cuerda tensa; dichas relaciones son fracciones enteras, y de ellas nacen los intervalos musicales y las escalas musicales. Dicho trabajo propuesto por primera vez por Pitágoras[8].

La forma como el oído humano percibe las elaciones entre 2 o más sonidos es a través de las proporciones y no como una suma de sonidos; esto se evidencia en el hecho en que la relación entre dos sonidos de una escala, para el oído, son iguales si estos sonidos se les duplica su frecuencia, es decir, se interpretan dichos sonidos pero con una octava arriba.

La escala temperada, es una escala evolución de la escala de Zarlino y la escala Pitagórica. Esta evolución es consecuencia de los problemas de afinación de los instrumentos en la época del renacimiento. La escala temperada resuelves estos problemas de afinación a través de la concepción de los semitonos iguales. El valor del semitono en la escala temperada es $1{,}0594631$. La ecuación con la cual podemos calcular la frecuencia asociada a cualquier nota musical es:

$$f_{nota} = 440Hz\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n}\ donde \quad -36 \leq\ n \leq 86$$

Por otro lado, cabe resaltar que en un principio, la propuesta de trabajo fue ambiciosa en el sentido de los objetivos propuestos, ya que la intención final era diseñar un modulo de enseñanza en base a la relación Física y música; Sin embargo, el rumbo de la investigación se encamino a la descripción de la armonía clásica, ya que este tema tomó bastante trabajo.

Creemos que este trabajo es pionero en el sentido de que no existen investigaciones de este tipo en el departamento de física de la Universidad Pedagógica Nacional, y aunque no logramos concluir con alguna propuesta para la enseñanza de la física, este trabajo queda abierto a muchas propuestas y puede servir como guía para posteriores trabajos

[8] Juan miguel Campanario: *Fundamentos físicos de la música*

que estén encaminados a la enseñanza de la física en relación a la música, o trabajos encaminados a relacionar estas dos áreas del conocimiento.

Bibliografía

Adriana Rabino, P. C. (2006). OTRA COSA ES CON GUITARRA......AFINADA.

Ballesteros, I. R. (2013). Descripcion Fisca De la Armonia Musical, una propuesta para la enseñanza de las ondas sonoras. *Universidad Pedagogica Nacional*.

Bravo, S., & Pesa, M. y. (2009). REPRESENTACIONES DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS SOBRE PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS. *Investigación didáctica*.

Crawford, F. (1994). *WAVES, Berkeley physics cours.* Barcelona: Reverté.

Edwin Fabian Mayorga, Ismael Rodriguez. (2013). ANÁLISIS DE UNA SEÑAL SÍSMICA Y SONORA, APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER EN LA ENSEÑANZA DE LAS ONDAS. *Universidad Pedagogica Nacional*.

French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas.* Barcelona: REVERTÉ.

Fuente, J. L. (s.f.). leyes fisicas de la acustica musical.

Gamow, G. (1971). *Biografia de la fisica* . Salvat Editores.

Helmholtz, H. (1954). *On the sensations of tone.* New York: Dover Publications .

herran, J. d. (2006). La fiísica y la música.

Jessica Londoño, Ismael Rodriguez. (2013). LA ESTRATEGIA DE PENSAMIENTO DE LO SIMPLE PARA EXPLICAR LO COMPLEJO EN FI´SICA, A TRAVE´ S DE LAS NOCIONES DE MODOS NORMALES Y ESTADOS BASE. *Universidad Pedagogica Nacional*.

lex, T. C. (2002). *Who is Fourier* . Boston: Language Research foundation.

María Mercedes Ayala, F. M. (s.f.). *EL TENSOR DE ESFUERZOA: Un analisis epistemologico desde una perspectiva pedagogica.* Universidad Pedagogica Nacional.

Pacca, G. U.-J. (s.f.). ANALOGICAL REASONING AND MEANINGFUL LEARNING. A DISCUSSION ABOUT THE USE OF ANALOGIES IN TEACHING THE.

R, M., & Rafel, J. (2010). la musica de las esferas traditio y el canon astronomico-musical de Kepler . *ciencias*, 4-15.

Raino, A. (2006). otra cosa es con guitarra afinada.

Raymond Serway, J. J. (2008). *Fisica para ciencias e Ingenierias.* Mexico D.F.: CENGAGE learning.

Rodriguez, W. (2011). *El efecto Volta un fenomeno imprecindible para comprender el funcionamiento de una pila.* Bogota: Universidad pedagogica nacional.

S. Diago, M. H. (2012). El Método de Galileo: El estudio de la caída de los cuerpos a través de la música. *Universidad Pedagogica Nacional*.

Sierpes, S. D. (s.f.). Relacion entre la fuerza de tension y afinacion, aplicada a una cuerda de guitarra.

Spiegel, M. (1974). *Fourier Analisys* . New york: Mcgraw Hill.

Stolik, D. (2005). EL APORTE DE LOS FÍSICOS AL DESARROLLO DE LA MÚSICA. *REVISTA CUBANA DE FÍSICA.*

Tomasini, M. C. (2010). Fundamentos matematicos de la escala musical y sus raices Pitagoricas.

ANEXOS

Anexo 1: Modos normales de oscilación en cuerdas

Introducción:

Dentro del estudio de sistema oscilatorio y las ondas, es frecuente encontrar un término que no es claro del todo, los modos normales de vibración. Este concepto se presenta en sistemas de osciladores acoplados como péndulos unidos por resortes, pero también se aplica a medios continuos como cuerdas, membranas y ondas sonoras en tubos. ¿Porque se aplica para los dos tipos de sistemas? En este documento se verá como un medio continuo como una cuerda se puede considerar como una colección finita de partículas y poder hablar de los modos normales de vibraciones. Será importante hacer este puente entre sistemas discretos y continuos para hablar de la onda como una perturbación que se repite en el espacio y el tiempo.

¿Que son los modos normales de vibración?

Antes de entrar al análisis de la cuerda y sus modos de vibración, creo necesario hablar de lo que significa los modos normales de vibración con u sistema acoplado sencillo: péndulos unidos por resortes.

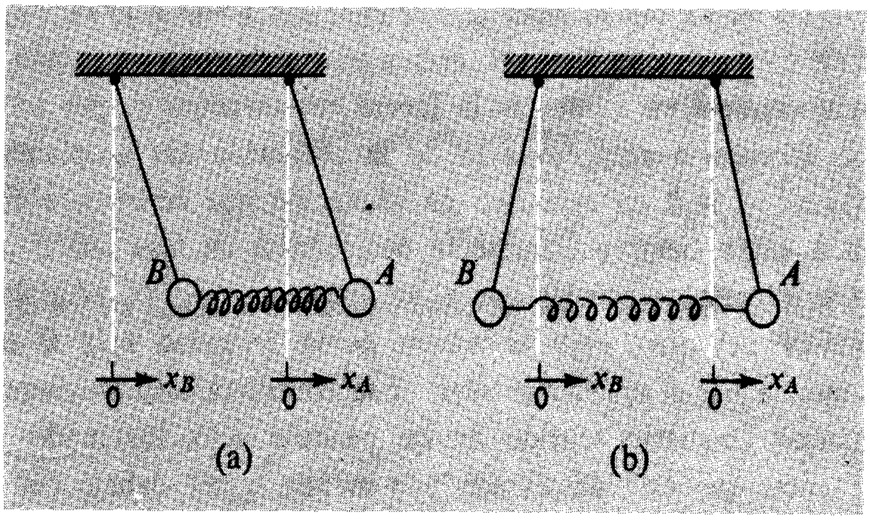


Figura 1: péndulos acoplados por un resorte. Tomada del libro *vibraciones y ondas A.P, French*

Consideremos el sistema planteado en la **figura 1**. Un sistema compuesto por 2 péndulos de idéntica masa ($\boldsymbol{m}$) que se encuentran a la misma posición y sujeto uno con otro por un resorte de constante elástica $\boldsymbol{k}$, los resortes se encuentran separado por una distancia que es igual a la longitud del resorte en equilibrio**.** Si queremos analizar este sistema y encontrar las ecuaciones de movimiento para cada una de las masas, debemos preguntarnos antes ¿Cuántas formas posibles puede vibrar este sistema? ¿Qué condiciones debe tener para que vibre de una forma determinada? Si tuviéramos un péndulo simple, podríamos decir que solo podría moverse de una solo forma, como es la que ya conocemos. Sin embargo el sistema acoplado presenta la dificultad de que su movimiento no resulta obvio.

Sin embargo, no resulta difícil ver que las condiciones iniciales de este sistema pueden ser solamente dos: una en la que alteramos el sistema de tal forma que la amplitud máxima del péndulo $\boldsymbol{A}$ sea de igual valor que del péndulo $\boldsymbol{B}$ y se muevan en la misma dirección, sincronizados **(Figura 1 a)**; es fácil ver que este sistema se comportara como un péndulo simple y que el resorte no se deformara, es decir, no será causa de los cambios de estado en el sistema, solo lo será la fuerza gravitatoria. Si las cuerdas tienen longitud $\boldsymbol{l}$ y el sistema está sometido a la fuerza de gravedad, entonces la ecuación de movimiento para este caso y para cada partícula será:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{donde } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (1)$$

La segunda condición que podemos ver en este sistema es la expuesta en la **Figura 1 b**, en donde los péndulos son movidos al mismo tiempo con igual amplitud pero en direcciones contrarias. En este caso la fuerza de restitución del resorte entra en acción y es parte principal de cambio de estado del sistema. Del diagrama podemos ver que la fuerza que ejerce el resorte sobre el péndulo $\boldsymbol{A}$ es $2kx_A$ y por tanto la ecuación de movimiento del péndulo $\boldsymbol{A}$ es:

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} + \frac{g}{l}x_A + \frac{2k}{m}x_A = 0$$

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} + x_A(\omega_0^2 + \omega_c^2) = 0 \text{ donde } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \; y \; \omega_c^2 = \frac{2k}{m} \qquad (2)$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} + \omega^{2\prime}x_A = 0 \text{ donde } \omega' = (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2} = \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

Vemos que este sistema oscila con una frecuencia mayor que la del caso anterior. Por simetría la ecuación del péndulo ***B*** es idéntica

$$-\frac{d^2x_B}{dt^2} - \omega^{2\prime}x_B = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$x_A = DCos(\omega' t)$$

$$x_B = -DCos(\omega' t)$$

El lector puede pensar que existe otro tipo de movimientos sobre este sistema donde no sea tan simple la deducción de las ecuaciones, sin embargo este tipo de sistema puede considerarse como la ***superposición de los movimientos anteriores.***

Los movimientos anteriores son los más simples que se pueden pensar sobre el sistema y por eso son llamados los ***modos normales de vibración,*** llegamos al significado de dicho término, los modos son los movimientos más simples que puede tener un sistema que está oscilando. Sin embargo, sabemos que en la realidad estos sistemas no se comportan de formas tan simples, pero el análisis de esos complejos movimientos se puede hacer a través de la superposición de estos movimientos simples.

Consideremos el caso más general en la que este sistema puede oscilar.

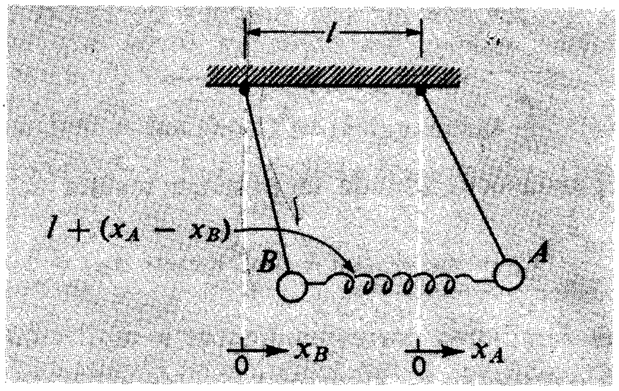


Figura 2: péndulos acoplados por un resorte. Tomada del libro *vibraciones y ondas A.P, French*

El sistema se ha configurado de forma arbitraria como se muestra en la **Figura 2**. En esta configuración el resorte se ha alongado una distancia $x_A - x_B$, por tanto la fuerza que ejerce el resorte sobre el sistema es $k(x_A - x_B)$. De este modo las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} + m\frac{g}{l}\,x_A + k(x_A - x_B) = 0 \qquad (3)$$

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} + \omega_0^2\,x_A + \omega_c^2(x_A - x_B) = 0 \text{ donde } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \; y \; \omega_c^2 = \frac{k}{m}$$

Análogamente, la ecuación para la masa ***B*** es:

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} + \omega_0^2\,x_B - \omega_c^2(x_A - x_B) = 0 \qquad (4)$$

Las ecuaciones 3 y 4 son las ecuaciones que describen por completo el sistemas, estas; notemos como estas ecuaciones tienen los términos de los modos normales de vibración, es decir, que para el caso más general en donde el sistema oscile de forma arbitraria, este esta descrito como la superposición de los movimientos simples analizados anteriormente.

LÍMITE ENTRE SISTEMA DISCRETO Y CONTINUO: OSCILADORES EN UNA CUERDA Y MODOS NORMALES DE VIBRACIÓN DE LA CUERDA

El sistema de la cuerda vibrando ha sido de gran estudio en la mecánica ondulatoria, ya que es considerada una de las fuentes sonoras más populares, hasta el punto de que lo encontramos en muchos instrumentos musicales. En esta sección, trabajaremos la cuerda como una colección discreta de partículas, luego extenderemos al caso en donde esa colección de partículas se vuelve muy grande y así llegaremos al caso especial donde consideramos la cuerda como un medio continuo; hablaremos de los modos normales de vibración en una cuerda, importante para el estudio de las notas musicales en instrumentos como la guitarra o el piano.

Consideremos un conjunto de N partículas sujetas a una cuerda sin masa y con una tensión T como se muestra en la **figura 3.** La primera condición que imponemos sobre este sistema es que ese sujeta, fija en los extremos; el lector podrá notar sobre la figura que el número de partículas va desde 0 hasta $N+1$, sin embargo, dada la condición de los extremos fijos, estas partículas no cuenta ya que estas no poseen movimiento alguno.

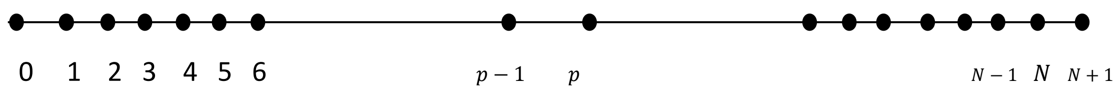


Figura 3: construcción de la cuerda como una colección de puntos

Después de un tiempo $\boldsymbol{t}$ la cuerda se ha dispuesto como se muestra en la **figura 4.** Si nos limitamos a pequeños desplazamientos de la cuerda y si considerábamos una tención inicial T, entonces podemos ignorar cualquier aumento de la tensión en la cuerda cuando las partículas oscilan.

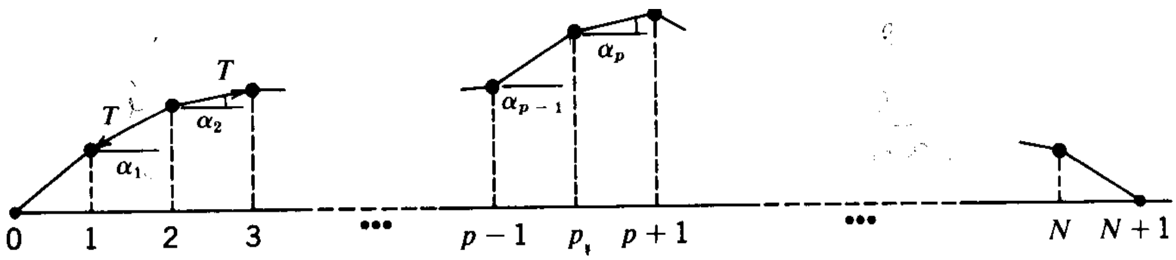


Figura 4

Sea l la separación entré las partículas. Consideremos la partícula p la cual vemos hallar la ecuación de movimiento; en el sistema solo actúa la fuerza de tención en la partícula p que tira de ella en ambas direcciones. Por simetría, es fácil ver que la componente x (la componente horizontal) de la sumatoria de fuerzas se anula. Tenemos:

$$F_y = -TSin(\alpha_{p-1}) + TSin(\alpha_p) \qquad (5)$$

Sea:

$$Sin(\alpha_{p-1}) = \frac{y_p - y_{p-1}}{l}$$

$$Sin(\alpha_p) = \frac{y_{p+1}+y_p}{l}$$

Con estas condiciones tenemos:

$$F_y = -\frac{T}{l}(\ y_p - y_{p-1}) + \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p)$$

Y esta ecuación debe ser igual a la masa de la partícula p multiplicada or la aceleración en la dirección de y; finalmente obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 2y_p\omega_0^2 - \omega_0^2(y_{p-1} + y_{p+1}) = 0 \quad (6)$$

Donde $\omega_0^2 = \frac{T}{ml}$

De esta forma podemos escribir una ecuación para cada una de las N partículas. De esta manera tenemos un sistema de N ecuaciones. Recordemos que $y_0 = 0$ y $y_{N+1} = 0$.

Para ejemplificar, consideremos los casos en que el sistema tiene una y dos partículas. Si $N = 1$ tenemos:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2y_1\omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{2}$$

Que es un movimiento armónico simple transversal de frecuencia $\omega = \omega_0\sqrt{2}$. Si $N = 2$ tenemos:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2y_1\omega_0^2 - \omega_0^2(y_2) = 0\ , \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2y_2\omega_0^2 - \omega_0^2(y_1) = 0 \quad (8)$$

Realizando el tratamiento matemático pertinente, se llega a que las frecuencias de oscilación son $\omega_1 = \omega_0$ y $\omega_2 = \omega_0\sqrt{3}$.

La configuración de estos sistemas se puede ver en la **figura 5,** para el caso de una partícula, el sistema oscila como un péndulo simple, pero con una frecuencia mayor debida a la tención de la cuerda adicional. En el segundo caso, tenemos 2 soluciones, dos movimientos posibles para el caso de 2 partículas, como era de esperarse. Dichos movimientos son los modos normales para estos sistemas.

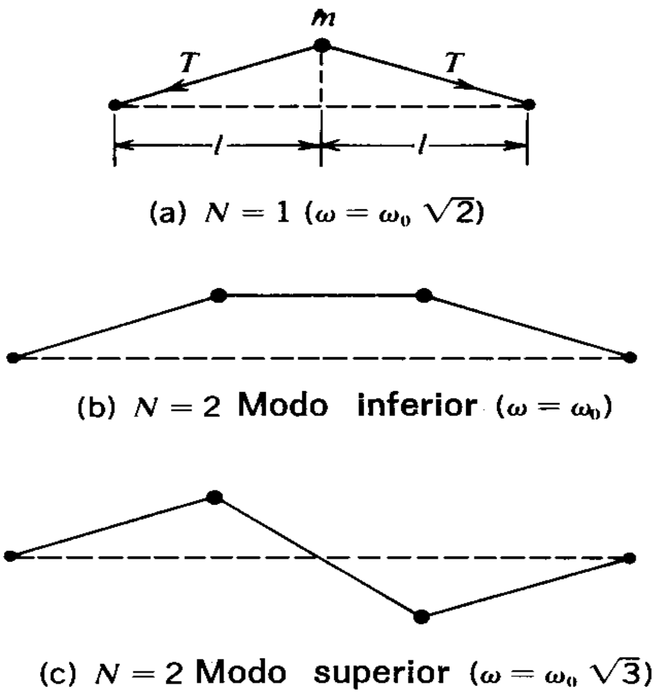


Figura 5

De acuerdo con los dos ejemplos anteriores, surge una pregunta ¿es posible encontrar una expresión matemática que determine todos los modos posibles para un sistema de N partículas? La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Sin embargo hay que aclarar que las ecuaciones que definen los modos normales de vibración son dos: una pre la frecuencia del sistema $\boldsymbol{\omega}$ y otra para la a amplitud de cada particual $\boldsymbol{p}$ del sistema de N partículas, ya que estas definen la forma en la que oscila el sistema. Estas ecuaciones son[9]:

$$\omega_n = 2\omega_0 Sen\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \qquad (9)$$

$$A_n = C_n Sen\left[\frac{pn\pi}{(N+1)}\right] \qquad (10)$$

Donde C_n define la amplitud con la que esta excitado el modo particular n, n son los modos de vibración, p es la particula que hace parte del sistema y N el número de partículas total del sistema. Es fácil ver, para el lector, que si toma los ejemplos anteriores donde $N = 1$ y $N = 2$ y metemos estos datos en la ecuación **9**, obtendrá los mismos resultados.

A si tenemos las ecuaciones de movimiento para cada partícula $\boldsymbol{p}$ del sistema:

$$y_{pn} = A_{pn} Cos(\omega_n t + \delta_n)$$

[9] Para ver la deducción de estas ecuaciones, ver VIBRACIONES Y ONDAS, A, P French, Curos del MIT.

$$y_{pn} = C_n Sin\left[\frac{np\pi}{(N+1)}\right] Cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad (11)$$

Podemos notar de la ecuación anterior, que el término $Sin\left[\frac{np\pi}{(N+1)}\right]$ es el que determina como está ubicada partícula, el otro término habla de la evolución temporal de cada una de las partículas. Concentrémonos en mirar cómo se disponen las partículas para los 2 primeros modos normales de vibración. Si $n = 1$, entonces:

$$y_{p1} = C_1 Sin\left[\frac{p\pi}{(N+1)}\right] Cos(\omega_1 t)$$

Esta ecuación da como resultado la disposición del sistema que se ve en la **figura 6**

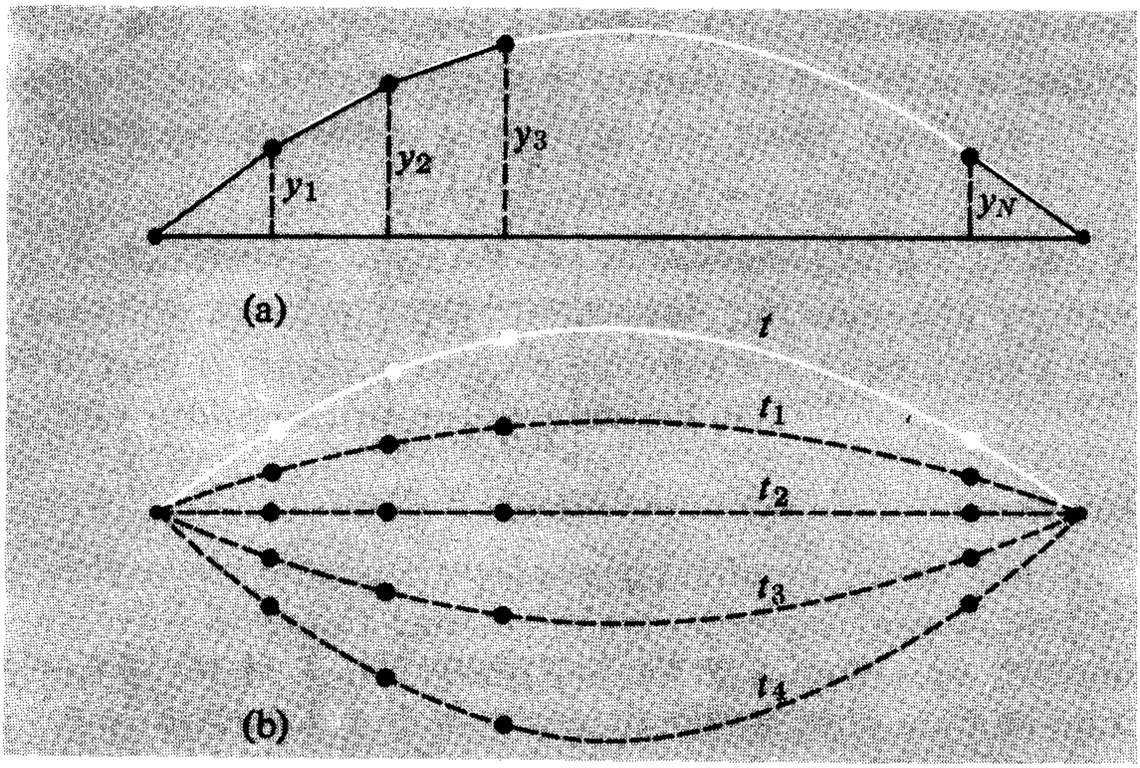


Figura 6

Para $n = 2$ tenemos:

$$y_{p2} = C_2 Sin\left[\frac{2p\pi}{(N+1)}\right] Cos(\omega_2 t)$$

$$\omega_2 = 2\omega_0 Sin\left(\frac{\pi}{N+1}\right)$$

Este sería el segundo modo normal de vibración, el cual se lustra en la **figura 7.** En esta situación la frecuencia se duplica en relación a la primera, y aparece una zona de la cuerda la cual no se mueve, esta zona o punto se llama **nodo.**

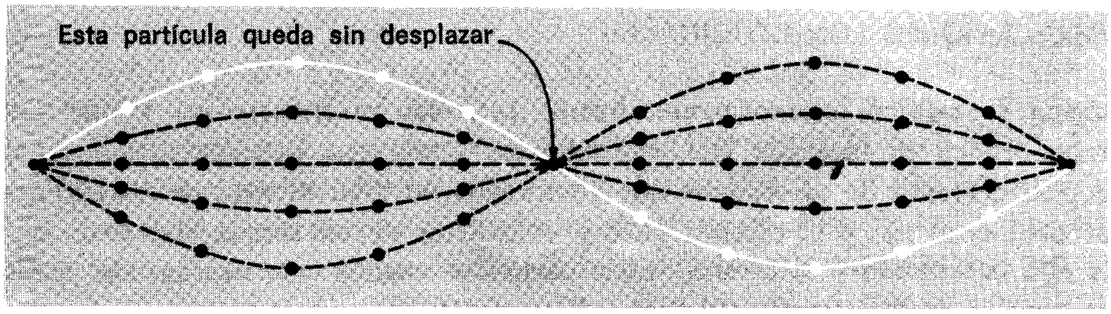
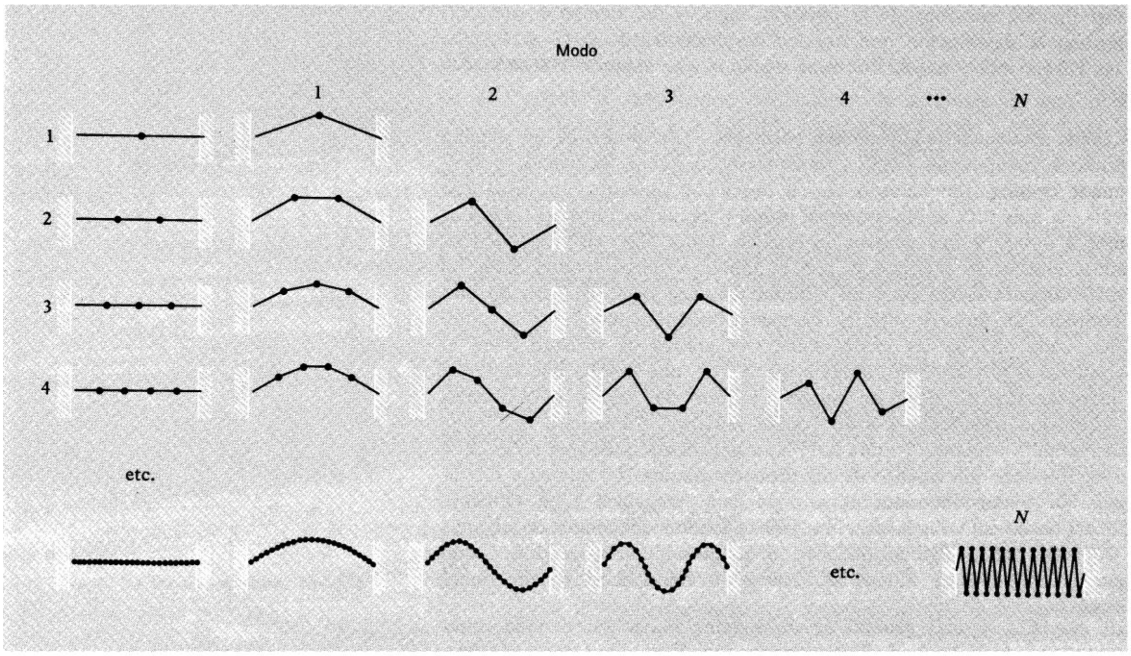


Figura 7

En general si establecemos cierto número de partículas en el sistema, y miramos todos sus modos normales, vemos una seria de formas en la se dispone el sistema, pro como vemos, le número de modos normales depende del número de partículas que se disponen en el sistema.



N MUY GRANDE

Ahora, queremos considerar el siguiente caso; supongamos que el sistema está compuesto por muchas partículas, como una cuerda (precisamente, una cuerda es una colección de un gran número de partículas). Si el número de partículas es muy grande, el espacio l entre ellas es muy corto de modo que:

$$L = \sum_{i=1}^{N+1} l_i$$

La cantidad de materia total de la cuerda seria $M = Nm$ donde, m es la masa de cada partícula. Recordando que $\omega_0^2 = \frac{T}{ml}$, tenemos:

$$Sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \approx \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

$$\omega_n = 2\omega_0\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{n\pi}{(N+1)}\sqrt{\frac{T}{ml}}$$

Considerando $\mu = \frac{m}{l}$ la densidad lineal, y realizando algunas operaciones, tenemos:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{(N+1)l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad ,n = 1,2,3 \ldots. \qquad (12)$$

Llegamos a un resultado bien partículas, la ecuación anterior define los ***modos normales de vibración de la cuerda.*** Podemos mirar el primer modo normal:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1,2,3 \ldots.$$

Y los otros modos, son múltiplos enteros de esta, la cual es llamada el armónico fundamental de la cuerda.

La función que define la forma de vibrar de la cuerda quedaría de la forma:

$$y_{pn}(t) = C_n\, Sin\left(\frac{np\pi}{(N+1)}\right) Cos(\omega_n t)$$

Ahora, sea x la posición de la partícula con respecto al origen, de modo que $x = pl$:

$$y_n(x,t) = C_n\, Sin\left(\frac{lnp\pi}{l(N+1)}\right) Cos(\omega_n t) = C_n\, Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) Cos(\omega_n t) \qquad (13)$$

Esta ecuación, se aproxima a la ecuación de onda de la cuerda.

Ondas estacionarias y modos normales de vibración en cuerdas

En el apartado anterior hablamos acerca de lo que significaban los modos normales de vibración en sistemas que se conformaban por un número finito de partículas, y consideramos el caso en donde ese número finito de partículas era muy grande y se disponían de tal forma que parecieran una cuerda (**ver figura 7**). Ahora sabemos que los modos normales son las formas más simples en las cuales un sistema oscilante conformado por varias partículas puede moverse. Ahora vamos a ver los modos normales en curdas, es decir, vamos a pasar del caso discreto al caso continuo, donde el número de partículas es infinito.

Como consideramos que el número de partículas es infinito, entonces estaos hablando de un sistema continuo, y por ende ya no hablamos de oscilaciones si no de **ondas** en cuerda; aparte de esto, para hablar de modos normales en una cuerda, también hay que hablar de ondas estacionarias en cuerdas. Las ondas estacionarias en una cuerda se generan cuando la cuerda está sujeta a los extremos y estos permanecen fijos.

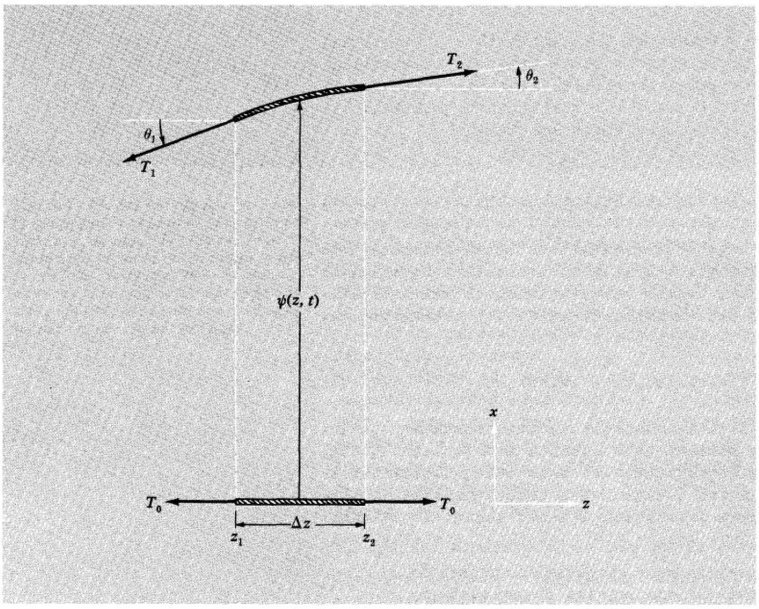


Figura 8

En la **figura 8** se ve un pequeño segmento de recta el cual está sometido a tenciones diferentes en los extremos, estas diferencias de tención son lo que causan el desequilibrio en la cuerda y por ende una fuerza neta que actúa en ella[10], esto provoca una perturbación en la cuerda que viaja a través de ella y se refleja en sus extremos. La ecuación que describe el movimiento es[11]:

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} \qquad (14)$$

Donde $\varphi(x,t)$ es denominado la función de estado para la cuerda (ya que ella da la forma de la cuerda en un tiempo dado t), t es el tiempo, x la posición y v la velocidad

[10] Para una mejor definición de tensión véase: EL TENSOR DE ESFUERZOS, UN ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DESDE UNA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA. M. AYALA, F. MALAGON, I. GAZON, J. CASTILLO, M. GARZON. Universidad Pedagógica Nacional.

[11] Para ver la demostración, véase: ONDAS, Berkeley physics cours-volumen 3. Frank S. Crawford

de propagación de la onda en la cuerda, y viene dado por $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. La anterior ecuación es denominada *la ecuación de onda unidimensional o ecuación clásica de la cuerda*.

En una onda estacionaria, todas las partículas constituyentes del medio, están oscilando a la misa frecuencia y por tanto $\varphi(x,t)$ oscila de la misma forma temporal $Cos(\omega t)$, por tanto la forma de la onda la da una función que solo va depender de la posición de cada punto sobre la cuerda, una función $f(x)$. De esta forma, una solución de la ecuación 14 se puede expresar como:

$$\varphi(x,t) = f(x)\, Cos(\omega t)$$

Esta solución debe satisfacer la ecuación 14, por tanto vamos a encontrar la segunda derivada de $\varphi(x,t)$ respecto al tiempo:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\, \varphi(x,t) = -\omega^2\, f(x)\, Cos(\omega t)$$

Ahora determinamos la segunda derivada respecto al espacio:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} Cos(\omega t)$$

Si sustituimos en la ecuación 14 y desarrollamos los cálculos tenemos:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f(x)$$

De lo cual llegamos a la solución:

$$f(x) = ASin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + BCos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Y llegamos a la solución:

$$\varphi(x,t) = \ Cos(\omega t)\left[ASin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + BCos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right] \qquad (15)$$

La ecuación 15 es la ecuación de onda general para una cuerda. Sin embargo no hemos introducido las condiciones de frontera que establece el caso de las ondas estacionarios; la condición establece que la cuerda no se mueve en los extremos y por tanto $\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0$. De la primera condiciones obtenemos lo siguiente:

$$\varphi(x,t) = A\, Cos(\omega t) Sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

La segunda condición establece que $\varphi(L,t) = 0$, esto solo es posible si $Sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$; para que esto se cumpla, el argumento de la función siempre debe ser π o un múltiplo entero de π, es decir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\,\pi \quad (16)$$

Y por tanto llegamos a la relación:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (17)$$

Donde $n = 1,2,3 \ldots$

La ecuación 17 establece lo que se llama los modos normales de vibración en las cuerdas; por ejemplo: cuando $n = 1$, la longitud de onda es el doble de la longitud de la cuerda; cuando $n = 2$, la longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda, en este modo se aprecian 2 valles y un nodo. Sucesivamente, remplazando n por el con junto de los números enteros, se establecen las posibles formas en la cual la cuerda se encuentra vibrando **(ver figura 10)**.

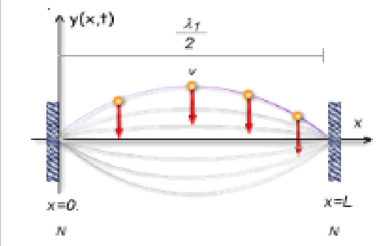
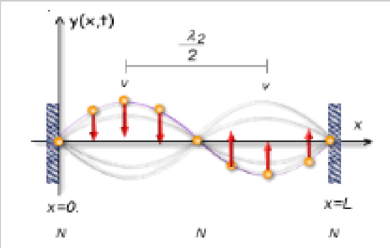
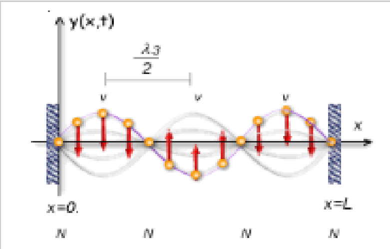
N� ARMóNICO	PERFIL DEL ARMóNICO	LONGITUDES DE ONDA CONTENIDAS EN L	FRECUENCIA
1		$L = \frac{\lambda_1}{2}$	$f_1 = \frac{V}{2L}$
2		$L = 2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)$	$f_2 = 2f_1$
3		$L = 3\left(\frac{\lambda_3}{2}\right)$	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
n	⋮	$L = n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)$	$f_n = \frac{nV}{2L}$

Figura 10: modos normales de vibración

Este resultado es análogo al que obtuvimos en la ecuación 12; recordemos que la velocidad con que se propaga la cuerda viene dada por $v = f\lambda$, y que esta velocidad también viene dada por las condiciones mecánicas del medio, en este caso la cuerda $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, de esta forma obtenemos las frecuencias asociadas a cada modo:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (18)$$

La ecuación establece las frecuencias de oscilación para cada modo de vibración, y de esta forma establecemos lo que se conoce la ***serie armónica***, cada frecuencia es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Este resultado es análogo al que obtuvimos en el inciso anterior en donde tratamos el caso de la cuerda como una colección de puntos, es decir, desde una perspectiva discreta. La siguiente tabla establece otro tipo de relaciones que son el resultado de resolver la ecuación de onda para una cuerda fija en sus extremos.

Tabla 11

$\lambda = \frac{2L}{n}$ Longitud de onda	$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Frecuencia de vibración
$K = \frac{n\pi}{L}$ Numero de onda	$\omega = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Frecuencia angular

Anexo 2: La estrategia de pensamiento de lo simple para explicar lo complejo en física, a través de las nociones de modos normales y estados base

Jessica Jazmin londoño[12], Ismael Fernando Rodriguez
Universidad Pedagógica Nacional, departamento de física

Resumen

El trabajo tiene como intención realizar una presentación de la relación existente entre diferentes pensamientos de la física desarrollados a partir de la idea de lo simple, lo cuantizado o lo discreto para dar explicación a fenómenos complejos. Hacer un paralelo entre diferentes áreas de la física, las cuales se encuentran en directa relación debido a las ideas de composición y descomposición a través de herramientas de explicación simples como lo son, los estados base en física cuántica para representar el estado de un sistema cuántico, el uso que se hace de los vectores unitarios en la descomposición del movimiento de partículas y sistemas en mecánica clásica, los modos normales en la representación del movimiento de sistemas discretos acoplados y las ondas estacionarias así como la descomposición de Fourier en la representación de ondas .Con estos casos se puede evidenciar la estrategia de pensamiento usada en la ciencia para explicar situaciones complejas a partir de representaciones simples.
Ser consciente de las estrategias utilizadas para dar explicación a los fenómenos y su relación, puede ayudar en la enseñanza de la misma a que el estudiante reconozca y construya representaciones acerca del pensamiento que ayudó a fundar teorías, concepciones y nociones que hoy aportan a la explicación de fenómenos físicos.

Palabras clave: modos normales de vibración, representaciones simples, superposición, estado del sistema.

Introducción

[12] dfi.jlondono@pedagogica.edu.co

Los métodos y estrategias usados en la física, e incluso en otras áreas de conocimiento, para poder dar explicación a fenómenos "reales", a pesar de parecer lejanos y con una relación nula entre si, al estudiarlos con más detalle arrojan una información análoga. La idea de los pensadores de la física siempre se ha encaminado a colocar sus explicaciones en los términos más sencillos posibles, para que de ese modo explicar lo complejo a partir de componentes simples relacionados entre ellos.

La estrategia de pensamiento que va desde las partes al todo es la base de muchas teorías físicas conocidas, e indagando en ellas, lo que se quiere dar a conocer es la necesidad humana de recurrir a representaciones simples con el fin de hacer sencillo, entendible y admisible un conocimiento determinado o un conjunto de conocimientos. Existen varias opiniones al respecto entorno a la parte epistemológica del pensamiento simplificador y el pensamiento complejo, por ejemplo [13]E. Morín (1979) afirma: "A primera vista la complejidad es un tejido de constituyentes heterogéneos inseparablemente asociados (componentes simples): presenta la paradoja de lo uno y lo múltiple. Al mirar con más atención, la complejidad es, efectivamente, el tejido de eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares, que constituyen nuestro mundo fenoménico"

La afirmación de Morín se hace interesante desde el punto de vista epistemológico a tratar en este artículo ya que se ve la asociación directa entre los componentes simples que conforman lo complejo no solo en explicaciones de tipo científico si no en todo tipo de explicaciones de nuestro entorno sensible. Haciendo énfasis en explicaciones de tipo científico y más exactamente en las explicaciones físicas de los fenómenos, se muestran a continuación ejemplos que dan cuenta de este uso de estrategia simplificadora para llegar a una construcción compleja.

En este documento se desarrollara la idea de la estrategia de pensamiento basada en la superposición o relación de componentes simples para dar cuenta de lo fenómenos complicados en física. Se tienen para ejemplificar esta estrategia varias explicaciones físicas que se basan en la idea de lo simple, entre ellas se encuentra las series de Fourier como la descomposición de funciones complicadas en funciones simples, y su uso en las ondas, y el uso del espacio vectorial para hablar de la posición, dado esta como la superposición de vectores en direcciones independientes para describir la posición de un punto en el espacio. Además evidenciar como esta estrategia la utilizo Dirac para hablar del estado de los sistemas cuánticos a partir de los estados base y el principio de superposición.

SERIES DE FOURIER Y ESPACIOS VECTORIALES.

[13] *E. Morin, Introducción al pensamiento complejo 1976.*

Históricamente, las series de Fourier aparecen en el siglo XVII gracias al matemático francés **Jean Baptiste Joseph Fourier.** Surgen del estudio de los fenómenos ondulatorios y del problema de la conducción de calor.

El descubrimiento de estas series fue un gran paso para las matemáticas, y es que esta herramienta es de gran utilidad en varias áreas de la física, la idea mas importante es la siguiente: toda función periódica, con periodo T, que tenga una forma complicada, se puede expresar como la superposición de funciones simple[14]. Las funciones simples a las cual se refiere esta definición, son las funciones trigonométricas SENO y COSENO. La ecuación se escribe de la siguiente forma:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{Cos}(n\omega t) + b_n \mathrm{Sen}(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{Cos}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \mathrm{Sen}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{Siendo } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Donde a_0 es la amplitud promedio de la función $g(t)$ y a_n, b_n son las amplitudes de las funciones simples de $\mathrm{Cos}(n\omega t)$ y $\mathrm{Sen}(n\omega t)$ respectivamente. Estas constantes se pueden deducir a partir de las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} g(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{Cos}(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{Sen}(n\omega t)dt$$

Básicamente, las series de Fourier son capaces de expresar cualquier función en suma de senos y cosenos con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental **(figura 1)**. Y ¿Por qué senos y cosenos? Estas funciones tienen varias características: son funciones suaves y periódicas. Pero una de las condiciones que más llama la atención es el carácter de ortogonalidad que tienen entre ellas.

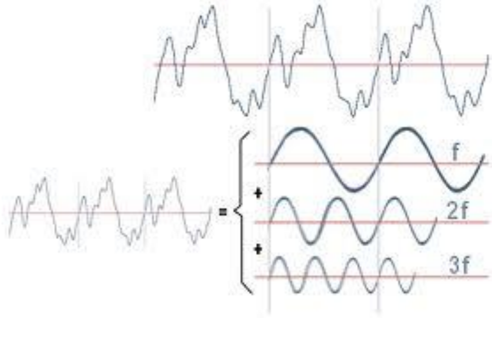


Figura 1

[14] Transnational college of lex, Who is Fourier? (1995)

Resaltamos esta característica ya que es nuestro punto de encuentro entre las series de Fourier y los espacios vectoriales.

Los espacios vectoriales son representaciones geométricas basadas en los planos cartesianos, que cumplen unas propiedades matemáticas[15] **(ver figura 2)**. Ha sido de gran utilidad en la representación de magnitudes físicas vectoriales tales como el desplazamiento, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

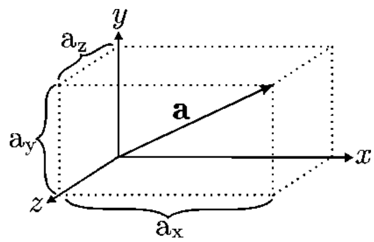


Fig. 2 espacio vectorial

Si queremos representar matemáticamente un vector, por ejemplo el vector desplazamiento, lo hacemos a través de la suma de vectores **linealmente independientes** y que dan cuenta de las proyecciones de los ejes del espacio cartesiano (en tres dimensiones serian x, y, z); estos vectores se llaman vectores base.

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad \textbf{(3)}$$

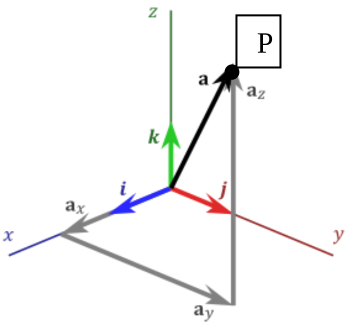


Figura 3

En la ecuación 3, los vectores linealmente independientes son $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$**.** Estos vectores dicen la dirección en la que se orienta la constante que los acompaña; por ejemplo, el primer término del lado derecho de la igualdad de la ecuación (3) tiene $a_x\mathbf{i}$, lo que quiere decir que se deben correr **a** unidades en la dirección **i**, que para este caso es la dirección x del espacio coordenado. De la misma forma los vectores **j** y **k** dan la orientación o dirección de los ejes **y** y **z**.

Si bien en la ecuación (3) el vector desplazamiento **a** se expresa en términos de la suma de tres vectores, no quiere decir que una partícula recorrió los 3 caminos para llegar al

[15] Para ver las propiedades de los espacios vectoriales ver: **STANLEY I.GROSMAN Algebra lineal**

punto **P**, o que la particula se encuentra en las tres proyecciones al tiempo; es mas, la magnitud del vector **a** no es propiamente la suma de los tres vectores, si no la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes. Entonces ¿Qué quiere decir que se sumen? Desde nuestra mirada, creemos que la suma no significa una “mescla” de cosas como sumar objetos, sino una forma de describir algo que parecería complicado, como la posición del objeto en el punto **P** a través de una descomposición de posiciones simples en referencia al espacio cartesiano.

De igual forma pasa en las series de Fourier. Cuando hablamos de que una señal o función $f(t)$, de frecuencia ω_0, que tenga forma complicada, se puede representar a través de la “suma” de funciones simples Seno y Coseno, con frecuencias que son múltiplos enteros de ω_0, no quiere decir que dichas frecuencias sean parte de la función complicada $f(t)$, es una forma de poder describir algo que es complicado en términos de cosas simples.

De lo anterior, llegamos a la primera relación entre las series de Fourier y las representaciones de los vectores; en las dos se utiliza la misma estrategia: **describir situaciones que pueden ser complejas en términos de la superposición de formas simples**. En los espacios vectoriales, un vector se descompone en vectores ortonormales, direcciones simples; en Fourier una señal (o función) compleja, se puede descomponer en términos de funciones simples Senos y Cosenos.

Tal vez, a simple vista esto parezca un poco trivial, sin embargo, la relación que acabamos establecer anteriormente va más allá de la simple descripción. En las dos descripciones, las series de Fourier y los espacios vectoriales, hay una palabra en común: la **ortogonalidad.**

En la descripción de los espacios vectoriales dijimos que un vector se describía en términos de vectores linealmente independientes. Esta es una de las condiciones de ortogonalidad.

Desde el álgebra lineal, 2 o más vectores sin lineal mente independientes cuando, ninguno de ellos, se puede escribir en términos de los otros. Por ejemplo:

El vector $\mathbf{a_2} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, es el doble del vector $\mathbf{a_1} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; es decir, que $\mathbf{a_2} = 2\mathbf{a_1}$ **(figura 4).**

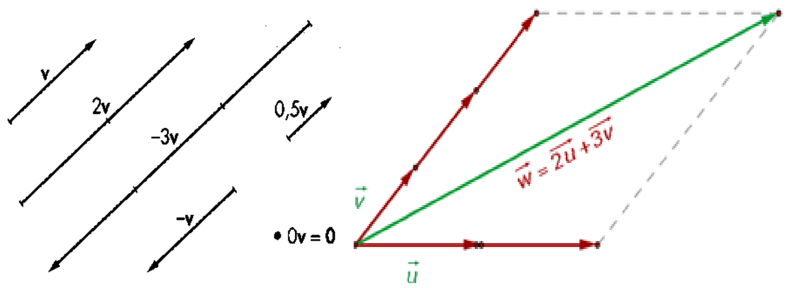


Figura 4

También se puede decir que 2 o mas vectores son linealmente independientes cuando existen 2 o mas escalares ‘’c′′, todos cero tal que cumplan la relación:

$$\mathbf{a_1}c_1 + \mathbf{a_2}c_2 + \mathbf{a_3}c_3 + \cdots \mathbf{a_n}c_n = 0$$

Es decir, para que la ecuación anterior sea cero todos los c_n son iguales a cero.

Precisamente, los vectores que son ortogonales entre si son vectores linealmente independientes; pero ¿Qué quiere decir vectores ortogonales? Des de nuestra experiencia, los vectores ortogonales son vectores perpendiculares entre sí. En la figura 5 se representan 2 vectores ortogonales, es claro de la imagen que el vector **u** no se puede expresar en términos del vector **v**; es to demustra que el espacio cartesiano de la figura 3 tiene 3 vectores ortogonales, o sea, linealmente independientes: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$**;**

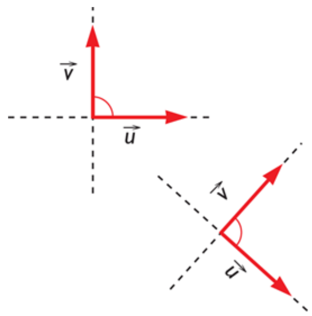


Figura 5

La ortogonalidad se puede demostrar a partir del producto interior: cuando el producto interior entre 2 o más vectores es cero, los vectores son linealmente independientes.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{Cos\theta} = \mathbf{0}$$

Las series de Fourier también cumplen esta condición, pero ¿Qué términos?, los términos Senos y Cosenos. Veamos.

Se dice que dos funciones son ortogonales cuando su producto interior es cero; la forma de representarlo matemáticamente es la siguiente:

$$\langle f(t)|g(t)\rangle = \int f(t) * g(t)dt = 0$$

Apliquemos esto a las funciones Seno y Coseno;

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{Cos}(n\omega t) * \mathrm{Sin}(n\omega t)\, dt = 0$$

El lector puede hacer el cálculo de dicha integral y notar que efectivamente el resultado es cero. De forma gráfica, lo que se puede decir es que cuando multiplicamos la función Coseno, que es una función par, por la función Seno, que es una función impar, dicho producto es una función impar, y la integral de dichas funciones s cero; la figura 6 muestra la función que resulta de la operación $\mathrm{Cos}(2t) * \mathrm{Sin}(2t)$, por simetría las áreas que están tanto en la parte de arriba, debajo de la curva, y en la parte de abajo, por encima de la función, del eje horizontal, al sumarlas su resultado es cero.

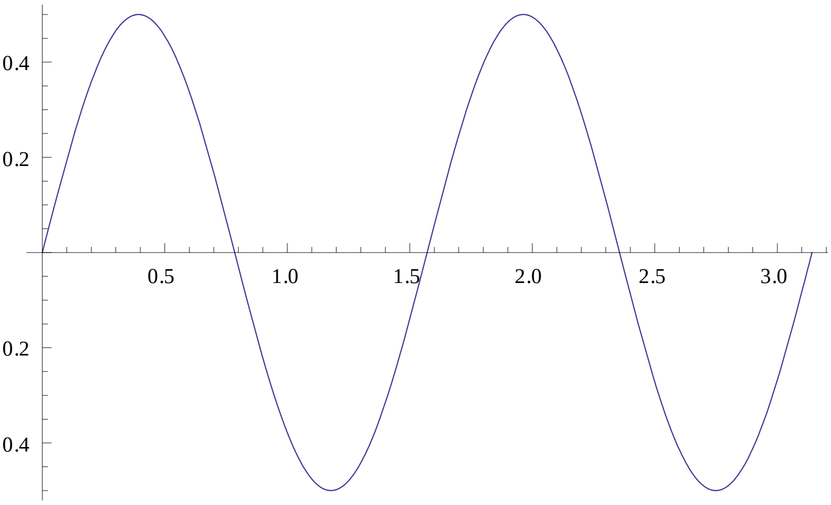
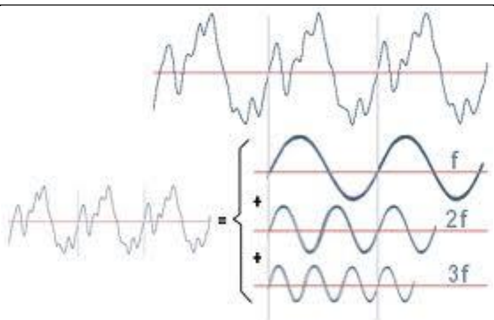
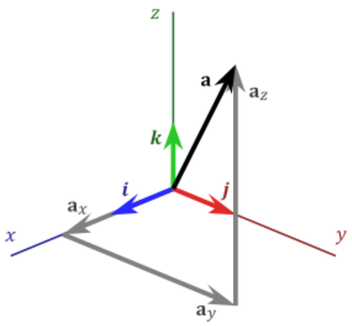


Figura 6

Se puede notar que con esta descripción se resaltan características análogas entre las dos explicaciones: en los espacios vectoriales, los vectores unitarios cumplen esta característica de ortogonalidad al igual que las funciones SENO y COSENO en las series de Fourier. En el siguiente cuadro, mostramos los elementos que son análogos en las dos situaciones.

Series de Fourier	**Espacios vectoriales**
 La función compleja, se descompone en funciones simples	 El vector **a** de la figura se descompone en

	términos de los vectores de la base coordenada
$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos(n\omega t) + b_n Sen(n\omega t)$	$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$
$Cos(n\omega t), Sen(n\omega t)$	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
a_n, b_n	a_x, a_y, a_z
$\int_{-T/2}^{T/2} Cos(n\omega t) * Sin(n\omega t)\, dt = 0$	**A · B=0**

LOS ESTADOS BASE EN FÍSICA CUÁNTICA PARA REPRESENTAR EL ESTADO DE UN SISTEMA CUÁNTICO

Lo planteado anteriormente es evidente en el pensamiento de P.M. Dirac quien tiene una versión de la mecánica cuántica a la base de una simbología con un sentido básico y simple en donde se tiene en cuenta la idea de coherencia para organizar la experiencia o información que arroja el mundo físico y así crea un esquema explicativo que el mismo considera "satisfactorio".

P.M. Dirac aporta con su esquema explicativo lo que se podría llamar una apropiada descripción de los fenómenos a escala microscópica con las cuales así mismo articula su explicación para los estados de los sistemas cuánticos. Dirac pone en juego la idea de asumir que el todo se puede explicar a través de las partes y con esto integra las nociones de superposición, estados y cualidad.

En su esquema explicativo Dirac se basa principalmente en el principio de causalidad, en donde explica que por las características de escala del sistema en estudio (microscópico) este al ser [16]observado se perturbara, en cuyo caso no se podrán realizar mediciones para obtener información veraz del sistema y por tanto no se conocerá al sistema, por esta razón Dirac plantea nuevas herramientas que permitan obtener información del sistema, una de estas herramientas es el principio de superposición de estados.

Como se evidencia, nuevamente vemos el uso de representaciones simples (estados base), para dar cuenta de una situación compleja (estado del sistema), Dirac hace uso de la herramienta de superposición para relacionar estas representaciones simples que él llama estados base o básicos.

El término superposición de estados es uno en los que se halla el uso del pensamiento simplificador, ya que Dirac toma la idea de superposición usada en la Física clásica para

[16] *P.M. Dirac, Principios de la mecánica cuántica, Ediciones Ariel S.A. Barcelona (1958), traducción por: A. Montes*

elaborar el principio de superposición de estados en donde se evidencia con claridad la superposición sujeta a la idea de simplicidad. Para poder comprender un poco mejor la noción es necesario aclarar la idea de superposición que Dirac decide utilizar en analogía con los sistemas de la Física clásica.

Inicialmente Dirac asume un conjunto de estados especiales a los que denomina “estados base”, los cuales se encuentran en analogía con los “vectores unitarios”, estos estados base representan la forma más simple en la que se puede encontrar un sistema y el estado siempre se refiere a una cualidad, para describir el estado del sistema en torno a esa cualidad “base” que será el estado base se requiere de una formalización de la relación entre los estados del sistema. Esta formalización es la superposición de estados.

En analogía con los vectores unitarios se utiliza una notación diferente pero se realizan procedimientos matemáticos de formalización muy parecidos, a continuación se ilustra con un ejemplo la analogía entre los vectores unitarios y los vectores base:

Vectores unitarios	**Vectores de estado**
Ortogonalidad Los vectores unidad son perpendiculares entre sí: $(\hat{x}\,.\,\hat{y}) = 0$ **Integridad** La suma del cuadrado de las componentes de un vector unitario $\widehat{A}$ en cualquier sistema de coordenadas será la unidad. $(A_x.\hat{x})^2 + (A_y.\hat{y})^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	**Ortogonalidad** Los estados base son perpendiculares entre sí: $\langle x\|y\rangle = 0$ **Integridad** La suma de las magnitudes de las amplitudes de $\|\psi\rangle$ección de a al cuadrado es la unidad. $\|\langle x\|\Psi\rangle\|^2 + \|\langle y\|\Psi\rangle\|^2 = 1$ Esta expresión representa la probabilidad de encontrar el sistema en el estadoΨ.

El estado base juega un papel muy importante en la física cuántica como también el vector ordinario en la mecánica clásica. El vector de estado por ejemplo expresa o representa la configuración de un estado que pueda tener el sistema en estudio independientemente de la base elegida para expresarle, de igual manera que el vector ordinario puede expresar la aceleración de una partícula sin especificar la orientación del sistema coordenado respecto al que se mide la aceleración. Lo que se escribe al interior del símbolo del Ket utilizado por Dirac para representar el estado del sistema, está determinado por la extensión de nuestro conocimiento sobre el sistema. En este sentido el Ket nos proporciona libertad. Por ejemplo se puede escribir $\langle\varphi\rangle$ para expresar el estado que no se ha especificado del sistema y de forma similar se puede expresar una incógnita x en el álgebra.

Al igual que un vector ordinario, un vector de estado en física cuántica se puede escribir en términos de los vectores base, que para el caso de los vectores ordinarios serán las componentes del vector en términos de los vectores unidad o vectores unitarios.

- **SUPERPOSICIÓN**

El principio general de superposición de la mecánica cuántica se aplica a los estados de todo sistema dinámico. Según dicho principio existe una relación particular entre los estados, de forma que cuando el sistema está en un estado definido a la vez se puede considerar que está parcialmente en cada uno de una serie de estados. El estado original habrá de considerarse como la superposición de estados base, o como los hemos denominado antes componentes simples.

Este procedimiento de considerar los elementos complicados que ya mencionamos para expresar representaciones complejas no solo ocurre en física cuántica. En física clásica se utiliza la superposición para representar vectores cuyas componentes estarán dadas en función de los vectores unitarios de la base coordenada elegida, esta analogía se presenta claramente en el cuadro (2).

El procedimiento de expresar un estado como el resultado de una superposición de un conjunto de otros estados es un procedimiento matemático que está siempre permitido, independientemente de las condiciones físicas, como ocurre por ejemplo con el método de descomposición de una onda en componentes de Fourier que es un caso ya mencionado en este texto. El que sea útil en un caso particular dependerá de las condiciones físicas particulares del problema a tratar.

LA ANALOGÍA ENTRE MODOS NORMALES DE VIBRACIÓN Y LOS NIVELES DE ENERGÍA DEL ÁTOMO

Existe otra situación en la física en donde se puede notar el uso de la superposición. Cuando se estudian los espectros atómicos se evidencia que la radiación emitida por las sustancias está compuesta por una serie de bandas espectrales, que corresponden a unas frecuencias. Lo anterior se observa cuando el espectro de la luz solar se descompone a través de un prisma y se observa que dicha luz es dividida en varios colores, a lo cual se le denomina arcoíris.

Las franjas obtenidas de la descomposición tienen asociadas unas frecuencias particulares que al superponerlas dan cuenta de lo que llamamos luz solar. Este fenómeno sucede para todas las sustancias, de cada sustancia se puede obtener un espectro propio que está compuesto por diferentes frecuencias asociadas a los colores que se observan, sin embargo se observa un comportamiento discreto ya que además de las frecuencias asociadas a los colores observados también existen unas franjas oscuras que dividen el espectro

La aparición de estas franjas oscuras llevo a los físicos del siglo pasado a idear un modelo que describiera este comportamiento. El modelo atómico que explica la situación de las partículas que conforma el átomo. Este modelo establece que los saltos entre franjas oscuras dan información de los niveles de energía del átomo.

El modelo está conformado básicamente por un núcleo de carga positiva y un conjunto de electrones orbitando dicho núcleo, cada electrón se encuentra a una posición radial especifica en relación al núcleo, cabe aclarar que existe una separación entre los electrones, el espectro emitido por las sustancias es producto del salto de energía al que se someten lo electrones. Estos de energía nos dan información de que la energía necesaria para pasar de un nivel de energía a otro debe estar dispuesta de forma discreta, es decir , el electrón solo se encontrara en unos niveles de energía específicos, los cuales vienen dados por múltiplos enteros de la energía fundamental (el primer nivel de energía).

La expresión que relaciona esta información es la siguiente:

$$E = nhf$$

En analogía con lo anterior se observa un comportamiento similar en la situación de los modos normales en cuerdas. Estos modos se presentan cuando hay ondas estacionarias, estos representan la forma más simple de vibrar del sistema (cuerda). A continuación se presentan los primeros modos normales.

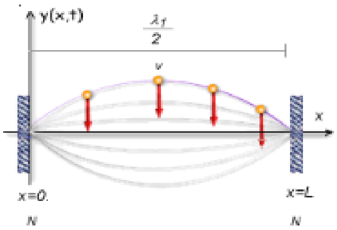
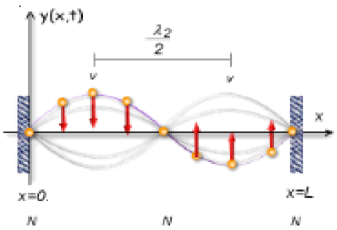
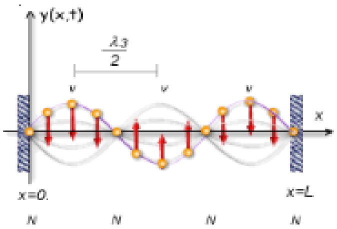
N� ARMóNICO	PERFIL DEL ARMóNICO	LONGITUDES DE ONDA CONTENIDAS EN L	**FRECUENCIA**
1		$L=\frac{\lambda_1}{2}$	$f_1=\frac{V}{2L}$
2		$L=2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)$	$f_2=2f_1$
3		$L=3\left(\frac{\lambda_3}{2}\right)$	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
n	⋮	$L=n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)$	$f_n=\frac{nV}{2L}$

Ilustración 1: modos normales de vibración en cuerdas

En las dos situaciones descritas anteriormente se presenta el mismo comportamiento discreto. Para el caso del átomo los niveles de energía se presentan como discretos y para el caso de los modos normales, lo discreto será la frecuencia en donde estos se presentan.

Se observa que el concepto de “discreto” es utilizado para dar explicación a dos fenómenos de la física que aparentemente no tienen relación.

CONCLUSIONES

- se evidencio una clara analogía entre diferentes campos de la física en donde se utiliza el pensamiento simplificador para dar cuenta de situaciones complicadas, como por ejemplo en la descomposición de Fourier y en la superposición de estados en física cuántica, como también en física clásica para determinar las componentes de un vector bien sea de aceleración o de posición, et.

- Es claro que la estrategia de pensamiento utilizada en la física para dar cuenta de situaciones complejas contiene en si ciertos elementos matemáticos y geométricos que hacen posible la superposición o descomposición del problema involucrado, bien sea conocer un estado final de un sistema con conocer la composición de una onda complicada en unas más sencillas.
- Se tiene en cuenta que para la enseñanza de la física es importante hacer este tipo de analogías que introduzcan al sujeto en la transversalidad que existe entre las teorías y su construcción y así se entienda en comportamiento de la naturaleza de acuerdo a la fenomenología, la cual evidentemente se comporta de manera similar, tanto a nivel atómico, a nivel ondulatorio y a nivel macroscópico.

Anexo 3: La relación de los armónicos ya la escala musical.

Suponemos que tenemos una cuerda vibrante de longitud $\boldsymbol{L}$ que vibra con determinada frecuencia $\boldsymbol{f}$ en su primer modo normal de vibración (**figura 1)**. A este primer modo, con frecuencia determinada, le podemos asociar una nota musical, por ejemplo la nota musical $\boldsymbol{Do}$**.** Cabe aclarar que la designación del nombre de la nota $\boldsymbol{Do}$ es una forma de llamar o de clasificar las frecuencias asociadas a las vibraciones de la cuerda, lo cual hace útil la escritura de los músicos; es más, con esa utilidad fue inventada esa notación, para la gramática musical.

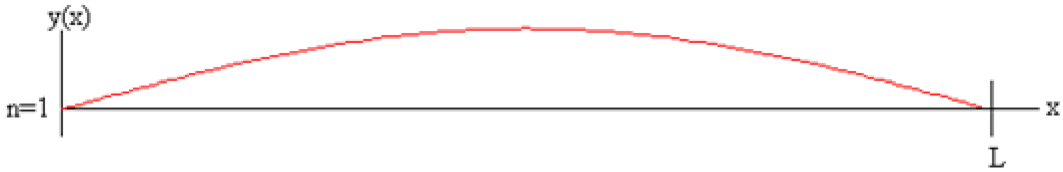


Figura 27: Primer modo normal de vibración de la cuerda

Ahora consideremos el segundo modo normal de vibración; en este modo, la frecuencia se duplica. Una forma de conseguir que la frecuencia es dividir la cuerda en la mitad. De cualquier forma, en el segundo modo normal de vibración obtenemos el doble de la frecuencia, a esta frecuencia le asociamos nuevamente la nota musical $\boldsymbol{Do}$ pero esta nota es lo que en musca se conoce como la octava de la primera nota, y la razón que se llame así, de la misma forma, es porque al sonar esta nota con la primera que hace parte del primer modo normal de vibración, producen una sensación al oído humano de consonancia perfecta, la mayor consonancia de todas, es por esta razón que se llama de la misma forma (**figura 2)**.

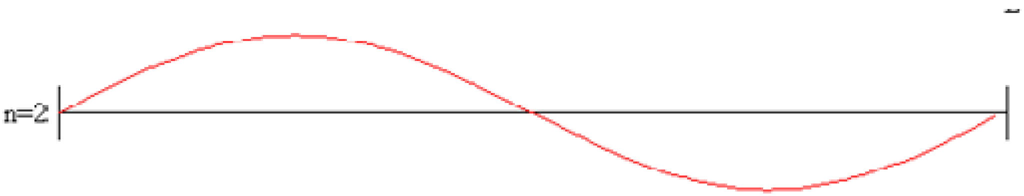


Figura 28: segundo modo normal de vibración

De esta forma ya tenemos dos notas musicales, $\boldsymbol{Do}$ y su octava $\boldsymbol{Do'}$ que denominaremos así para distinguir que una es la octava de la otra. En el tercer modo normal de vibración, la frecuencia se triplica en relaciona la primera, a esta frecuencia nueva se le asignó la nota musical $\boldsymbol{Sol'}$; la razón de que se le asigne la prima a esta nota, es que esta pertenece a la escala que vuelve a comenzar en la octava de $\boldsymbol{Do'}$, por lo tanto, para conocer la frecuencia de la nota musical $\boldsymbol{Sol}$, que pertenece a la escala de $\boldsymbol{Do}$, dividimos en 2 la frecuencia, de este modo la frecuencia de $\boldsymbol{Sol}$ es de 3/2 de la frecuencia inicial.

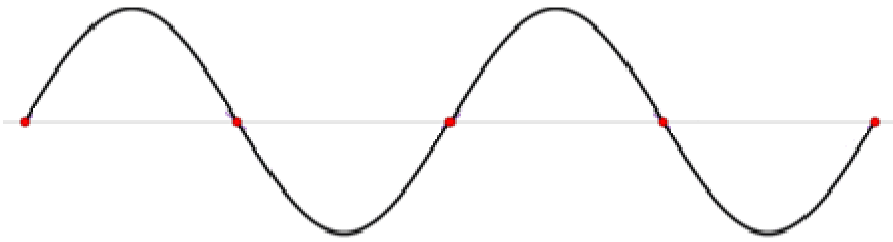


Figura 29: tercer modo normal de vibración

Ahora consideremos el modo normal para el cual la frecuencia se ha hecho cuatro veces mayor que la frecuencia inicial, esta frecuencia es el doble de la frecuencia de $\boldsymbol{Do'}$, por lo tanto esta se denomina $\boldsymbol{Do''}$**,** la 2gunda octava. Ahora, si aumentamos la frecuencia a 5 veces la frecuencia inicial, encontramos una nueva nota, $\boldsymbol{Mi''}$**.** Para obtener la frecuencia de la nota $\boldsymbol{Mi}$**,** dividimos por tres, de modo que la frecuencia para esta nota musical, será de 5/3 de la frecuencia inicial.

El sexto modo normal, corresponde a una frecuencia de seis veces la frecuencia inicial, pero que también es el doble de la frecuencia de $\boldsymbol{Sol'}$ **,** por lo tanto a esta frecuencia se le denomina con la nota $\boldsymbol{Sol''}$**.** Con este procedimiento, obtennos todas las notas musicales, que aparecen en la siguiente partitura.

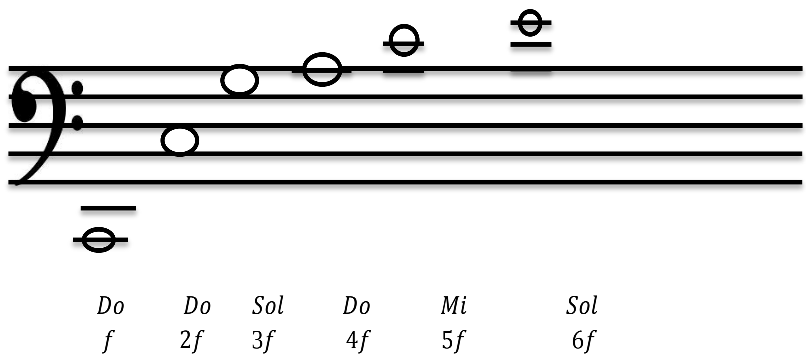


Figura 30